ISSN 2309-4001

БУКОВИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ

Том 10, № 2

Чернівці
Чернівецький національний університет
2022

ISSN 2309-4001

BIKOVINIAN MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 10, № 2

Chernivtsi
Chernivtsi National University
2022

Буковинський математичний журнал. – Т. 10, № 2. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2022. – 264 с.

Журнал входить до переліку наукових фахових видань України категорії "Б"
(наказ МОНУ № 409 від 17.03.2020)
Спеціальності
111 Математика
113 Прикладна математика

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Журнал публікує оригінальні статті англійською та українською мовами із математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей і математичної статистики, математичного моделювання та обчислювальних методів

Реферується Zentralblatt MATH, Index Copernicus, Google Scholar, Polska Bibliografia Naukowa, WorldCat

Редколегія:

Адреса редакції:

58012 м.Чернівці, вул. Університетська, 28, тел. (0372)58-48-80, e-mail: clg-math@chnu.edu.ua

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
Державної реєстраційної служби України: серія КВ № 19465–9265 ПР від 07.11.2012
(Видання є правонаступником Наукового вісника Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика. Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Міністерства юстиції України: серія КВ № 15749–4221Р від 26.10.2009)

Вітчизняне наукове видання
Рік заснування 2013

Bukovinian Mathematical Journal. – Vol. 10, No 2. - Chernivtsi: Chernivtsi Nat. Univ., 2022. – 264 p.

The journal is included in the List of Scientific Professional Publications of Ukraine of category "B"
(Order of the Ministry of Education and Science №409 of March 17, 2020)
Specialties
111 Mathematics
113 Applied Mathematics

The journal publishes original papers in English and Ukrainian in mathematical analysis, differential equations, probability theory and mathematical statistics, mathematical modelling and methods of computations

Reviewed by Zentralblatt, Index Copernicus, Google Scholar, Polska Bibliografia Naukowa, WorldCat

Editorial Board of the issue:

Editorial office address:

58012, Chernivtsi, Universytetska str., 28, tel. (0372)58-48-80, e-mail: clg-math@chnu.edu.ua

Certificate of state registration of the print mass media of the State Registration Service of Ukraine: Series KB No 19465-9265 PR of 11/07/2012
(The journal is the assignee of Naukovyj Visnyk Chernivets'kogo Universytetu. Matematyka. Chernivets'kyj Universytet, Chernivtsi. Ukrainian. Certificate of state registration of the print mass media of the Ministry of Justice of Ukraine: Series KB No 15749-4221 P of 10/26/2009)

National Scientific Publication
Founded in 2013

ЗМІСТ

CONTENTS

Цей випуск присвячений пам'яті
визначного українського математика, талановитого педагога,
доктора фізико-математичних наук, професора,
випускника Чернівецького університету 1959 року,
завідувача кафедри диференціальних рівнянь (1963–1969 рр.) та
кафедри математичного моделювання (1988–2003 рр.)
Чернівецького університету,
фундатора відомої наукової школи з теорії параболічних рівнянь

Степана Дмитровича Івасишена

(10.12.1937 – 21.04.2021)

Мединський І. П., Пасічник Г. С.

Івасишен Степан Дмитрович: життєвий і творчий шлях

Коротко описано життєвий шлях та основні здобутки визначного математика, талановитого педагога, доктора фізико-математичних наук, професора С.Д. Івасишена. Проаналізовано напрямки наукових досліджень Степана Дмитровича та наукові результати, отримані ним з учнями. Високоосвічений і талановитий математик – учений і педагог – Степан Дмитрович постійно й наполегливо працював, реалізуючи себе через працю і шанобливе ставлення до людей.

Ключові слова і фрази: параболічні за І. Г. Петровським системи, параболічні за С. Д. Ейдельманом системи, підхід Ейдельмана–Івасишена, вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова, виродження на початковій гіперплощині, фундаментальний розв'язок задачі Коші, інтегральне зображення розв'язку, коректна розв'язність задачі Коші, крайові задачі.

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна (Мединський І. П.)
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна (Пасічник Г. С.)
e-mail: *ihor.p.medynskyi@lpnu.ua (Мединський І.П.), pasichnyk.gs@gmail.com (Пасічник Г.С.)*

1 Науково-біографічний нарис

10 грудня 2022 року виповнюється 85 років з дня народження видатного українського математика, академіка Академії наук вищої школи України, професора Івасишена Степана Дмитровича.

Ця стаття є нарисом про життя і наукові здобутки Степана Дмитровича Івасишена, який був талановитим математиком й педагогом, людиною високообдарованою, скромною. Повнішу інформацію про нього як науковця, вчителя, неординарну особистість можна знайти в книзі [1].

Степан Дмитрович Івасишен народився 10 грудня 1937 року в селі Угорники Станіславського району Станіславської області (тепер місто Івано-Франківськ). З дитинства був привчений до роботи, уже тоді почав виявлятись потяг до навчання. Закінчивши

УДК 517.956.4, 517(477)(092)
2010 *Mathematics Subject Classification:* 37K70, 35G10, 35A08, 35C15.

1951 року в сусідньому селі Підлужжі семирічку, він продовжив навчання в Угорницькій середній школі, яку закінчив у 1954 році.

Упродовж 1954–1959 років Степан Дмитрович навчався на математичному відділенні фізико-математичного факультету Чернівецького державного університету, який закінчив з відзнакою. Допитливий, високоорганізований, він самовіддано з великим незгасним інтересом учився, повністю заглиблюючись у навчальний матеріал і виявляючи при цьому глибокі та ґрунтовні знання. Захоплено слухав лекції К. М. Фішмана, М. Г. Біляєва, Ю. М. Круга, С. Д. Ейдельмана, В. П. Рубаника та інших. Сумлінний і наполегливий, схильний до творчого пошуку С. Д. Івасишен ще студентом почав займатися науковими дослідженнями під керівництвом С. Д. Ейдельмана.

Відразу після закінчення університету С. Д. Івасишен вступив до аспірантури при кафедрі диференціальних рівнянь, де його науковим керівником був професор С. Д. Ейдельман. Саме Самуїл Давидович Ейдельман відіграв істотну роль у формуванні Степана Дмитровича як науковця і педагога. Навчання в аспірантурі закінчилось у 1963 році захистом на Об'єднаній вченій раді Інститутів математики і кібернетики та Головної астрономічної обсерваторії АН УРСР кандидатської дисертації "Оценки решений $2\vec{b}$-параболических систем и их применения". Офіційними опонентами на захисті були доктори фізико-математичних наук, професори Ю. М. Березанський і Ю. Л. Далецький та кандидат фізико-математичних наук В. С. Королюк; провідною установою – Воронізький державний університет.

Ще навчаючись в аспірантурі, Івасишен С. Д. почав працювати викладачем на кафедрі диференціальних рівнянь Чернівецького університету. Тут він пройшов шлях від асистента до доцента та завідувача кафедри. Обов'язки завідувача кафедри Степан Дмитрович почав виконувати маючи неповних 26 років і на той час був наймолодшим завідувачем кафедри в університеті.

У 1969 році С. Д. Івасишена запросили до конкурсу на посаду завідувача кафедри вищої математики Київського вищого інженерного радіотехнічного училища протиповітряної оборони. На цій посаді він пропрацював упродовж 10 років. З переїздом до Києва завершився перший Чернівецький період життя Степана Дмитровича. В училищі Степан Дмитрович продовжував активну наукову та методичну роботу. За значні досягнення в роботі він був нагороджений у 1970 році Ювілейною медаллю "За доблесну працю", а в 1971 році – Орденом Трудового Червоного Прапора.

Незважаючи на велику зайнятість справами потужної математичної кафедри в провідному військовому інженерному вузі, Степан Дмитрович зумів завершити підготовку докторської дисертації "Матрицы Грина параболических граничных задач". Захист дисертації відбувся в 1981 році на спеціалізованій раді в Інституті математики АН УРСР. Офіційними опонентами на ньому виступили доктор фізико-математичних наук, професор В.О. Солонников, члени-кореспонденти АН УРСР, доктори фізико-математичних наук, професори І.І. Данилюк та Ю.М. Березанський, а провідною установою був Математичний інститут ім. В.А. Стеклова АН СРСР. Результати докторської дисертації викладені в монографії [2].

Упродовж 1980–1988 років С. Д. Івасишен працював на кафедрі математичного аналізу Київського державного університету імені Тараса Шевченка спочатку на посаді доцента, а з 1982 року – професора. У 1984 році йому присвоєно вчене звання професора по кафедрі математичного аналізу.

У 1988 році розрпочався другий Чернівецький період життя та творчої діяльності С. Д. Івасишена. Однією із причин його повернення до Чернівців було запрошення керівництва рідного університету організувати та очолити кафедру математичного моделювання, а також пропозиція академіків Я. С. Підстригача та І. І. Данилюка створити та очолити в Чернівцях академічний науковий осередок – структурний відділ крайових задач для рівнянь із частинними похідними Інституту прикладних проблем механіки і математики АН УРСР (м. Львів).

Упродовж 1988–2003 років С. Д. Івасишен одночасно обіймав посади завідувача кафедри математичного моделювання в університеті та завідувача Чернівецького відділу (з 1996 року керівника Чернівецької філії відділу математичної фізики, в яку був реорганізований відділ крайових задач для рівнянь із частинними похідними) вищевказаного академічного інституту. Саме в цей період найбільш повно розкрились організаторські здібності Степана Дмитровича. Він уміло організовував наукову співпрацю відділу з кафедрою математичного моделювання та іншими кафедрами математичного факультету університету. Під його керівництвом регулярно і плідно працювали спільні наукові семінари факультету та відділу. При кафедрі й відділі почала працювати аспірантура. С. Д. Івасишен брав активну участь у створенні та роботі спеціалізованих вчених рад по захисту дисертацій докторських у Львівському національному університеті імені Івана Франка й кандидатських у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича. Він був ініціатором і першим редактором випусків “Математика” збірника наукових праць “Науковий вісник Чернівецького університету”, який був включений до переліку фахових видань ВАК України. Правонаступником цього збірника в 2013 р. став “Буковинський математичний журнал”.

Велика заслуга Степана Дмитровича в налагодженні та постійній підтримці взаємозв’язків між математиками Чернівців і математиками Києва, Львова, Івано-Франківська та інших міст України. Він був членом бюро секції математики і математичного моделювання Західного наукового центру НАН та МОН України.

У 2003 році С. Д. Івасишен переїхав до Києва. Упродовж 2003–2004 навчального року він працював завідувачем ним же створеної кафедри вищої математики Міжрегіонального гуманітарного інституту Київського славістичного університету. У вересні 2004 року він на запрошення академіка І. В. Скрипника перейшов на роботу в Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут” на посаду професора кафедри математичної фізики. З квітня 2005 року по серпень 2017 року Степан Дмитрович виконував обов’язки завідувача цієї кафедри. За пропозицією академіка А. М. Самойленка у 2006 році працював провідним науковим співробітником відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (за сумісництвом).

У 1992 році С.Д. Івасишена обрано академіком Академії наук вищої школи України, одним із засновників якої він був. Він був членом Українського (з 1995 року) та Американського (з 1996 року) наукових математичних товариств. В 2001–2006 роках він був членом експертної ради з математики ВАК України, в 1990–2020 роках був постійним членом спеціалізованої вченої ради в Чернівецькому національному університеті імені

Юрія Федьковича, в останні роки – членом редколегій шести наукових фахових видань, рецензентом американського журналу “Mathematical Reviews” та “Українського математичного журналу”.

Живучи і працюючи в Києві, Степан Дмитрович не поривав творчих зв’язків з Чернівцями. Він продовжував співпрацювати з Чернівецьким національним університетом імені Юрія Федьковича та Чернівецькою філією Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України. Тут він започаткував науковий семінар імені С. Д. Ейдельмана.

21 квітня 2021 року Степан Дмитрович Івасишен відійшов у вічність.

2 Напрями наукових досліджень

У 1960 р. С. Д. Ейдельман [3] виділив і почав досліджувати разом зі своїми учнями новий клас систем — клас $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. Ці системи є природним узагальненням параболічних за Петровським систем на випадок, коли просторові змінні нерівноправні. Для таких систем С. Д. Ейдельманом і С. Д. Івасишеним [3, 4] побудований і детально досліджений фундаментальний розв’язок задачі Коші (ФРЗК) в припущенні, що коефіцієнти є обмеженими неперервними функціями, які задовольняють за просторовими змінними умову Гельдера відносно спеціальної $\overrightarrow{2b}$-параболічної відстані.

Побудований й досліджений ФРЗК знайшов різноманітні важливі застосування до вивчення внутрішніх властивостей розв’язків параболічних за Петровським і за Ейдельманом ($\overrightarrow{2b}$-параболічних) систем, дослідження коректної розв’язності задачі Коші в широких класах функцій, одержання інтегрального зображення розв’язків задачі Коші та розв’язків, які визначені у відкритому шарі $\Pi_{(0,T]} := \{(t, x) | \, x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, T]\}$, встановлення локальної розв’язності задачі Коші для квазілінійних і нелінійних систем, дослідження можливості продовження їх розв’язків на ширший часовий інтервал та ін.

Детальніше зупинимось на праці С. Д. Івасишена і С. Д. Ейдельмана [4], в якій підведено певний підсумок досліджень $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем до 1968 р. У ній проведено досить повне і точне дослідження ФРЗК Z задачі Коші та її властивостей, властивостей породжених Z потенціалів, знайдено класи коректності задачі Коші для лінійних систем при різних припущеннях щодо коефіцієнтів і неоднорідності систем та початкових функцій, встановлено локальну розв’язність нелінійних систем і вивчено питання про продовження її розв’язків на ширший часовий інтервал, одержано внутрішні оцінки розв’язків та доведено гіпоеліптичність $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. Ці результати, з одного боку, узагальнюють результати з [5] для параболічних за Петровським систем, а з другого – уточнюють і доповнюють їх.

Важливим є також те, що в [4], з належною повнотою, викладено всі етапи дослідження коректної розв’язності задач Коші, яке грунтується на методах теорії потенціалу. Коротко охарактеризуємо їх. Насамперед необхідно мати повний опис ФРЗК Z такої системи, включаючи оцінки Z та її похідних, а також оцінки їх приростів за всіма змінними. Ці результати для Z використовуються при дослідженні властивостей потеціалів, породжених ФРЗК. В основному це властивості, які пов’язані з гладкістю інтегралів

Пуассона та об'ємних потенціалів за різних припущень щодо їх густин. Потрібна також інформація про інтегральні зображення розв'язків задачі Коші, а саме про те, до якого простору повинен належати розв'язок задачі Коші, щоб його можна було подати у вигляді суми інтеграла Пуассона та об'ємного потенціалу. Простори, до яких належать розв'язки, – це банахові простори функцій, що можуть зростати експоненціально при $|x| \to \infty$ і степеневим способом при $t \to 0$. За допомогою зазначених властивостей доводиться, що всякий регулярний розв'язок, тобто такий, що має неперервні похідні, які входять у систему, належить до деякого гельдерового простору і норма розв'язку в цьому просторі оцінюється через відповідні норми неоднорідності системи та початкової функції. Досягти відразу гладкості, яка допускається досліджуваною системою не вдається. Спочатку доводиться, що розв'язок належить до гельдерового простору з показником Гельдера, нижчим від відповідного показника для коефіцієнтів і неоднорідності системи. Потім, використавши інше зображення розв'язку та спеціальну техніку, доводиться, що розглядуваний розв'язок належить до потрібного простору. Оцінки шаудерового типу для розв'язків задачі Коші одержані в [4] і для випадку початкових функцій, гладкість яких не є достатньою для того, щоб їх підставляти в систему. Одержані за допомогою такого підходу результати є повними, точними і в певному розумінні остаточними для параболічних за Петровським і за Ейдельманом систем рівнянь, коефіцієнти яких задовольняють умову Гельдера за сукупністю змінних.

Зазначимо, що в працях [3, 4, 6] та інших при одержанні інтегрального зображення розв'язків параболічних за Петровським і $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем достатні умови, що накладались на розв'язки, не завжди збігались з необхідними. У працях [7, 8] С. Д. Івасишеним вперше знайдено необхідні й достатні умови, за яких розв'язки однорідних $\overrightarrow{2b}$-параболічних (і, отже, параболічних за Петровським) систем, які визначені в шарі $\Pi_{(0,T]}$, зображуються у вигляді інтегралів Пуассона функцій або узагальнених мір зі спеціальних вагових просторів. З'ясовано також, в якому сенсі ці розв'язки задовольняють початкові умови. Отже, С. Д. Івасишен доповнив розглянуті С. Д. Ейдельманом сім'ї просторів, поширив результати на ширший клас систем і довів у певному сенсі обернене твердження.

У подальшому підхід Ейдельмана–Івасишена [9,10] розвивався і багатократно реалізовувався С. Д. Івасишеним [11] і його учнями. Застосування цього підходу у випадках конкретного рівняння зводиться до побудови ФРЗК Z і встановлення оцінок Z і його похідних, вибору підходящих просторів початкових функцій Φ і знаходження відповідних просторів розв'язків U_t, $t \in (0, T]$. Реалізація підходу істотно залежать від точної інформації про ФРЗК.

З 1988 р. по 2021 р. у Чернівцях працював відділ крайових задач для рівнянь із частинними похідними (з 1996 р. філія відділу математичної фізики) Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, керівником якої був Степан Дмитрович Івасишен. Наукові дослідження в рамках відділу поєднувались з дослідженнями на кафедрі математичного моделювання Чернівецького університету. Автори цієї статті брали активну участь у розробці окремих питань науково-дослідних робіт відділу, якими керував Степан Дмитрович.

Дослідженням задачі Коші охоплені, головно, такі класи рівнянь і систем рівнянь:

1) параболічні за І. Г. Петровським та $\overrightarrow{2b}$-параболічні (параболічні за С. Д. Ейдельманом) системи з обмеженими коефіцієнтами за відсутності та наявності вироджень на початковій гіперплощині (спільно з О. С. Кондур [12], О. Г. Возняк [13], Л. П. Березан [14], Т. М. Балабушенко [15], І. П. Мединським [16–20, 36]);

2) параболічні за І. Г. Петровським рівняння і системи з оператором Бесселя (спільно з В. П. Лавренчуком, Т. М. Балабушенко, Л. М. Мельничук [21, 22]);

3) параболічні за І. Г. Петровським та за С. Д. Ейдельманом системи зі зростаючими із зростанням просторових змінних коефіцієнтами за відсутності та наявності вироджень на початковій гіперплощині (спільно з Г. С. Пасічник [23–25]);

4) класи вироджених рівнянь, які є узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова і містять за основними змінними диференціальні вирази, параболічні за І. Г. Петровським та за С. Д. Ейдельманом (спільно з С. Д. Ейдельманом, Г. П. Малицькою [26], Л. М. Андросовою [27–29], О. Г. Возняк [30], В. С. Дронем [31, 32], В. В. Лаюком [33–35], І. П. Мединським [36–42], Г. С. Пасічник [43–46]);

5) параболічні рівняння, які містять псевдодиференціальні вирази (спільно з С.Д. Ейдельманом [47], Р. Я. Дрінем, В. А. Літовченком [48, 49]);

6) параболічні системи Солонникова–Ейдельмана (спільно з Г. П. Івасюк [50]).

При дослідженні крайових задач основним об'єктом є вектор-функції Гріна. За їх допомогою встановлюються ѓоректна розв'язність в просторах Гельдера (обмежених чи зростаючих функцій), інтегральні зображення розв'язків.

Дослідженням крайових задач охоплені такі класи:

1) параболічні за І.Г. Петровським системи та системи з оператором Бесселя, зі зростаючими за просторовими змінними коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині (спільно з В. П. Лавренчуком [51], М. М. Дрінь [52], О. С. Кондур [53], Н. І. Турчиною [54]);

2) параболічні за С. Д. Ейдельманом системи (спільно з Н. І. Турчиною [55]).

Основні наукові результати, одержані С.Д. Івасишеним самостійно та в співавторстві з його вчителем С.Д. Ейдельманом та учнями, такі:

– побудовано фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для рівномірно параболічних і з виродженнями на початковій гіперплощині систем рівнянь (як параболічних за Петровським, так і $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом), досліджено їхні властивості, які використано для встановлення коректної розв'язності задачі Коші як для лінійних, так і нелінійних систем;

– знайдено необхідні та достатні умови зображення розв'язків широких класів параболічних рівнянь і систем рівнянь у вигляді інтегралів Пуассона функцій або узагальнених мір зі спеціальних вагових просторів;

– означено клас параболічних системи Солонникова-Ейдельмана, для яких встановлено коректну розв'язність початкових задач у просторах Гельдера зростаючих функцій;

– означено клас $\overrightarrow{p}$-параболічних псевдодиференціальних систем рівнянь з опуклими цілими аналітичними символами, який охоплює $\overrightarrow{2B}$-параболічні системи рівнянь із частинними похідними з коефіцієнтами, не залежними від просторової змінної;

– означено клас вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основною групою змінних, для яких побудовано й досліджено фундаментальні розв'язки задачі Коші та досліджено розв'язність задачі Коші (в тому числі й у випадку наявності виродження на початковій гіперплощині);

– для загальних параболічних крайових задач і задач спряження побудовано й детально вивчено матриці Гріна, наведено їх застосування до дослідження коректної розв'язності та властивостей розв'язків таких задач;

– досліджено розв'язність модельних крайових задач для $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем (сформульовано умову доповняльності) та для параболічних рівнянь другого поряду зі зростаючими за просторовими змінними кефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині.

Для перших чотирьох класів рівнянь і систем рівнянь розроблена теорія їх розв'язності за звичайних і вагових початкових умов та без початкових умов залежно від того, чи відсутні, а якщо присутні, то якого характеру виродження на початковій гіперплощині. Зокрема, для однорідних слабко вироджених систем із першого класу, систем із другого класу, а також рівнянь із четвертого класу, коефіцієнти яких можуть залежати лише від часової змінної, і рівнянь із цього класу другого порядку із залежними від усіх змінних коефіцієнтами знайдено необхідні й достатні умови того, що спеціально побудовані вагові L_p-простори функцій та відповідні простори узагальнених мір є множинами початкових значень і що розв'язки зображуються через їх початкові значення у вигляді інтегралів Пуассона. Останні результати є поширенням відповідних класичних результатів теорії гармонічних функцій на розв'язки вищевказаних рівнянь і систем рівнянь. Зазначимо, що в рамках розробленої теорії для систем з першого класу доведено теореми про апріорні оцінки та підвищення гладкості розв'язків, коректну розв'язність лінійних систем, а також локальну розв'язність квазілінійних систем. Ряд праць [20] присвячено питанням локальної розв'язності квазілінійних параболічних рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині.

Для третього класу систем припускалось, що коефіцієнти зростають при $|x| \to \infty$ не швидше деякої спеціальної функції (характеристики дисипації) [23, 24]. На коефіцієнти системи при цьому накладалось два набори умов: перший – на гладкість коефіцієнтів, другий – їх гельдеровість. Розглядались також системи, які зводяться до вищезгаданих.

У працях [51, 54] розглядаються крайові задачі Діріхле та Неймана для параболічних рівнянь з необмеженими в околі нескінченності коефіцієнтами і таких, що містять виродження при $t = 0$. Для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем до групи старших членів включають похідні різних порядків за різними просторовими змінними, в цьому й полягає їх особливість у порівнянні з системами, які є параболічними в сенсі І.Г. Петровського. Через це в [55] розглядаються крайові задачі у півпросторах, в яких одна просторова змінна змінюється на інтервалі $(0, \infty)$, а всі інші – на інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

У рамках досліджень рівнянь з четвертого класу, коефіцієнти яких залежать від усіх змінних, побудовано та вивчено властивості дещо ослабленого порівняно з класичним Лі-ФРЗК. Для рівнянь другого порядку з однією групою змінних виродження в [36, 37, 39] знайдено умови на коефіцієнти, за яких побудовано класичний ФРЗК, одержано точні оцінки його похідних та їх приростів за просторовими змінними. При цьому використано запропоновану раніше С. Д. Івасишеном та І. П. Мединським модифікацію класичного методу Леві, яка є фактично поетапним застосуванням методу параметриксу Леві. Аналогічні результати отримано для рівнянь з двома групами змінних виродження [40–42].

Для виродженого, як і невиродженого, параболічного рівняння другого порядку з коефіцієнтами, сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших його членів з четвертого класу знайдено в явному вигляді вираз для фундаментального розв'язку задачі Коші. Розглядалась задача Коші для рівняння як з виродженням на початковій гіперплощині [46], так і без [43].

Зазначимо, що більшість вищеназваних результатів увійшли повністю, або частково до монографій [4, 10], а огляди результатів містяться в [11, 56, 57]. У праці [57] проаналізовано основні напрямки досліджень, що проводились під керівництвом Степана Дмитровича у Чернівецькій філії Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України.

Отже, головним напрямком наукових досліджень професора С.Д. Івасишена була теорія задачі Коші та крайових задач для параболічних (у різних сенсах) рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними за наявності різних вироджень та особливостей (коли, наприклад, порушується умова рівномірної параболічності, коефіцієнти рівнянь є необмеженими в околі деяких точок чи на нескінченності, в рівняння входять псевдодиференціальні вирази, праві частини задачі мають різного роду особливості тощо).

Цій теорії присвячені його обидві дисертації та праці його учнів. Він є автором і співавтором коло 383 публікацій, серед яких 3 монографії, 8 статей монографічного характеру та 13 навчальних посібників.

Уся трудова діяльність С.Д. Івасишена пов'язана з викладанням математики у вищій школі, керівництвом науковою роботою студентів, аспірантів і молодих викладачів. Спектр прочитаних ним навчальних курсів досить широкий. Наведемо перелік основних нормативних і спеціальних курсів, які читав Степан Дмитрович у Чернівецькому й Київському університетах, Київському вищому інженерному радіотехнічному училищі протиповітряної оборони та Національному технічному університеті України "Київський політехнічний інститут". Серед нормативних курсів, прочитаних професором С.Д. Івасишеним: математичний аналіз, аналітична геометрія та лінійна алгебра, диференціальні рівняння, рівняння математичної фізики, інтегральні рівняння, теорія міри та інтеграла, функціональний аналіз, елементи теорії функцій комплексної змінної та операційне числення, теорія ймовірностей з елементами математичної статистики і теорією випадкових процесів. Серед спеціальних курсів: узагальнені функції та їх застосування, параболічні та еліптичні крайові задачі, задача Коші для рівнянь із частинними похідними, рівняння в згортках, диференціальні оператори, спеціальні розділи сучасної теорії операторів і функціоналів, методи математичного моделювання, математичні моделі фізики, узагальнені розв'язки задач математичної фізики, параболічні моделі.

Велику увагу С.Д. Івасишен приділяв залученню молоді до наукової діяльності. З переважною більшістю своїх учнів Степан Дмитрович починав наукову роботу ще з їхніх студентських років і до закінчення університету в них були вже наукові публікації та виступи на наукових конференціях. Під його керівництвом підготували доповіді та виступили на наукових конференціях понад 80 студентів. Степан Дмитрович був офіційним керівником 14 кандидатських робіт і науковим консультантом 2 докторських дисертацій В. А. Літовченка та І. П. Мединського. 22 випускники 1988–2003 років кафедри математичного моделювання Чернівецького університету, коли її завідувачем був Степан Дмитрович, стали кандидатами наук і один – доктором наук.

Степан Дмитрович Івасишен до останнього дня життя займався математикою, працював з учнями та проводив заняття зі студентами. Степан Дмитрович часто повторював фразу: “Люблю, коли працюють”.

Будемо працювати і пам’ятати.

Список літератури

[**1**] Pasichnyk H. S. Ivasyshen Stepan Dmytrovych. Biobibliogaphic guide. Chernivtsi national univer., Chernivtsi. 2017. (in Ukrainian)

[**2**] Ivasyshen S.D. Green matrices of parabolic boundary value problems. Vyshcha shkola, Kiev, 1990. (in Russian)

[**3**] Eidelman S. D. *On one class of paabolic systems.* Dokl. AN USSR. 1960. **133** (1), 40–43. (in Russian)

[**4**] Ivasyshen S. D., Eidelman S. D. $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems.* Trudy Sem. Funkt. Anal. Inst. Mat. AN Ukr. SSR., Kiev. 1968, **1**, 3–175, 271–273. (in Russian)

[**5**] Eidelman S. D. Parabolic systems. Nauka, Moscow, 1964. (in Russian) English edition: North- Holland, Amsterdam, 1969.

[**6**] Chabrowski J. *Representation theorems for parabolic systems.* J. Austral. Math. Soc. 1982. **A.32** (2). 246–288.

[**7**] Ivasyshen S.D. *Integral representation and initial values of solutions of* $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems.* Ukr. Math. Zh. 1990, **42** (4). 500–506.(in Russian)

[**8**] Ivasyshen S.D. *On integal representations and Fatous popeties for solutions of parabolic systems.* Uspehi mat. nauk. 1986. **41** (4). 173–174. (in Russian)

[**9**] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D. *On solutions of parabolic equations from families of Banach spaces depended on time.* Birkhäuser, Basel, 2000. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **117**, 111–125.

[**10**] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **152**).

[**11**] Ivasyshen S. D. *Solutions of parabolic equations from families of Banach spaces depending on time.* Mat. Stud. 2013, **40**, 172—181. (in Ukrainian)

[**12**] Ivasyshen S. D., Kondur O. S. *Properties of some class of solutions for the homogeneous parabolic by Petrovski system of arbitrary order.* Dop. NAN Ukr. 1996. (11), 12–15. (in Ukrainian)

[**13**] Voznyak O. G., Ivasyshen S. D. *The Cauchy problem for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane.* Dop. AN Ukr. 1994, (6), 7—11. (in Ukrainian)

[**14**] Berezan L. P., Ivasyshen S. D. *On strongly degenerate* $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems* Visnyk of the Lviv university. Ser. Appl. Math. 1998. (337), 73–76. (in Ukrainian)

[**15**] Balabushenko T. M., Ivasyshen S.Ḋ. *On the poperties of* $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems in regions unbounded by time variation.* Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. 2002. **45** (4), 19–26.(in Ukrainian)

[**16**] Ivasyshen S.,Medynsky I. *Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane.* Mat. Stud. 2000. **13** (1), 33–46.

[**17**] Ivasyshen S. D.,Medynsky I. P. *A priory estimates of solutions for $\overrightarrow{2b}$-parabolic system with the degeneration on the initial hyperplane.* Nelin. analiz: Pr. Ukr. Mat. Kongres-2001, Kyiv: Ins. Mat. NAN Ukr. 2001, 28—41. (in Ukrainian)

[**18**] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *Properties of integrals of the type derived fкom volume potentisls for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane.* Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. 2002. **45** (4), 76–86. (in Ukrainian)

[**19**] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane.* Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. 2003. **46** (3), 15–24. (in Ukrainian)

[**20**] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *Local solvability of Cauchy problem for quasi-linear $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems with weak degeneration on initial hyperplane.* Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. 2004. **47** (4), 110–114. (in Ukrainian)

[**21**] Ivasyshen S. D., Lavrenchuk V. P. *On a integral representation of solutions for the parabolic system of linear equations with Bessel operator* Nelineinye granichnye zadachi: mezhved. sbornik nauch. tr. 1992, **4**, 19—25. (in Russian)

[**22**] Balabushenko T. M., Ivasyshen S.Ḋ., Lavrenchuk V. P., Melnychuk L. M. *The integral of solutions some parabolic equations with Bessel operator and increasing coefficients.* Nauk. Visnyk Cherniv. Univer. 2007, **336–337**, 7—15. (in Ukrainian)

[**23**] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *On the Cauchy Problem for (2b) $\overrightarrow{2b}$-harabolic Systems with Growing Coefficients* Uk. Math. J. 2000. **52**, 1691–1705.

[**24**] Pasichnyk H. S. *On the cauchy problem for dissipative $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems.* Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. 2004. **47**, (4), 138–143. (in Ukrainian)

[**25**] Ivasychen S. D., Pasichnyk H. S. *Cauchy problem for the Fokker-Plank-Kolmogorov equation of a multi-dimensional normal Markovian process* J. of Math. Sci. 2011. **176**(4), 505–514.

[**26**] Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Malytska H. P. *The modified Levi method of construction and stude of the fundamental solutions of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations of Kolmogorov type.* Nonlinear boundary value problems. 1998. (8), 101–107.

[**27**] Ivasyshen S. D., *Androsova L.N. On integral representation and initial values of solutions of certain degenerate parabolic equations.* Dokl. AN Ukr. SSR. Ser. A. 1989, (1), 16—19. (in Russian)

[**28**] Ivasyshen S. D., Androsova L. N. *Localization principles for solutions of sonedegenerate parabolic equations.* Boundary value poblems with vaious featues and degeneacies. Zb. nauk. pr. 1990, 48–61. (in Russian)

[**29**] Ivasyshen S. D., Androsova L. N. *Integral representation of solutions of a class of degenerate parabolic Kolmogorov equations.* Diff. Uravn. 1991, **27** (3), 479—487. (in Russian)

[**30**] Voznyak O. G. , Ivasyshen S. D. *Fundamental solutions of the Cauchy problem for a class of parabolic equations, and their applications.* Dop. NAN Ukr. 1996, (10), 11—16. (in Ukrainian)

[**31**] Dron' V. S., Ivasyshen S. D. *On correct solvability of the Cauchy problem degenerate parabolic equations of Kolmogorov type.* Ukr. Mat. Visnyk. 2004, **1** (1), 61–68. (in Ukrainian)

[**32**] Dron' V. S., Ivasyshen S. D. *Properties of volume potentisls for degenerate $\overrightarrow{2b}$-parabolic equations of Kolmogorov type.* Bukovinian. Mat. J. 2017. **5** (1-2), 80–86. (in Ukrainian)

[**33**] Ivasyshen S. D., Lajuk V. V. *The Cauchy problem for some degenerate parabolic equations of Kolmogorov type.* Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. 2007, **50** (3), 56-–65. (in Ukrainian)

[**34**] Ivasyshen S. D., Lajuk V. V. *Characterization solutions for some class ultraparabolic equations of Kolmogorov type.* Ukr. Mat. Visnyk. 2010. **7** (1), 1—38. (in Ukrainian)

[**35**] Ivasyshen S. D., Layuk V. V. *Fundamental solutions of the Cauchy problem for some degenerate parabolic equations of Kolmogorov type.* Ukr. Mat. J. 2011, **63** (11), P. 1469–1500. (in Ukrainian)

[**36**] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *The classical fundamental solution of a degenerate Kolmogorov's equation with coefficients indepedent on variables of degeneration.* Bukovinian. Mat. J. 2014. **2** (2–3), 94–106.(in Ukrainian)

[**37**] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic equations of Kolmogorov type with two groops of spartial variables.* Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. 2016. **13** (1), 108–155. (in Ukrainian)

[**38**] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations.* Mat. Stud. 2017. **47** (1), 33–46. https:doi.org//10.30970/ms.47.1.33-46.

[**39**] Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P. *On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables.* J. Math. Sci. 2018. **231** (4), 507–526. https:doi.org//10.1007/s10958-018-3830-0.

[**40**] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I.* J. Math. Sci. 2020. **246** (2), 121–151. https:doi.org//10.1007/s10958-020-04726-z.

[**41**] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. II.* J. Math. Sci. 2020. **247** (1), 1–23. https:doi.org//10.1007/s10958-020-04786-1.

[**42**] Voznyak O., Ivasyshen S., Medynsky I. *Fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane.* Visnyk of the Lviv university. Ser. mechan. and math. 2019. **88**, 107–127. https://dx.doi.org/10.30570/vmm.2019.88.107-127. (in Ukrainian)

[**43**] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *Fundamental solution of the Cauchy problem for for paraboic equation with growing lowest coefficients* Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. 2014. **11** (2),126–153. (in Ukrainian)

[**44**] Ivasyshen S., Pasichnyk H. *The Cauchy problem for paraboic equation with growing lowest coefficients* Math. Bulletin of the Shevchenko scientific society. 2014. **11**, 73–87. (in Ukrainian)

[**45**] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *Integral representation of solutions for paraboic equation with growing lowest coefficients.* Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. 2015. **12** (2), 205–229. (in Ukrainian)

[**46**] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *Ultraparabolic Equations with Infinitely Increasing Coefficients in the Group of Lowest Terms and Degenerations in the Initial Hyperplane* J. Math. Sci. 2020. **249** (3), 333-354. doi:https://doi.org/10.1007/s10958-02-04946-3

[**47**] Eidelman S. D., Ivasyshen S. D. *On fundamental solutions of the Cauchy problem for one new a class of pseudo-differential equations.* Dop. NAN Ukr. 1997. (6), 18–23. (in Ukrainian)

[**48**] Ivasyshen S. D., Litovchenko V. A. *Cauchy problem for one class of degenerate Kolmogorov-type parabolic equations with positive genus.* Ukr. Mat. Zh. 2009. **61** (8), 1066-1087. (in Ukrainian)

[**49**] Ivasyshen S. D., Litovchenko V. A. *Cauchy problem for a class of degenerate kolmogorov-type parabolic equations with nonpositive genus.* Ukr. Mat. Zh. 2010.**62** (10), 1330–1350. (in Ukrainian)

[**50**] Ivasyshen S. D., Ivasyuk H. P. *Initial value problems for Solonnikov–Eidelman parabolic systems.* Dop. NAN. Ukr. 2007, (9), 7—11. (in Ukrainian)

[**51**] Ivasyshen S. D., Lavrenchuk V. P. *On correct solvability general boundary problems for parabolic system with increasing coefficients.* Ukr. Mat. Zh. 1978. **30** (1), 100–106. (in Russian)

[**52**] Drin' M. M., Ivasyshen S. D. *The Green's matrix of the general boundary value problem for a Petrovsky parabolic systems with increasing discontinuous coefficients.* Dop. AN Ukr. SSR. Ser. A. 1984. (11), 7–10. (in Ukrainian)

[**53**] Ivasyshen S. D., Kondur O. S. *On the Green matrix of the Cauchy problem and the characterization of certain classes of solutions for* $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems of an arbitrary order* Mat. Stud. 2000, **14** (1), 73—84. (in Ukrainian)

[**54**] Turchyna N. I., Ivasyshen S. D. *About model boundary value problem with vector parabolic weight.* Bukovinian. Math. J. 2017. **5** (3–4), 163–167. (in Ukrainian)

[**55**] Ivasyshen S. D., Turchyna N. I. *Green's matrix for model boundary value problem with vector parabolic weight.* Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya 2017, 60 (4), 25-39. (in Ukrainian)

[**56**] Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P., Pasichnyk H. S. *Parabolic Equations with degenerations on initial hyperplane* Bukovinian. Math. J. 2016. **4** (3–4), 57–68. (in Ukrainian)

[**57**] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P., Pasichnyk H. S. *Parabolic equations with different singularities and degenerations.* Neclas. zadachi teorii dyf. rivnian. Proceedings of Institute of Applied of Mechfnics and Mathematics them Ya. S. Pidstyhach NAS of Ukraine., 2017, 68–76. (in Ukrainian)

Надійшло 06.12.2022

Medynsky I. P., Pasichnyk H. S. *Ivasyshen Stepan Dmytrovych: life and creative path*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 8–19.

The article is an essay about the life and work of an outstanding mathematician, talented teacher, doctor of physical and mathematical sciences, professor S. D. Ivasyshen. The article consists of two interconnected parts. The first part is actually a description of the life path, and the second part is a description and brief anal is is of the main areas of scientific research. The whole life of S. D. Ivasyshen was closely related to the mathematics: preparing for classes, writing articles, conducting research and obtaining new results-not a day without mathematics. Being a highly educated and talented mathematician, scientist and teacher, he constantly worked hard, realizing himself through work and respectful attitude towards people.

Gorbachuk V.M.

ON SOLUTIONS OF THE NONHOMOGENEOUS CAUCHY PROBLEM FOR PARABOLIC TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A BANACH SPACE

For a differential equation of the form $u'(t) + Au(t) = f(t), t \in (0, \infty)$, where A is the infinitesimal generator of a bounded analytic C_0-semigroup of linear operators in a Banach space $\mathfrak{B}$, $f(t)$ is a $\mathfrak{B}$-valued polynomial, the behavior in the preassigned points of solutions of the Cauchy problem $u(0) = u_0 \in \mathfrak{B}$ depending on $f(t)$ is investigated.

Key words and phrases: Banach space, C_0-semigroup of linear operators, abstract parabolic equation, nonhomogeneous Cauchy problem, bounded and bounded holomorphic semigroups..

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine
e-mail: *v.m.horbach@gmail.com*

The paper is dedicated to memory of S.D. Ivasishen, my scientific and spiritual Teacher

Introduction

The study of linear differential equations whose coefficients are unbounded operators in a Banach or Hilbert space is expedient not only because they include a number of partial differential equations but also because it offers the possibility to look at ordinary as well as partial differential operators from a single point of view. The origin of the theory of such equations dates from the work of Hille (1948) [1], in which the first existence theorems were obtained for the Cauchy problem for an equation $u' = Au$ with unbounded operator A in a Banach space. They were formulated in terms of semigroups of operators. Appreciating their role in mathematics, E. Hille had written: "I hail a semigroup when I see one and I seem to see them everywhere". During the last 50 years, the theory of operator differential equations, boundary value problems for them and semigroups related to them was enriched with significant results. It became a field of independent interest, attracting the attention of many mathematicians.

We consider the Cauchy problem for a nonhomogeneous equation of the form

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in [0, \infty),$$

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K90,47D06.

where A is the generator of a bounded holomorphic semigroup of linear operators in a Banach space $\mathfrak{B}$, and $f(t)$ is a strongly differentiable $\mathfrak{B}$-valued function. The purpose of the present paper is to investigate a behavior in the preassigned points of solutions of the Cauchy problem $u(0) = u_0 \in \mathfrak{B}$ depending on $f(t)$.

1. Preliminaries

Let $\mathfrak{B}$ be a Banach space over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers with norm $\|\cdot\|$. Recall that a one-parameter family $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ of bounded linear operators on $\mathfrak{B}$ forms a C_0-semigroup in $\mathfrak{B}$ if:

1) $U(0) = I \quad (I$ is the identity operator in $\mathfrak{B})$;
2) $\forall t, s > 0 : U(t+s) = U(t)U(s)$;
3) $\forall x \in \mathfrak{B} : \lim\limits_{t\to 0} \|U(t)x - x\| = 0$.

(As for the theory of C_0-semigroups see, for example, [2], [3], [4] and [5], [6], [7]).

The linear operator A defined as

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)x - x), \ \mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathfrak{B} : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)x - x) \text{ exists } \right\},$$

($\mathcal{D}(\cdot)$ denotes the domain of an operator) is called the generating operator or, simply, the generator of $\{U(t)\}_{t\geq 0}$. This operator is closed, $\mathcal{D}(A)$ is dense in $\mathfrak{B}$ and $U(t)$-invariant, that is, $\forall x \in \mathcal{D}(A) : U(t)x \in \mathcal{D}(A)\ (t \geq 0)$ and $AU(t)x = U(t)Ax$. Moreover,

$$\frac{d}{dt}U(t)x = AU(t)x, \ x \in \mathcal{D}(A).$$

A C_0-semigroup $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ in $\mathfrak{B}$ is called (strongly) differentiable if for any $x \in \mathfrak{B}$, the $\mathfrak{B}$-valued function $U(t)x$ is strongly differentiable on $(0, \infty)$. As is known (see [3]), for such a semigroup

$$\forall x \in \mathfrak{B}, \forall t > 0 : U(t)x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n),$$

the vector-valued function $U(t)x$ is infinitely differentiable on $(0, \infty)$, and

$$\forall x \in \mathfrak{B}, \forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \frac{d^n U(t)x}{dt^n} = A^n U(t)x.$$

Let now $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. A C_0-semigroup $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ in $\mathfrak{B}$ is called holomorphic with angle θ (or, simply,holomorphic) if the operator-valued function $U(\cdot)$ is defined in the sector $S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta\}$ and:

1) $\forall z_1, z_2 \in S_\theta : U(z_1 + z_2) = U(z_1)U(z_2)$;
2) $\forall x \in \mathfrak{B} : U(z)x$ is holomorphic in S_θ;
3) $\forall x \in \mathfrak{B} : \|U(z)x - x\| \to 0$ as $z \to 0$ in any closed subsector of S_θ.

If in addition the family $U(z)$ is bounded on every sector S_ψ with $\psi < \theta$, then $U(t)$ is called a bounded holomorphic semigroup with angle θ.

2. Main results

Consider now the nonhomogeneous Cauchy problem

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{1}$$

$$u(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathfrak{B}, \tag{2}$$

where A is the generator of a bounded holomorphic semigroup $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ in $\mathfrak{B}$, and $f(t)$ is a strongly continuously differentiable on $[0, \infty)$ vector function with values in $\mathfrak{B}$. By a solution of problem (1),(2) we mean a continuously differentiable function $u(t) : [0, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$ satisfying (1) and (2). As has been shown in [6], the general solution of this problem is represented in the form

$$u(t) = U(t)y_0 + \int_0^t U(t-s)f(s)ds. \tag{3}$$

We will be interested in a behavior in the given points of its solution depending on $f(t)$. In so doing, we will assume $0 \in \rho(A)$ ($\rho(\cdot)$ is the resolvent set of an operator). Then (see [5], [8])the semigroup $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ is exponentially stable, that is,

$$\exists c > 0, \exists \omega > 0, \forall t \in [0, \infty) : \|U(t)\| \leq ce^{-\omega t} \tag{4}$$

(c and ω are constants).

Lemma 1. *For any $t \in (0, \infty)$, there exists the operator $(I - U(t))^{-1}$ (I is the identity operator in $\mathfrak{B}$), which is defined and bounded on the whole space $\mathfrak{B}$.*

Proof. Let $x \in \ker(I - U(t))$. Then, by virtue of the semigroup property 2), $U(nt)x = U^n(t)x = x(n \in \mathbb{N}_0) = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. It follows from (4) that $x = \lim_{n\to\infty} U(nt)x = 0$. So, $\ker(I - U(t)) = \{0\}$, that is, the operator $(I - U(t))^{-1}$ exists.

Show now that $\mathcal{R}(I - U(t)) = \mathfrak{B}$ ($\mathcal{R}(\cdot)$ is the range of an operator). It is not difficult to verify that

$$\forall y \in \mathfrak{B} : (U(nt) - I)y = (U(t) - I)\sum_{k=0}^{n-1} U(kt)y. \tag{5}$$

Moreover, the series $\sum_{k=0}^{\infty} U(kt)y$ converges to some element $x \in \mathfrak{B}$, because

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty} U(kt)y\right\| \leq c\|y\|\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\omega_k t} \to 0, \ n \to \infty.$$

The passage to the limit in (5) as $n \to \infty$ yields the equality $y = (I - U(t))x$, i.e. $y \in \mathcal{R}(I - U(t))$, as required. It remains to apply the closed graph theorem. □

Lemma 2. *Let in problem* (1), (2) *$f(t)$ be such that $\|f(t)\| \to 0, \ t \to \infty$. Then for a solution $u(t)$ of this problem, $\|u(t)\| \to 0$ as $t \to \infty$.*

Proof. According to what has been said above, $u(t)$ is represented in the form (3). It follows from (4) that the first summand in this representation tends to 0 as $t \to \infty$. Let us show that an analogous property holds for the second one, too. Indeed, choose in the equality

$$\int_0^t U(t-s)f(s)ds = \int_0^\tau U(t-s)f(s)ds + \int_\tau^t U(t-s)f(s)ds,$$

a sufficiently large τ such that $\|f(t)\| < \varepsilon$ as $t \geq \tau$ ($\varepsilon > 0$ is arbitrarily small). Then

$$\left\| \int_0^t U(t-s)f(s)ds \right\| \leq \max_{s\in[0,\tau]} \|f(s)\| e^{-\omega(t-\tau)} + \varepsilon \int_0^\infty \|U(s)\|ds.$$

This inequality shows that the second summand in (3) is as small as desired. □

Lemma 3. *Suppose that in the problem* (1),(2),

$$f(t) = p_n(t) + g(t),$$

where

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^n x_k t^k,\ x_k \in \mathfrak{B}, \quad \textit{and} \quad \|g(t)\| \to 0 \textit{ as } t \to \infty.$$

Then a solution $u(t)$ of this problem can be represented in the form

$$u(t) = q_n(t) + y(t),$$

where $\|y(t)\| \to 0$ $(t \to \infty)$, and

$$q_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \quad a_k = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(k+i)!}{k!} A^{-(i+1)} x_{k+i}.$$

Proof. Put

$$v(t) = U(t)y_0 + \int_0^t U(t-s)g(s)ds.$$

Then the representation (3) for $u(t)$ can be written as

$$u(t) = v(t) + \int_0^t U(t-s)p_n(t-s)ds = y(t) + \int_0^\infty U(s)p_n(t-s)ds,$$

where

$$y(t) = v(t) - \int_t^\infty U(s)p_n(t-s)ds = v(t) - \sum_{k=0}^n \int_t^\infty U(s)x_k(t-s)^k ds.$$

Since $v(t)$ is a solution of the problem (1),(2) with $f(t) = g(t)$, in view of Lemma2, we have $\|v(t)\| \to 0$ as $t \to \infty$. Integrating by parts k times the integral under the sign of $\sum$ in the expression for $y(t)$, we obtain

$$\int_t^\infty (t-s)^k U(s) x_k ds = (-1)^k k! U(t) A^{-(k+1)} x_k,$$

whence

$$y(t) = v(t) - U(t) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! A^{-(k+1)} x_k.$$

For this reason $\|y(t)\| \to 0$ as $t \to \infty$. It remains to prove that

$$\int_0^\infty U(s) p_n(t-s) ds = q_n(t).$$

But

$$\int_0^\infty U(s) p_n(t-s) ds = \sum_{k=0}^{n} \int_0^\infty (t-s)^k U(s) x_k ds.$$

The integration by parts k times, taking into account the exponential stability of $\{U(t)\}_{t\geq 0}$, makes possible to conclude that

$$\int_0^\infty (t-s)^k U(s) x_k ds = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} t^{k-i} A^{-(i+1)} x_k.$$

It follows from this equality that $\int\limits_0^\infty U(s) p_n(t-s) ds$ is a polynomial:

$$\int_0^\infty U(s) p_n(t-s) ds = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \frac{k!}{j!} t^j A^{k-j+1} x_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(k+i)!}{k!} A^{-(i+1)} x_{k+i} = \sum_{k=0}^{n} t^k a_k = q_n(t).$$

$\square$

Corollary 1. *Suppose that in the problem* (1),(2), $f(t) = x_0 + t x_1$, $(x_0, x_1 \in \mathfrak{B})$. *Then its solution* $u(t)$ *can be represented in the form*

$$u(t) = U(t) y_0 + (I - U(t)) A^{-1} x_0 + (tA - I + U(t)) A^{-2} x_1. \tag{6}$$

The proof follows from Lemma3 if it is taken into account that in the case under consideration $g(t) \equiv 0$ and $n = 1$.

Theorem 1. *For arbitrary $t_1 > 0$, $y_0 \in \mathfrak{B}$, $y_i \in \mathcal{D}(A) (i = 1, 2)$, there exists a unique function $f(t)$ of the form $f(t) = x_0 + tx_1$ such that the solution $u(t)$ of problem (1),(2) with this function on the right-hand side of (1) satisfies the conditions*

$$u(0) = y_0,\ u(t_1) = y_1,\ \lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{t} = y_2. \tag{7}$$

Proof. We shall seek vectors x_0 and x_1 for the solution $u(t)$ of problem (1),(2) with $f(t) = x_0 + tx_1$ to satisfy the relations (7). Because of (6),

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(t)y_0}{t} + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}(I - U(t))A^{-1}x_0 + \lim_{t\to\infty} \left(A - \frac{I - U(t)}{t}\right) A^{-2}x_1 = A^{-1}x_1.$$

Thus, $x_1 = Ay_2$. The representation (6) for $t = t_1$ implies also the equality

$$(I - U(t_1))A^{-1}x_0 = y_1 - U(t_1)y_0 - (t_1A - I + U(t_1))A^{-1}y_2.$$

By Lemma1, there exists a bounded operator $(I - U(t_1))^{-1}$. Therefore,

$$x_0 = (I - U(t_1))^{-1}(Ay_1 - AU(t_1)y_0 - (t_1A - I + U(t_1))y_2).$$

So, a function $f(t)$ of the desired form is found. Its uniqueness follows from the uniqueness of searching procedure for x_0 and x_1. □

Theorem 2. *Assume that $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ is a Hilbert space with scalar product $(\cdot,\cdot)$, and let A be a positive definite selfadjoint operator in it (so, $(Ax, x) \geq \varepsilon(x, x)$ for an arbitrary $x \in \mathcal{D}(A)$ and some $\varepsilon > 0$). Then for any $t_2 > t_1 > 0, y_0 \in \mathfrak{H}$ and $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(A)$, there exists a unique function $f(t)$ of the form $f(t) = x_0 + tx_1$ $(x_0, x_1 \in \mathfrak{H})$, such that the solution $u(t)$ of problem (1),(2) with this function satisfies the conditions*

$$u(0) = y_0,\ u(t_i) = y_i,\ i = 1, 2. \tag{8}$$

Proof. As in the previous theorem, we seek x_0 and x_1 so that for the solution $u(t)$ of problem (1),(2) with $f(t) = x_0 + tx_1$ (by virtue of Corollary1, it can be represented in the form (6)), to satisfy (8), i.e.

$$(I - U(t_i))A^{-1}x_0 + (t_iA - (I - U(t_i)))A^{-2}x_1 = y_i - U(t_i)y_0\ (i = 1, 2). \tag{9}$$

Applying to both sides of these equalities the operators $I - U(t_2)$ and $I - U(t_1)$ respectively and subtracting the second equality from the first one, we obtain

$$(t_1(I-U(t_2))-t_2(I-U(t_1)))x_1 = (I-U(t_2))(Ay_1-AU(t_1)y_0)-(I-U(t_1))(Ay_2-AU(t_2)y_0). \tag{10}$$

Since

$$U(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\lambda t} dE_\lambda$$

(E_λ is the resolution of identity of A), we have

$$t_1(I - U(t_2)) - t_2(I - U(t_1)) = \varphi(A) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(\lambda) dE_\lambda,$$

where the function $\varphi(\lambda) = t_1(1 - e^{-\lambda t_2}) - t_2(1 - e^{-\lambda t_1})$ is such that

$$\varphi(0) = 0, \ \lim_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda) = t_1 - t_2 < 0, \ \varphi'(\lambda) = t_1 t_2 \left(e^{-\lambda t_2} - e^{-\lambda t_1}\right) < 0.$$

Then the function $\frac{1}{\varphi(\lambda)}$ is bounded on $[\varepsilon, \infty)$, and the operator $(\varphi(A))^{-1}$ (the function $(\varphi(\lambda))^{-1}$ of the operator A) is bounded on $\mathfrak{H}$. Applying it to both sides of (10), we arrive at the equality

$$x_1 = (\varphi(A))^{-1}((I - U(t_2))(Ay_1 - AU(t_1)y_0) - (I - U(t_1))(Ay_2 - AU(t_2)y_0)).$$

Taking into account that, by Lemma1, the operator $(I - U(t_1))^{-1}$ exists and it is defined on the whole $\mathfrak{H}$, we can find x_0 from (9). Namely,

$$x_0 = (I - U(t_1))^{-1}(Ay_1 - AU(t_1)y_0 - (t_1 A - (I - U(t_1)))A^{-1}x_1).$$

The uniqueness of a function $f(t)$ of the form mentioned above, which guarantees fulfilment of the conditions (8), follows from the construction itself of x_0 and x_1. $\square$

REFERENCES

[**1**] Hille E. Functional Analysis and Semi-groups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 31, New York, 1948.

[**2**] Yosida K. Functional Analysis. Springer, Berlin-Góttingen-Heidelberg, 1965.

[**3**] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, New York, 1983.

[**4**] Ball J.M.*Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula*. Proc. Amer. Math. Soc.1977,**63** (2), 370–373.

[**5**] Vasiliev V.V., Krein S.G., and Piskaryov *Semigroups of operators, cosine operator functions, and linear differential equations*. Itogi Nauki i Techniki, Ser. Math.,Math. Anal. 1990, **28**, 87–201.

[**6**] Krein S.G. Linear Differential Equations in Banach Space. Amer. Math. Soc. Providence RI, 1971.

[**7**] Goldstein J. Semigroups of Linear Operators and Applications. Oxford University Press, New York, 1985.

[**8**] Gorbachuk V.M and Matsishyn J.T. *On solutions of evolution equations with degeneration in a Banach space*. Spectral theory of operator differential equations. Institute of Mathematics of Academy of Sci.of USSR, Kyiv, 1986 , 5-10.

Received 09.12.2022

Горбачук В.М. *Про розв'язки неоднорідної задачі Коші для диференціального рівняння параболічного типу у банаховому просторі* // Буковинський матем. журнал — 2022. — Т.10, №2. — С. 20–27.

Для диференціального рівняння вигляду $u'(t)+Au(t) = f(t), t \in (0,\infty)$, де A – інфінітезімальний генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи лінійних операторів у банаховому просторі $\mathfrak{B}$, $f(t)$ – $\mathfrak{B}$-значний поліном, досліджується поведінка у наперед заданих точках розв'язків задачі Коші в залежності від $f(t)$.

Khoma M.V., Buhrii O.M.

STOKES SYSTEM WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Some nonlinear Stokes system is considered. The initial-boundary value problem for the system is investigated and the existence and uniqueness of the weak solution for the problem is proved.

Key words and phrases: evolution Stokes system, initial-boundary value problem, weak solution.

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine (Khoma M.V.)
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine (Buhrii O.M.)
e-mail: *mariana.khoma@lnu.edu.ua (Khoma M.V.), oleh.buhrii@lnu.edu.ua (Buhrii O.M.)*

Introduction

Let $n \in \mathbb{N}$ and $T > 0$ be fixed numbers, $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with the Lipschitz boundary $\partial\Omega$, $Q_{0,T} := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_{0,T} := \partial\Omega \times (0,T)$, $\Omega_\tau := \{(x,t) \mid x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$. We seek a weak solution $\{u, \pi\}$ of the problem

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(x,t)u_{x_i}\Big)_{x_j} + G(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u + \nabla\pi(x,t) = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x,t)\, dx = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Here $u = (u_1, \dots, u_n) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$ is the velocity field, $|u| = (|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2)^{1/2}$, $\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$, $\pi : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ is the pressure, $\nabla\pi = (\frac{\partial \pi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial x_n})$, and $q(x,t)$ is the variable exponent of the nonlinearity of system (1).

The linearized version of the Navier-Stokes system is called the Stokes system. It is well known that these equations describe the time evolution of the solutions to the mathematical

УДК 517.95
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55, 35D30, 76D07, 47G20.

models of the viscous incompressible fluids. For more details about the physical meaning of the Navier-Stokes and Stokes systems see [1], [2], etc. The initial-boundary value problem for the Stokes system are considered in [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10] (see also the references given there).

We perturb the classical Stokes equations by the monotonous nonlinear term with the exponent of the nonlinearity $q = q(x,t)$. This exponent is Lipschitz continuous function only with respect to the time variable t. We seek a weak solution to the initial-boundary value problem (1)-(5). As we know this problem is not studied yet. The paper is organized as follows. In Section 1, we formulate the considered problem and main results. The auxiliary statements are given in Section 2. Finally, in Section 3 we prove the main results.

1 Statement of problem and formulation of main results

Let $||\cdot||_B \equiv ||\cdot;B||$ be a norm of some Banach space B, B^* be a dual space, $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$ be a scalar product between B^* and B, $B^n := B\times\ldots\times B$ be n-th Cartesian product of the B, $||z;B^n|| := ||z_1||_B + \ldots + ||z_n||_B$ for $z = (z_1,\ldots,z_n) \in B^n$, $(\cdot,\cdot)_H$ be a scalar product in some Hilbert space H, $|\cdot|_H := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$.

Suppose that $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}$ is a measurable set in $\mathbb{R}^N$ (for example, $\mathcal{O} = \Omega$ or $\mathcal{O} = Q_{0,T}$), $\mathcal{B}_+(\mathcal{O}) := \{\mathfrak{q} \in L^\infty(\mathcal{O}) \mid \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y) > 0\}$. For every $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$, by definition, put

$$\mathfrak{q}_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \quad \mathfrak{q}^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \qquad \mathfrak{q}'(y) := \frac{\mathfrak{q}(y)}{\mathfrak{q}(y)-1} \ \text{ for a.e. } \ y \in \mathcal{O} \quad ,$$

$$\rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O}) := \int\limits_{\mathcal{O}} |v(y)|^{\mathfrak{q}(y)}\, dy, \quad v : \mathcal{O} \to \mathbb{R}.$$

Assume that $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ and $\mathfrak{q}_0 > 1$. The set $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O}) := \{v : \mathcal{O} \to \mathbb{R} \mid \rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O}) < +\infty\}$ with the Luxemburg norm $||v;L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})|| := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{\mathfrak{q}}(v/\lambda;\mathcal{O}) \le 1\}$ is called a generalized Lebesgue space. It is well known that $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ is the Banach space which is reflexive and separable.

Let $\Lambda_t(Q_{0,T})$ be a set of the functions $q : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ for which there exists an extension outside $Q_{0,T}$ (we denote it q again) such that the following conditions are satisfied:
(i) $q \in C(\mathbb{R}_t; L^\infty(\mathbb{R}^n_x)) \cap \mathcal{B}_+(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$; (ii) $q_0 > 1$; (iii) there exists a constant $L > 0$ such that

$$|q(x,t) - q(x,s)| \le L|t-s|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

For the sake of convenience we shall write $u(t)$ instead of $u(\cdot,t)$ and $L^p(0,T)$ instead of $L^p((0,T))$ etc. Let us consider the set of the solenoidal functions (functions for which the incompressibility constraint $\operatorname{div} u = 0$ holds) $C_{\mathrm{div}} := \{u \in [D(\Omega)]^n \mid \operatorname{div} u = 0\}$. Here $u = (u_1,\ldots,u_n)$ and $\operatorname{div} u := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$. Let $r \in [1,+\infty)$, $s \in \mathbb{N}$,

$$X_r \ \text{ is a closure of } \ C_{\mathrm{div}} \ \text{ in } \ [L^r(\Omega)]^n, \qquad H := X_2, \tag{6}$$

$$Z_s \ \text{ is a closure of } \ C_{\mathrm{div}} \ \text{ in } \ [H^s_0(\Omega)]^n. \tag{7}$$

Take a function $q \in \Lambda_t\,(Q_{0,T})$ and denote

$$V^t := Z_1 \cap [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n \quad \text{for every} \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$U(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n, \tag{9}$$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{div}} := \{u \in [D(Q_{0,T})]^n \quad | \quad \mathrm{div}\, u = 0\}. \tag{10}$$

Since Z_1 and $[L^{q(x,t)}(\Omega)]^n$ are continuously embedded in the locally convex space $[L^1(\Omega)]^n$ (see [11, c. 17]), from Remark 5.12 [11, c. 22], we get that, V^t is Banach space with standard norm for the intersection of the spaces. Easy to show, that V^t is reflexive and separable. We will make similar consideration for the space $U(Q_{0,T})$. We also consider the space

$$W(Q_{0,T}) := \{u \in U(Q_{0,T}) \quad | \quad u_t \in [U(Q_{0,T})]^*\}$$

with the norm $||u; W(Q_{0,T})|| := ||u; U(Q_{0,T})|| + ||u_t; [U(Q_{0,T})]^*||$. The notation u_t stands for the distributional time derivative which is defined by the rule

$$\langle u_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}_{\mathrm{div}}} := -\int\limits_{Q_{0,T}} u(x,t)\varphi_t(x,t)\, dxdt \quad \text{for} \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathrm{div}}. \tag{11}$$

Assume that the following conditions are fulfilled.

(A): A_{ij} are n-order square matrix with the elements from $L^\infty(Q_{0,T})$; $A_{ij} = A_{ji}$ $(i,j = \overline{1,n})$; for a.e. $(x,t) \in Q_{0,T}$ and for every $\xi^1, \dots, \xi^n \in \mathbb{R}^n$, we get

$$a_0 \sum_{i=1}^n |\xi^i|^2 \le \sum_{i,j=1}^n \Big(A_{ij}(x,t)\xi^i, \xi^j\Big)_{\mathbb{R}^n} \le a^0 \sum_{i=1}^n |\xi^i|^2 \quad (0 < a_0 \le a^0 < +\infty);$$

(G): G is n-order square matrix, $G = diag(g_1, \dots, g_n)$, $g_l \in L^\infty(Q_{0,T})$, and $0 < g_0 \le g_l(x,t) \le g^0 < +\infty$ for a.e. $(x,t) \in Q_{0,T}$, where $l = \overline{1,n}$;

(F): $F \in L^2(0,T;H)$;

(U): $u_0 \in H$.

We define the operators $A(t) : V^t \to [V^t]^*$, $\mathcal{A} : U(Q_{0,T}) \to [U(Q_{0,T})]^*$ by the rules

$$\langle A(t)z, w \rangle_{V^t} := \int\limits_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^n \Big(A_{ij}(x,t) z_{x_i}(x), w_{x_j}(x)\Big)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+\Big(G(x,t)|z(x)|^{q(x,t)-2} z(x), w(x)\Big)_{\mathbb{R}^n}\Big]\, dx, \quad z, w \in V^t, \quad t \in (0,T), \tag{12}$$

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle_{U(Q_{0,T})} := \int\limits_0^T \langle A(t)u(t), v(t) \rangle_{V^t}\, dt, \quad u, v \in U(Q_{0,T}), \tag{13}$$

Suppose that

$$h := \min\Big\{2, \frac{q^0}{q^0 - 1}\Big\}. \tag{14}$$

Let $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ be a scalar product in the space $\mathbb{R}^n$,

$$(u,v)_\Omega := \int\limits_\Omega (u(x), v(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx, \quad u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n. \tag{15}$$

Definition 1. *The pair of the functions $\{u, \pi\}$ is called a weak solution of problem (1)-(5), if $u \in W(Q_{0,T}) \cap L^{\infty}(0,T;H)$, $\pi \in L^{h}(Q_{0,T})$, u satisfies (5) in H,*

$$\langle u_t + \mathcal{A}u, z\rangle_{U(Q_{0,T})} = \int\limits_0^T (F(t), z(t))_{\Omega}\, dt \tag{16}$$

holds for $z \in U(Q_{0,T})$, π satisfies (1) in $\mathcal{D}^*_{div}$, and π satisfies (3) in $D^*(0,T)$.

Theorem 1 (existence)**.** *Let $q \in \Lambda_t(Q_{0,T})$, conditions **(A)-(U)** hold. Then problem (1)-(5) has a weak solution $\{u, \pi\}$. Moreover, $u \in C([0,T];H)$.*

Theorem 2 (uniqueness)**.** *Let $q \in \Lambda_t(Q_{0,T})$, conditions **(A)-(G)** hold. Then, problem (1)-(5) can't have more the one weak solution.*

2 Auxiliary statements

For the Banach spaces X and Y the notation $X \circlearrowleft Y$ means the continuous embedding; the notation $X \bar{\circlearrowleft} Y$ means the continuous and densely embedding; the notation $X \overset{K}{\subset} Y$ means the compact embedding.

2.1 Projection operator

Suppose that H and Z_s are determined from (6) and (7) respectively, where $s \in \mathbb{N}$. From [12, Ch. 1, §6.1], we obtain the embeddings

$$Z_s \bar{\circlearrowleft} Z_1 \bar{\circlearrowleft} H \cong H^* \bar{\circlearrowleft} Z_1^* \bar{\circlearrowleft} Z_s^*.$$

Moreover, $Z_s \subset [H_0^s(\Omega)]^n$ and $Z_s \overset{K}{\subset} H$. Let w^{μ}, $\mu \in \mathbb{N}$, be eigenfunctions (associated to the eigenvalues $\lambda_{\mu} > 0$) of the spectral problem

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=s} (D^{\alpha} w^{\mu}, D^{\alpha} v)_{\mathbb{R}^n}\, dx = \lambda_{\mu} \int\limits_{\Omega} (w^{\mu}, v)_{\mathbb{R}^n}\, dx \qquad \forall\, v \in Z_s. \tag{17}$$

For the sake of convenience we have assumed that $\{w^{\mu}\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ is an orthonormal set in H.

Proposition 1. *(see [12, Ch. 1, §6.3]). If $s \in \mathbb{N}$ and $s \geq \frac{n}{2}$, then the set $\{w^{\mu}\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ of all eigenfunctions of problem (17) is a basis for the space Z_s.*

Let $m \in \mathbb{N}$ be a fixed number, and $\mathfrak{M}$ be a set of all linear combinations of the elements from $\{w^1, \ldots, w^m\}$. Define an unique orthogonal projection $P_m : H \to \mathfrak{M}$ by the rule (see [13, p. 527])

$$P_m h := \sum_{j=1}^{m} (h, w^j)_H\, w^j, \quad h \in H. \tag{18}$$

Since $\{w^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V} \equiv Z_s$, $s \in \mathbb{N}$, then let us define an operator $\widehat{P}_m : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ by the rule

$$\widehat{P}_m v := P_m v \quad \text{for every} \quad v \in \mathcal{V}. \tag{19}$$

For a conjugate operator $\widehat{P}_m^* : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}^*$ we have $\widehat{P}_m^*(\mathcal{V}^*) \subset \mathcal{V}$ (see [14, p. 865]).

Proposition 2. *(see Lemma 3.9 [14, p. 865-866]). If* $\psi_1^m, \ldots, \psi_m^m \in \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{V}^*$. *and* $z^m := \sum\limits_{s=1}^{m} \psi_s^m w^s \in \mathcal{V}$ *satisfies*

$$\begin{cases} \langle z^m, w^1 \rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, w^1 \rangle_{\mathcal{V}}, \\ \quad \vdots \\ \langle z^m, w^m \rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, w^m \rangle_{\mathcal{V}}, \end{cases}$$

then the following equality is satisfied $z^m = \widehat{P}_m^* F \quad \text{in} \quad \mathcal{V}^*$.

Proposition 3. *(see Lemma 1 [10, p. 111]). Suppose that* P_m *and* $\widehat{P}_m$ *are determined from (18) and (19) respectively, where* $\mathcal{V} = Z_s$, $s \in \mathbb{N}$, *and* $\{w^\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ *is an orthonormal basis for the space* H *that consists of all eigenfunctions of problem (17). Then, for every* $w \in L^r(0,T; Z_s^*)$ *and* $r > 1$, *we have the inequality*

$$||\widehat{P}_m^* w; L^r(0,T; Z_s^*)|| \leq ||w; L^r(0,T; Z_s^*)||. \tag{20}$$

2.2 Cauchy's problem for system of ordinary differential equations

Take $\ell \in \mathbb{N}$ and $Q = (0,T) \times \mathbb{R}^\ell$. In this section we seek a weak solution $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}^\ell$ of the problem

$$\varphi'(t) + L(t, \varphi(t)) = M(t), \quad t \in [0,T], \qquad \varphi(0) = \varphi^0, \tag{21}$$

where $M : [0,T] \to \mathbb{R}^\ell$ and $L : Q \to \mathbb{R}^\ell$ are some functions (for the sake of convenience we have assumed that $L(t,0) = 0$ for every $t \in [0,T]$), and $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_\ell^0) \in \mathbb{R}^\ell$.

Definition 2. *We shall say that a function* $L : Q \to \mathbb{R}^\ell$ *satisfies the Carathéodory condition if for every* $\xi \in \mathbb{R}^\ell$ *the function* $(0,T) \ni t \mapsto L(t,\xi) \in \mathbb{R}^\ell$ *is measurable and if for a.e.* $t \in (0,T)$ *the function* $\mathbb{R}^\ell \ni \xi \mapsto L(t,\xi) \in \mathbb{R}^\ell$ *is continuous.*

Definition 3. *We shall say that a function* $L : Q \to \mathbb{R}^\ell$ *satisfies the* L^p*-Carathéodory condition if* L *satisfies the Carathéodory condition and for every* $R > 0$ *there exists a function* $h_R \in L^p(0,T)$ *such that*

$$|L(t,\xi)| \leq h_R(t)$$

for a.e. $t \in (0,T)$ *and for every* $\xi \in \overline{D_R} := \{y \in \mathbb{R}^\ell \mid \ |y| \leq R\}$.

Lemma 1. *Suppose that* $q \in \Lambda_t(Q_{0,T})$, *condition* ***(G)*** *holds,* $m \in \mathbb{N}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, $w^1, \ldots, w^m \in L^{q^0}(\Omega)$, $w(x,\xi) = \sum\limits_{l=1}^{m} \xi_l w^l(x)$, *and* $z \in [L^{q^0}(\Omega)]^n$. *Then the function*

$$I(t,\xi) := \int\limits_\Omega \big(G(x,t)|w(x,\xi)|^{q(x,t)-2} w(x,\xi), z(x)\big)_{\mathbb{R}^n} \, dx, \quad t \in (0,T), \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

satisfies the L^∞*-Carathéodory condition.*

Proof. We use the methods of Lemma 3.25 [14, p. 874]).

Step 1. Since

$$|w|^{q(x,t)-1}\cdot|z|\le C_1\Big(|z|^{q^0}+|w|^{\frac{q(x,t)-1}{q^0-1}q^0}\Big)\le C_2\Big(|z|^{q^0}+|w|^{q^0}+1\Big), \tag{22}$$

the Fubini Theorem [15, p. 91] yields that $I(\cdot,\xi)\in L^1(0,T)$. Then $[0,T]\ni t\mapsto I(t,\xi)\in\mathbb{R}$ is the measurable function.

Step 2. Let us prove that the function $\mathbb{R}\ni\xi_1\mapsto I(t,\xi_1,\dots,\xi_m)\in\mathbb{R}$ is continuous at the point $\xi_1^0\in\mathbb{R}$. Take $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)$, $\xi^0=(\xi_1^0,\xi_2,\dots,\xi_m)$, where $|\xi-\xi^0|\le 1$.

By Theorem 2.1 [16, p. 2], we get

$$\big|\,|\eta_1|^{q(x,t)-2}\eta_1-|\eta_2|^{q(x,t)-2}\eta_2\big|\le C_3(|\eta_1|+|\eta_2|)^{q(x,t)-1-\beta(x,t)}|\eta_1-\eta_2|^{\beta(x,t)},$$

where $0<\beta(x,t)\le\min\{1,q(x,t)-1\}$, $\eta_1,\eta_2\in\mathbb{R}$, $C_3>0$ is independent of η_1,η_2,x,t. Hence,

$$\begin{aligned}|I(t,\xi)-I(t,\xi^0)|&=\Big|\int_\Omega\Big(G\Big(|w(x,\xi)|^{q(x,t)-2}w(x,\xi)-|w(x,\xi^0)|^{q(x,t)-2}w(x,\xi^0)\Big),z\Big)_{\mathbb{R}^n}\,dx\Big|\le\\&\le C_4\int_\Omega\big(|w(x,\xi)|+|w(x,\xi^0)|\big)^{q(x,t)-1-\beta(x,t)}|w(x,\xi)-w(x,\xi^0)|^{\beta(x,t)}|z|\,dx=\\&=C_4(I_1(t)+I_2(t)),\end{aligned}\tag{23}$$

where $I_1(t):=\int_{\Omega_1(t)}h(x,t,\xi,\xi^0)\,dx$, $I_2(t)=\int_{\Omega_2(t)}h(x,t,\xi,\xi^0)\,dx$,
$\Omega_1(t)=\{x\in\Omega\mid q(x,t)\le 2\}$, $\Omega_2(t)=\{x\in\Omega\mid\ q(x,t)>2\}$, and

$$h(x,t,\xi,\xi^0)=\big(|w(x,\xi)|+|w(x,\xi^0)|\big)^{q(x,t)-1-\beta(x,t)}|w(x,\xi)-w(x,\xi^0)|^{\beta(x,t)}|z(x)|,\quad x\in\Omega.$$

Taking $\beta(x,t)=q(x,t)-1$, $x\in\Omega_1(t)$, gives (see also (22))

$$\begin{aligned}I_1(t)&=\int_{\Omega_1(t)}|w(x,\xi)-w(x,\xi^0)|^{q(x,t)-1}|z(x)|\,dx=\int_{\Omega_1(t)}|\xi_1-\xi_1^0|^{q(x,t)-1}|w^1(x)|^{q(x,t)-1}|z(x)|\,dx\le\\&\le|\xi_1-\xi_1^0|^{q_0-1}\int_{\Omega_1(t)}|w^1(x)|^{q(x,t)-1}|z(x)|\,dx=C_5|\xi_1-\xi_1^0|^{q_0-1}\underset{\xi_1\to\xi_1^0}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

Taking $\beta(x,t)=1$, $x\in\Omega_2$, gives

$$\begin{aligned}I_2(t)&=\int_{\Omega_2(t)}\big(|w(x,\xi)|+|w(x,\xi^0)|\big)^{q(x,t)-2}|w(x,\xi)-w(x,\xi^0)|\cdot|z(x)|\,dx=\\&=|\xi_1-\xi_1^0|\int_{\Omega_2(t)}\big(|w(x,\xi)|+|w(x,\xi^0)|\big)^{q(x,t)-2}|w^1(x)|\cdot|z(x)|\,dx\le C_6(\xi_1^0)|\xi_1-\xi_1^0|\underset{\xi_1\to\xi_1^0}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

Therefore, by (23), we obtain that $|I(t,\xi)-I(t,\xi^0)|\underset{\xi_1\to\xi_1^0}{\longrightarrow}0$. Continuing in the same way, we see that I is continuous with respect to $\xi_2,\dots,\xi_m$.

Step 3. Taking into account the results of Step 1 and Step 2, we obtain that the function I satisfies the Carathéodory condition. Since $g\in L^\infty(Q_{0,T})$, the L^∞-Carathéodory condition holds. $\square$

Proposition 4. *(the Carathéodory-LaSalle theorem, see Theorem 3.24 [14, p. 872]). Suppose that $p \geq 2$, function $L : Q \to \mathbb{R}^\ell$ satisfies L^p-Carathéodory condition, $M \in L^p(0,T;\mathbb{R}^\ell)$, and $\varphi^0 \in \mathbb{R}^\ell$. If there exist nonnegative functions $\alpha, \beta \in L^1(0,T)$ such that for every $\xi \in \mathbb{R}^\ell$ and for a.e. $t \in [0,T]$ the inequality*

$$(L(t,\xi),\xi)_{\mathbb{R}^\ell} \geq -\alpha(t)|\xi|^2 - \beta(t) \tag{24}$$

holds, then problem (21) has a global weak solution $\varphi \in W^{1,p}(0,T;\mathbb{R}^\ell)$.

2.3 Additional statements

Let $\mathbb{Z}_{\geq -1} := \{s \in \mathbb{Z} \mid s \geq -1\}$. The following Propositions are needed for the sequel.

Proposition 5. *(the generalized De Rham theorem, see Theorem 4.1 [17], Remark 4.3 [17], and Lemma 2 [18]). Suppose that Ω be an open bounded connected and Lipschitz subset of $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$, $h_1, h_2 \in [1,\infty]$, and $\mathcal{F} \in W^{s_1,h_1}(0,T;[W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n)$. Then, if*

$$\langle \mathcal{F}(\cdot), v\rangle_{[D(\Omega)]^n} = 0 \quad in \quad D^*(0,T) \tag{25}$$

for all $v \in C_{\text{div}}$, then there exists an unique

$$\pi \in W^{s_1,h_1}(0,T;W^{s_2+1,h_2}(\Omega)) \tag{26}$$

such that

$$\nabla\pi = \mathcal{F} \quad in \quad [D^*(Q_{0,T})]^n, \tag{27}$$

$$\int_\Omega \pi(\cdot)\, dx = 0 \quad in \quad D^*(0,T). \tag{28}$$

Moreover, there exists a positive number C_7 (independent of $\mathcal{F}, \pi$) such that

$$||\pi; W^{s_1,h_1}(0,T;W^{s_2+1,h_2}(\Omega))|| \leq C_7||\mathcal{F}; W^{s_1,h_1}(0,T;[W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n)||. \tag{29}$$

Proposition 6. *(the Aubin theorem, see [19] and [20, p. 393]). If $s, h \in (1,\infty)$ are fixed numbers, $\mathcal{W}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$ are the Banach spaces, and $\mathcal{W} \overset{K}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$, then*

$$\{u \in L^s(0,T;\mathcal{W}) \mid u_t \in L^h(0,T;\mathcal{B})\} \overset{K}{\subset} [L^s(0,T;\mathcal{L}) \cap C([0,T];\mathcal{B})].$$

Proposition 7. *(Lemma 1.18 [11, p. 39]). If $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ in $L^p(Q_{0,T})$ $(1 \leq p \leq \infty)$, then there exists a subsequence (we call it $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ again) such that $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ a.e. in $Q_{0,T}$.*

Proposition 8. *(Theorem 1 [21, p. 108]). If $q \in \Lambda_t(Q_{0,T})$, then for every $u \in W(Q_{0,T})$ we have that $u \in C([0,T];H)$ and the following formula of integration by parts is true*

$$\langle u_t, \chi_{t_1,t_2} u\rangle_{U(Q_{0,T})} = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t_2)|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t_1)|^2\, dx, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T, \tag{30}$$

where

$$\chi_{t_1,t_2}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_1,t_2]; \\ 0, & t \notin [t_1,t_2]. \end{cases} \tag{31}$$

It's clear that if $u = (u_1, \dots, u_n) \in [L^2(\mathcal{O})]^n$, where $\mathcal{O} = \Omega$ or $\mathcal{O} = Q_{0,T}$, then

$$|| \, |u|; L^2(\mathcal{O})||^2 = \int\limits_{\mathcal{O}} |u|^2 \, dy = \sum_{l=1}^{n} ||u_l; L^2(\mathcal{O})||^2 \le n||u; [L^2(\mathcal{O})]^n||^2,$$

and so $|| \, |u|; L^2(\mathcal{O})|| \le \sqrt{n}||u; [L^2(\mathcal{O})]^n||$.

Lemma 2. *Let conditions **(A)**-**(G)** hold, $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset V^t$, $m \in \mathbb{N}$, $L = (L_1, L_2, \dots, L_m)$,*

$$L_\mu(t, \xi) = \langle A(t)z^m, w^\mu\rangle_{V^t}, \quad \mu = \overline{1, m}, \quad t \in (0, T), \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

and $z^m(x) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \xi_\mu w^\mu(x)$ for $x \in \Omega$. Then

$$\Big(L(t, \xi), \xi\Big)_{\mathbb{R}^m} \ge \int\limits_{\Omega} \Big[a_0 \sum_{i=1}^{n} |z^m_{x_i}|^2 + g_0|z^m|^{q(x,t)}\Big] \, dx, \quad t \in (0, T), \quad \xi \in \mathbb{R}^m. \tag{32}$$

Proof. It's clear that

$$(L(t, \xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} = \langle A(t)z^m, z^m\rangle_{V^t}. \tag{33}$$

Using condition **(A)**, we get the following estimate:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}u^m_{x_i}, u^m_{x_j}\Big)_{\mathbb{R}^n} \ge a_0 \sum_{i=1}^{n} |u^m_{x_i}|^2. \tag{34}$$

It follows from condition **(G)** that

$$\Big(G|u^m|^{q(x,t)-2}u^m, u^m\Big)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{l=1}^{n} g_l(x, t)|u^m|^{q(x,t)-2}|u^m_l|^2 \ge$$

$$\ge g_0 \sum_{l=1}^{n} |u^m|^{q(x,t)-2}|u^m_l|^2 = g_0|u^m|^{q(x,t)}. \tag{35}$$

If we use conditions **(A)** and **(G)**, then we get

$$\langle A(t)z^m, z^m\rangle_{V^t} = \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(x, t)z^m_{x_i}(x), z^m_{x_j}(x)\Big)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+\Big(G(x, t)|z^m(x)|^{q(x,t)-2}z^m(x), z^m(x)\Big)_{\mathbb{R}^n}\Big] \, dx \ge \int\limits_{\Omega} \Big[a_0 \sum_{i=1}^{n} |z^m_{x_i}|^2 + g_0|z^m|^{q(x)}\Big] \, dx. \tag{36}$$

Thus, (33)-(36) imply that (32) holds. $\square$

3 Proofs of main results

Proof of Theorem 1. The solution will be constructed via Faedo-Galerkin's method. Let $r_- = \min\{2, q_0\}$, $r_+ = \max\{2, q^0\}$, $r'_- = \frac{r_-}{r_- - 1}$, $r'_+ = \frac{r_+}{r_+ - 1}$,

$$V_+ := Z_1 \cap [L^{q^0}(\Omega)]^n, \quad V_- := Z_1 \cap [L^{q_0}(\Omega)]^n \tag{37}$$

(see notation (7)). Note that

$$C_{\mathrm{div}} \bar{\circlearrowleft} V_+ \bar{\circlearrowleft} V^t \bar{\circlearrowleft} V_- \bar{\circlearrowleft} H \bar{\circlearrowleft} V_-^* \bar{\circlearrowleft} [V^t]^* \bar{\circlearrowleft} V_+^*, \quad t \in [0, T], \tag{38}$$

$$L^{r_+}(0, T; V_+) \bar{\circlearrowleft} U(Q_{0,T}) \bar{\circlearrowleft} L^{r_-}(0, T; V_-) \bar{\circlearrowleft} L^1(0, T; V_+^*), \tag{39}$$

$$L^{r'_-}(0, T; V_-^*) \bar{\circlearrowleft} [U(Q_{0,T})]^* \bar{\circlearrowleft} L^{r'_+}(0, T; V_+^*) \bar{\circlearrowleft} L^1(0, T; V_+^*). \tag{40}$$

Thus, the elements from $U(Q_{0,T})$ and $[U(Q_{0,T})]^*$ are distributions on $(0, T)$ with value in V_+^*. Then, similarly to Proposition 2.6.2 [22, p. 58], for $u \in W(Q_{0,T})$ we have that u_t (see (11)) is the distributional derivative in sense of the set of functions on $(0, T)$ with value in $V_+^* + [L^1(\Omega)]^n$. Let

$$s \in \mathbb{N}, \quad s \geq \max\Big\{2, \ \frac{n}{2}, \ n\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q^0}\Big)\Big\}. \tag{41}$$

Note that (41) implies that $Z_s \bar{\circlearrowleft} V_+ \bar{\circlearrowleft} V^t$.

<u>Step 1</u> (construction of approximation). Let $\{w^\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ is taken from Proposition 1, $s \in \mathbb{N}$ satisfies (41). By definition, put

$$u^m(x, t) := \sum_{\mu=1}^{m} \varphi_\mu^m(t) w^\mu(x), \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \quad m \in \mathbb{N},$$

where the unknown function $\varphi := (\varphi_1^m, \ldots, \varphi_m^m)$ satisfies (see notation (12) and (15))

$$(u_t^m(t), w^\mu)_\Omega + \langle A(t) u^m(t), w^\mu \rangle_{V^t} = (F(t), w^\mu)_\Omega, \quad t \in (0, T), \quad \mu = \overline{1, m}, \tag{42}$$

$$\varphi_1^m(0) = \alpha_1^m, \quad \ldots, \quad \varphi_m^m(0) = \alpha_m^m. \tag{43}$$

Here the numbers $\alpha_1^m, \ldots, \alpha_m^m \in \mathbb{R}$ we choose such that $u_0^m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} u_0$ strongly in H, where $u_0^m(x) := \sum_{j=1}^m \alpha_j^m w^j(x), \quad x \in \Omega$. It's clear that (43) implies that

$$u^m(0) = u_0^m. \tag{44}$$

Let us show that the mentioned function φ exists. Let L be a vector-valued function from Lemma 2. Then Cauchy problem (42)-(43) takes form (21) if

$$M(t) = ((F(t), w^1)_\Omega, \ldots, (F(t), w^m)_\Omega), \quad t \in (0, T).$$

It follows from condition **(F)** that $M \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Conditions **(A)**-**(G)** and Lemma 1 yield that the function L satisfies the L^∞-Carathéodory condition. Using estimate (32), conditions $a_0 > 0$ and $g_0 > 0$, we receive $(L(t, \varphi^m), \varphi^m)_{\mathbb{R}^m} \geq 0$. Then estimate (24) with

$\alpha(t) \equiv 0$ and $\beta(t) \equiv 0$ holds, and from the Carathéodory-LaSalle theorem (see Proposition 4) we have the existence of the solution

$$\varphi \in W^{1,2}(0,T;\mathbb{R}^m) \tag{45}$$

of problem (21) and so problem (42)-(43).

Step 2 (first estimates). Multipling the μ-th equation of (42) by $\varphi_\mu^m(t)$ and summing over $\mu = \overline{1,m}$, we get

$$\sum_{\mu=1}^{m}\Big(u_t^m(t), w^\mu \varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega + \Big(L(t,\varphi^m(t)), \varphi^m(t)\Big)_{\mathbb{R}^m} = \sum_{\mu=1}^{m}\Big(F(t), w^\mu \varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega, \quad t \in (0,T).$$

After integrating for $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$ and some transformation, we receive

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} (u_t^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}\, dxdt + \int\limits_0^\tau \Big(L(t,\varphi^m), \varphi^m\Big)_{\mathbb{R}^m} dt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} (F, u^m)_{\mathbb{R}^n}\, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{46}$$

Using (44), (45), we obtain

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} (u_t^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(|u^m|^2)\, dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^m|^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_0^m|^2\, dx. \tag{47}$$

Clearly,

$$|(F,u^m)_{\mathbb{R}^n}| \le |F| \cdot |u^m| \le \frac{|F|^2}{2} + \frac{|u^m|^2}{2}. \tag{48}$$

Using (32), (47)-(48), from equality (46), we obtain the following estimate

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u^m(x,\tau)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a_0 \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^m|^2 + g_0 |u^m|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_0^m|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |F|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^2\, dxdt. \tag{49}$$

Take $y(t) := \int_\Omega |u^m(x,t)|^2\, dx, \quad t \in [0,T]$. Then, from (49), we get an estimate

$$\frac{1}{2}\, y(\tau) \le C_8 + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau y(t)\, dt, \quad \tau \in [0,T].$$

Therefore, the Gronwall lemma implies that $y(\tau) \le C_9$, and so

$$\int\limits_{\Omega} |u^m(x,\tau)|^2\, dx \le C_9, \quad \tau \in (0,T]. \tag{50}$$

It follows from (49) and (50) that

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^m|^2 + |u|^2 + |u|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt \le C_{10}, \quad \tau \in (0,T], \tag{51}$$

This estimate yields that

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big|G|u^m|^{q(x,t)-2}u^m\Big|^{q'(x,t)}\,dxdt \le C_{11}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^{q(x,t)}\,dxdt \le C_{12}. \tag{52}$$

From (50) and (51) it follows the estimates

$$||u^m; L^\infty(0,T,H)|| + ||u^m; U(Q_{0,T})|| \le C_{13}, \tag{53}$$

Here the constants $C_8, \ldots, C_{13}$ are independent of m.

By (52)-(53) we have existence of the subsequence $\{u^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ such that

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad * -\text{weakly in} \quad L^\infty(0,T;H) \quad \text{and weakly in} \quad U(Q_{0,T}),$$

$$G|u^m|^{q(x,t)-2}u^m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_1 \quad \text{weakly in} \quad [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n. \tag{54}$$

Step 3 (additional estimates). From (13) and (51) it follows an inequality

$$\langle \mathcal{A}u^m, v\rangle_{U(Q_{0,T})} = \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i,j=1}^n (A_{ij}u^m_{x_i}, v_{x_j})_{\mathbb{R}^n} + (G|u^m|^{q(x,t)-2}u^m, v)_{\mathbb{R}^n}\Big]\,dxdt \le$$

$$\le C_{14}\Big(||u^m; L^2(0,T;Z_1)||\cdot||v; L^2(0,T)Z_1)|| +$$

$$+ ||G|u^m|^{q(x,t)-2}u^m; [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n||\cdot||v; [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n||\Big) \le C_{15}||v; U(Q_{0,T})||$$

and so

$$||\mathcal{A}u^m; [U(Q_{0,T})]^*|| \le C_{16}. \tag{55}$$

Since s satisfies (41), from (39) and the construction of the space $U(Q_{0,T})$, we obtain

$$U(Q_{0,T}) \circlearrowleft L^2(0,T;H) \circlearrowleft [U(Q_{0,T})]^*, \tag{56}$$

$$L^{r_+}(0,T;Z_s) \circlearrowleft L^{r_+}(0,T;V_+) \circlearrowleft U(Q_{0,T}).$$

Therefore,

$$[U(Q_{0,T})]^* \circlearrowleft L^{r'_+}(0,T;Z_s^*). \tag{57}$$

Using (39) and (53), we obtain

$$||u^m; L^{r_-}(0,T;V_-)|| \le C_{17}||u; U(Q_{0,T})|| \le C_{18}. \tag{58}$$

Using Proposition 2 and notation (12)-(13) and (18)-(19), in same way as in [12, Ch. 1, §5.3], we rewrite (42) as

$$u^m_t = \widehat{P}^*_m(F - \mathcal{A}u^m).$$

Thus, from estimate (20), embeddings (57) and (56), and estimate (55), we get

$$||u^m_t; L^{r'_+}(0,T;Z_s^*)|| = ||\widehat{P}^*_m(F - \mathcal{A}u^m); L^{r'_+}(0,T;Z_s^*)|| \le$$

$$\leq ||F-\mathcal{A}u^m; L^{r'_+}(0,T;Z_s^*)|| \leq C_{19}||F-\mathcal{A}u^m;[U(Q_{0,T})]^*|| \leq$$

$$\leq C_{20}\Big(||F;L^2(0,T;H)||+||\mathcal{A}u^m;[U(Q_{0,T})]^*||\Big) \leq C_{21}. \tag{59}$$

Here the constant $C_{16},\dots,C_{21}>0$ are independent of m.

Since $V_- \overset{K}{\subset} H \circlearrowleft Z_s^*$, from (58), (59), the Aubin theorem (see Proposition 6), and Proposition 7, we obtain

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{in} \quad L^{r_-}(0,T;H)\cap C([0,T];Z_s^*) \quad \text{and a.e. in} \quad Q_{0,T}.$$

Therefore, (5) holds and $\chi_1 = G|u|^{q(x,t)-2}u$ (see (54)).

Step 4 (passing to the limit). Take $\psi \in C^1([0,T])$ such that $\psi(T)=0$. When we multiply equality (42) by $\psi(t)$, integrate for $t\in(0,T)$, and the first term integrate by parts. We obtain the following

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\Big(u^m,w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi_t+\sum_{i,j=1}^n\Big(A_{ij}u^m_{x_i},w^\mu_{x_j}\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi+\Big(G|u^m|^{q(x,t)-2}u^m,w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi\Big]\,dxdt+$$

$$=\int\limits_{\Omega}\Big(u_0^m,w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi(0)\,dx+\int\limits_{Q_{0,T}}\Big(F,w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi\,dxdt.$$

Taking $m=m_k$ and letting $k\to\infty$, thanks to arbitrariness of ψ, we get

$$\langle \mathcal{F}, z\rangle_{U(Q_{0,T})}=0 \qquad \forall\, z\in U(Q_{0,T}), \tag{60}$$

where $\mathcal{F}:=F-u_t-\mathcal{A}u$. Hence, $u_t\in[U(Q_{0,T})]^*$, (16) holds and $u\in C([0,T];H)$. Taking $z(x,t)=w(x)\varphi(t)$, $x\in\Omega$, $t\in(0,T)$, from (60), we obtain

$$\int\limits_0^T \langle\mathcal{F}(t),w\rangle_{[D(\Omega)]^n}\,\varphi(t)\,dt=0, \qquad w\in C_{\mathrm{div}}, \quad \varphi\in D(0,T),$$

and so (25) holds. Clearly, from (40) we get

$$\mathcal{F}\in L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^n)+[L^{\frac{q^0}{q^0-1}}(Q_{0,T})]^n\subset W^{0,h}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n),$$

where h is taken from (14). Then, the generalized De Rham theorem (see Proposition 5) yields that there exists $\pi\in W^{0,h}(0,T;W^{0,h}(\Omega))=L^h(Q_{0,T})$ such that (27)-(28) hold. Thus, π satisfies (1) in $[D^*(Q_{0,T})]^n$ and (3) in $D^*(0,T)$. Theorem 1 is proved. $\square$

Proof of Theorem 2. Let $\{u_1,\pi_1\}$ and $\{u_2,\pi_2\}$ be weak solutions of problem (1)-(5). Set $u:=u_1-u_2$. Take (16) for u_1:

$$\langle u_{1\,t}+\mathcal{A}u_1,z\rangle_{U(Q_{0,T})}=\int\limits_0^T(F(t),z(t))_\Omega\,dt. \tag{61}$$

Take (16) for u_2:

$$\langle u_{2\,t} + \mathcal{A}u_2, z\rangle_{U(Q_{0,T})} = \int\limits_0^T (F(t), z(t))_\Omega \, dt. \tag{62}$$

Subtracting (62) from (61), setting $z = \chi_{0,\tau}u$ (see notation (31)), $\tau \in (0,T]$, we obtain

$$\langle u_t, \chi_{0,\tau}u\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_0^\tau \langle A(t)u_1(t) - A(t)u_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle_{V^t} \, dt = \int\limits_0^\tau (F(t), u(t))_\Omega \, dt, \ \tau \in (0,T].$$

Using (30) and simple transformations, in the same way as (49), from this equality, we get

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u|^2 \, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a_0 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 + (G|u_1|^{q(x,t)-2}u_1 - G|u_2|^{q(x,t)-2}u_2, u_1 - u_2)_{\mathbb{R}^n}\Big] \, dxdt \le$$

$$\le C_{22} \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u|^2 \, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{63}$$

Let $y(\tau) := \int_{\Omega_\tau} |u|^2 \, dx$, $\tau \in (0,T]$. Then, from (63) it follows that $\frac{1}{2}y(\tau) \le C_{22}\int_0^\tau y(t) \, dt$, $\tau \in (0,T]$. Using the Gronwall lemma, we see that $y(\tau) \le 0$ for $\tau \in [0,T]$, and so $u_1 = u_2$.

Since π_1 and π_2 satisfy (1) in $\mathcal{D}_{\rm div}$, we obtain

$$(u_1 - u_2)_t + \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 + \nabla(\pi_1 - \pi_2) = 0.$$

Then the equality $u_1 = u_2$ yields that $\nabla(\pi_1 - \pi_2) = 0$. Therefore, for $t \in (0,T)$ we have that $\pi_1(t) - \pi_2(t) = C(t)$. It follows from condition (3) with π_1 and π_2 that $C(t) = 0$. Thus, $\pi_1 = \pi_2$ and Theorem 2 is proved. □

REFERENCES

[**1**] R. Temam. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, Mir, Moscow, 1981 (translated from: North-Holland Publ., Amsterdam, New York, Oxford, 1979).

[**2**] M. Růžička. *Electrorheological fluids: Modeling and mathematical theory*, in: Lecture Notes in Mathematics, 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[**3**] V.A. Solonnikov. *Estimates of solutions to the linearized system of the Navier-Stokes equations*, Trudy of the Steklov Math. Inst. **70** (1964) 213-317.

[**4**] V.A. Solonnikov. *On estimates of solutions of the non-stationary Stokes problem in anisotropic Sobolev spaces and on estimates for the resolvent of the Stokes operator*, Russian Math. Surveys. **58**, №2 (2003) 331-365.

[**5**] V.A. Solonnikov. *Weighted Schauder estimates for evolution Stokes problem*, Annali Univ. Ferrara. **52** (2006) 137-172.

[**6**] I.S. Mogilevskii. *On a boundary value problem for the time-dependent Stokes system with general boundary conditions*, Mathematics of the USSR-Izvestiya. **28**, №1 (1987) 37-66.

[**7**] G.P. Galdi, C.G. Simader, H. Sohr. *On Stokes problem in Lipschitz domain*, Annali di Matematica pura ed applicata. CLXVII (IV) (1994) 147-163.

[**8**] G.P. Galdi, C.G. Simader, H. Sohr. *A class of solution to stationary Stokes and Navier-Stokes equations with boundary data in* $W^{-\frac{1}{q},q}$, Math. Ann. **331** (2005) 41-74.

[**9**] O.M. Buhrii. *Visco-plastic, Newtonian, and dilatant fluids: Stokes equations with variable exponent of nonlinearity*, Mat. Stud. **49** (2018) 165-180.

[**10**] O. Buhrii, M. Khoma *On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system*, Visnyk (Herald) of Lviv Univ. Series Mech.-Math. **85** (2018) 107-119.

[**11**] H. Gajewski, K. Groger, K. Zacharias. *Nonlinear operator equations and operator differential equations*, Mir, Moscow, 1978 (translated from: Akademie-Verlag, Berlin, 1974).

[**12**] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires*, Mir, Moscow, 1972 (translated from: Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969).

[**13**] E. Suhubi. *Functional analysis*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 2003.

[**14**] O. Buhrii, N. Buhrii. *Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity*, Open Math. **15** (2017) 859-883.

[**15**] Brezis H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations (Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2011)

[**16**] Byström J., Sharp constants for some inequalities connected to the p-Laplace operator, J. of Ineq. in Pure and Appl. Math., 2005, 6 (2): Article 56

[**17**] J.A. Langa, J. Real, J. Simon. *Existence and regularity of the pressure for the stochastic Navier-Stokes equations*, Applied Mathematics and Optimization. **48**, №3 (2003) 195-210.

[**18**] J. Simon. *Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and preassure*, SIAM J. Math. Anal. **21**, №5 (1990) 1093-1117.

[**19**] J.-P. Aubin. *Un theoreme de compacite*, Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences. **256** (24) (1963) 5042-5044.

[**20**] F. Bernis. *Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains*, Math. Ann. **279** (1988) 373-394.

[**21**] O. Buhrii, M. Khoma *Integration by parts formulas for functions from generalized Sobolev spaces.* International Scient. Conf. "Applied Mathematics and Information Technology" dedicated to the 60th anniversary of the Department of Applied Mathematics and Information Technology (September 22-24, 2022, Chernivtsi): Book of Materials. – Chernivtsi, 2022. – P. 107-110.

[**22**] J. Droniou Intégration et espaces de Sobolev *à* valeurs vectorielles. Lecture notes, Universite de Provence, Marseille, 2001.

Received 03.11.2022

Хома М.В., Бугрій О.М. *Системи Стокса зі змінними показниками нелінійності* // Буковинський матем. журнал — 2022. — Т.10, №2. — С. 28–42.

У статті розглянуто мішану задачу для нелінійної системи рівнянь гідродинаміки, яку прийнято називати системою Стокса. Ми збурюємо класичні рівняння Стокса монотонним нелінійним доданком зі змінним показником нелінійності – функцією $q = q(x,t)$. Цей показник нелінійності q залежить від просторової та часової змінної і, зокрема, задовольняє умову Ліпшиця за змінною t. У роботі досліджуємо існування та єдиність узагальненого розв'язку розглядуваної задачі. Доведення теореми існування розв'язку ґрунтується на методі Фаедо-Гальоркіна. При побудові гальоркінських наближень використано теорему Каратеодорі-Ла Салля про глобальну розв'язність задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Побудувавши гальоркінські наближення для нашої системи, доводимо їх обмеженість у відповідних функційних просторах функцій зі змінним показником сумовності. Затим показуємо збіжність наближень до узагальненого розв'язку задачі. Теорему єдиності розв'язку мішаної задачі доводимо методом від супротивного.

Ільків В.С., Страп Н.І., Волянська І.І.

Нелокальна крайова задача у просторах експоненційного типу рядів Діріхле-Тейлора для рівняння з оператором комплексного диференціювання

Досліджено нелокальну крайову задачу для рівняння з частинними похідними з оператором узагальненого диференціювання $B = z\dfrac{\partial}{\partial z}$, який діє на функції скалярної комплексної змінної z. Встановлено умови розв'язності даної задачі у просторах рядів Діріхле-Тейлора, побудовано формули для розв'язку. Показано, що розглядувана задача є коректною за Адамаром. Малі знаменників, які виникають при побудові розв'язку, не є малими і оцінюються знизу деякими сталими.

Ключові слова і фрази: нелокальна крайова задача, комплексна змінна, простори експоненційного типу, оператор узагальненого диференціювання.

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine
e-mail: *ilkivv@i.ua (Il'kiv V.S.), n.strap@i.ua (Strap N.I.), i.volyanska@i.ua (Volyanska I.I.)*

Вступ

Встановлення умов розв'язності нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь є актуальним напрямом розвитку теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними [1, 2, 4, 6, 10]. У загальному випадку такі задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність залежить від проблеми малих знаменників і коректність забезпечується вибором області розгляду та накладанням додаткових умов на коефіцієнти рівнянь та параметри нелокальних умов.

Вагомий внесок у дослідженнях крайових задач для багатьох класів рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними у обмежених за просторовою змінною областях належить Б. Й. Пташнику та його учням, які на основі метричного підходу встановили умови однозначної розв'язності розглядуваних задач у різних функціональних просторах для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є параметри областей, коефіцієнти рівнянь та крайових умов [3, 8, 9, 11].

УДК 517.946
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35A01, 35A02.

Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними зі сталими та змінними коефіцієнтами досліджуються також і у необмежених областях. Зокрема, для конструктивної побудови розв'язків нелокальних задач у працях [5, 7] застосовано диференціально-символьний метод відокремлення змінних. У роботі [12] отримано умови коректної розв'язності задачі з нелокальними за часовою змінною умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку в необмеженій за просторовою змінною смузі, у припущенні, що дійсні частини коренів характеристичного рівняння не є нульовими.

Дана робота присвячена дослідженню умов коректної розв'язності задачі з нелокальни-ми крайовими умовами для диференціально-операторного рівняння з частинними похідними у випадку однієї просторової змінної. Доведено теорему єдиності та теореми існування розв'язку задачі у просторах рядів Діріхле-Тейлора. Показано коректність за Адамаром задачі, що відрізняє її від некоректної за Адамаром задачі з багатьма просторовими комплексними змінними, розв'язність якої пов'язана з проблемою малих знаменників.

1 Простори функцій, постановка задачі

Позначимо $\mathcal{S}$ — область з множини $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathcal{D}=[0,T]\times\mathcal{S}$, де $T>0$.

Введемо та зафіксуємо множину

$$\mathcal{N}=\{\nu_k\in\mathbb{R}\colon k\in\mathbb{Z}\}$$

попарно рівних дійсних чисел, яку будемо називати спектром функцій, якщо вона немає скінченних точок скупчення, тобто $|\nu_k|\to+\infty$ при $|k|\to+\infty$, послідовність ν_k зростає при зростанні k, $\nu_0=0$ і $\nu_k/k>0$, якщо $k>0$. Використаємо цю множину при означенні просторів Діріхле–Тейлора, у позначенні яких відповідно присутня буква $\mathcal{N}$.

Нехай $\mathbf{W}\mathcal{N}$ — лінійний простір скінченних сум вигляду $P(z)=\sum\limits_k P_k z^{\nu_k}$, де $z\in\mathcal{S}$, P_k — комплексні коефіцієнти, $k\in\mathbb{Z}$. Це простір основних функцій. Тому кожну основну функцію $P(z)$ можна подати сумою трьох доданків $P(z)=P_0+P_1(z)+P_2(1/z)$, де $P_1(z)=\sum\limits_{k>0}P_k z^{\nu_k}$ і $P_2(w)=\sum\limits_{k<0}P_k w^{-\nu_k}$ — аналітичні в області S функції, причому $P_1(0)=P_2(0)=0$.

Простір $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ — спряжений простір з простором $\mathbf{W}\mathcal{N}$; це простір узагальнених функцій, які є формальними рядами

$$Q(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q_k z^{\nu_k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q_k z^{\nu_k},$$

що діють на основну функцію $P\in\mathbf{W}\mathcal{N}$ за таким правилом: $\langle Q,P\rangle=\sum\limits_k Q_k\bar{P}_k$.

Введемо функціональні простори експоненційного типу: $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_q(\mathcal{S})$, де $\beta\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}$, — гільбертів простір функцій $\psi=\psi(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k z^{\nu_k}$ зі спектром $\mathcal{N}$, який отриманий поповненням множини основних функцій $\mathbf{W}\mathcal{N}$ за нормою

$$\|\psi\|_{\mathbf{E}\mathcal{N}_q^\beta(\mathcal{S})} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\nu}_k^{2q} e^{2\tilde{\nu}_k\beta}|\psi_k|^2\Big)^{1/2}, \qquad \tilde{\nu}_k = \sqrt{1+\nu_k^2};$$

$\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$, де $\beta\colon [0,T]\to\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — банахів простір таких функцій $u=u(t,z)$, похідні $\dfrac{\partial^r u}{\partial t^r}$ яких визначені для $r=0,1,\dots,n$ формулою $\dfrac{\partial^r u}{\partial t^r} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t) z^{\nu_k}$, і функції $t\mapsto \Big\|\dfrac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\Big\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-r}^{\beta(t)}(\mathcal{S})}$ є неперервними на $[0,T]$. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})} = \sum_{r=0}^n \max_{[0,T]} \Big\|\frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\Big\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-r}^{\beta(t)}(\mathcal{S})}.$$

Функція β вказує на експоненційну (показникову) гладкість елементів простору $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$, а число q — на степеневу гладкість. Зростання q чи β означає звуження згаданого простору та простору $\mathbf{E}\mathcal{N}_q^\beta(\mathcal{S})$.

Зауважимо, що $B^s\psi\in\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-s}^\beta(\mathcal{S})$ для всіх $s\in\mathbb{N}$, якщо $\psi\in\mathbf{E}\mathcal{N}_q^\beta(\mathcal{S})$, де B — оператор узагальненого диференціювання, тобто $B\psi = z\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$, а степені оператора B визначено стандартними формулами $B^0\psi=\psi$, $B^s\psi = B(B^{s-1}\psi)$ при $s\in\mathbb{N}$. Зокрема, для довільного $\nu\in\mathbb{R}$ маємо $B^s\big(z^\nu\big)=\nu^s z^\nu$, тому z^ν — власні функції оператора B, яким відповідають власні значення ν.

В області $\mathcal{D}$ розглянуто задачу з нелокальними умовами

$$Lu = \sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1}\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

$$M_m u = \mu\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = \varphi_m, \quad m=0,1,\dots,n-1, \tag{2}$$

де $a_{s_0,s_1}\in\mathbb{C}$, $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $a_{n,0}=1$, $u=u(t,z)$ — шукана функція, а $\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}$ — задані функції змінної z.

Якщо виконується умова $u\in\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$ для елемента $u=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)z^{\nu_k}$, то вірними є формули $Bu = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\nu_k u_k(t) z^{\nu_k}\in\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-1,n}^\beta(\mathcal{D})$, $Lu = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} L\Big(\dfrac{d}{dt},\nu_k\Big)u_k(t)z^{\nu_k}\in\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-n,0}^\beta(\mathcal{D})$ і $M_m u = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} M_m u_k(t) z^{\nu_k}\in\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-m}^\beta(\mathcal{S})$ для $m=0,1,\dots,n-1$.

Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти функцію $u=u(t,z)\in C^n([0,T],\mathbf{W}\mathcal{N}')$, яка задовольняє рівняння (1) і умови (2) та належить до простору $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$.

Для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно, щоб функції φ_m належали до просторів $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-m}^\beta(\mathcal{S})$ при $m=0,1,\dots,n-1$ відповідно. Це твердження є наслідком з означення розв'язку задачі та властивостей просторів $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$ і $\mathbf{E}\mathcal{N}_q^\beta(\mathcal{S})$.

2 Побудова розв'язку, теорема єдиності

Розв'язок задачі (1), (2) має вигляд ряду

$$u(t,z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)z^{\nu_k}, \tag{3}$$

де коефіцієнти $u_k=u_k(t)$ — невідомі функції, які треба визначити.

Запишемо оператор L з рівняння (1) у вигляді суми $Lu=\sum\limits_{j=0}^{n} b_j(B)\dfrac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}}$, де оператор $b_j(B)=\sum\limits_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1}B^{s_1}$, $j=0,1,\dots,n$, є многочленом не вище j-го степеня від оператора B, зокрема, $b_0(B)$ — одиничний оператор.

Функція u_k з формули (3) для кожного $k\in\mathbb{Z}$ є класичним розв'язком відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння, а саме задачі:

$$u_k^{(n)}+\sum_{j=1}^{n} b_j(\nu_k)u_k^{(n-j)}=0, \tag{4}$$

$$\mu u_k^{(m)}\big|_{t=0}-u_k^{(m)}\big|_{t=T}=\varphi_{mk}, \quad m=0,1,\dots,n-1, \tag{5}$$

де для кожного $\nu\in\mathbb{R}$ многочлени $b_j(\nu)=\sum\limits_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1}\nu^{s_1}$ є многочленами степеня не вище j, φ_{mk} — коефіцієнти Фур'є функції φ_m з функціонального ряду $\varphi_m(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_{mk}z^{\nu_k}$.

Єдиність розв'язку u_k задачі (4), (5) у просторі $\mathbf{C}^n[0,T]$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$ для довільного $q\in\mathbb{R}$. Саме тому, якщо хоча б для одного ν_k існує нетривіальний розв'язок $\hat u_k=\hat u_k(t)$ однорідної задачі (4), (5), то однорідна задача (1), (2) також має нетривіальний розв'язок $\hat u=\hat u(t,z)$, який визначається формулою $\hat u(t,z)=\hat u_k(t)z^{\nu_k}$ і розв'язок задачі (1), (2) не може бути єдиним.

Для побудови розв'язку задачі (4), (5) у рівнянні пронормуємо коефіцієнти $b_1(\nu),\dots,b_n(\nu)$ і подамо їх у вигляді добутку $b_j(\nu)=\tilde\nu^j\tilde b_j(\nu)$. Функції $\tilde b_j(\nu)$ і коефіцієнти $b_j(\nu)$, лінійно залежать від параметрів $a_{n-j,0},a_{n-j,1},\dots,a_{n-j,j}$, зокрема $\tilde b_j$ рівномірно обмежені за ν та $a_{s_0,s}$. Очевидно, справджується нерівність

$$\left|\tilde b_j(\nu)\right|\le\sum_{s_1=0}^{j}\left|a_{n-j,s_1}\right|\frac{|\nu|^{s_1}}{\tilde\nu^j}\le\max_{s_1=0,1,\dots,j}\left|a_{n-j,s_1}\right|\sum_{s_1=0}^{j}\frac{|\nu|^{s_1}}{\tilde\nu^j}.$$

Якщо коефіцієнти $a_{s_0,s_1}\in\mathbb{C}$ рівняння (1) розглядати у крузі деякого радіуса A з центром у початку координат комплексної площини, то для $j=1,\dots,n$ отримаємо оцінки

$$\left|\tilde b_j(0)\right|=\left|a_{n-j,0}\right|\le A,$$

$$\left|\tilde b_j(\pm1)\right|\le\frac{j+1}{2^{j/2}}A\le\frac{3}{2}A,$$

$$\left|\tilde{b}_j(\nu)\right| \leq \frac{A}{\tilde{\nu}^j}\frac{|\nu|^{j+1}}{|\nu|-1} < \frac{|\nu|^j}{\tilde{\nu}^j}A < A, \quad \nu \notin \{-1,0,1\},$$

тобто $\left|\tilde{b}_j(\nu)\right| < 2A$ для всіх $\nu \in \mathbb{R}$. Звіси випливає, що для всіх (з врахуванням кратності) коренів $\lambda_1(\nu), \ldots, \lambda_n(\nu)$ многочлена

$$P_\nu(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j(\nu)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(\nu)\lambda^{n-j}$$

виконуються нерівності:

$$|\lambda_j(\nu)| \leq 1 + \max\{|\tilde{b}_1(\nu)|, \ldots, |\tilde{b}_n(\nu)|\} \leq 1 + 2A. \tag{6}$$

Очевидно, що числа $\gamma_j(\nu) = \tilde{\nu}_k\lambda_j(\nu)$ є коренями відповідного характеристичного рівняння $\gamma^n + b_1(\nu)\gamma^{n-1} + \ldots + b_n(\nu) = 0$ для диференціального рівняння (4).

Позначимо через $\mathcal{N}^\Delta$ множину тих $\nu \in \mathcal{N}$, для яких многочлен $P_\nu(\lambda)$ має кратний корінь, а відповідну множину значень k — через K^Δ, тоді рівносильними є твердження $k \in K^\Delta$ і $\nu_k \in \mathcal{N}^\Delta$.

Для різних коренів $\lambda_1(\nu), \ldots, \lambda_n(\nu)$ загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n} C_{kl}e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)t}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus K^\Delta, \tag{7}$$

де C_{kl} — довільні комплексні сталі.

Якщо $u_k(t)$ — розв'язок задачі (4), (5), то числа $\tilde{C}_{kl} = \left(\mu - e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)T}\right)C_{kl}$, $l = 1, 2, \ldots, n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^m(\nu_k)\tilde{C}_{kl} = \frac{\varphi_{mk}}{\tilde{\nu}_k^m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{8}$$

з матрицею Вандермонда $\left(\lambda_l^{m-1}(\nu_k)\right)_{m,l=1}^n$. Навпаки, якщо числа $\tilde{C}_{kl}$, де $l = 1, 2, \ldots, n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (8), то функція $u_k(t)$, що визначена формулою (7), в якій $C_{kl} = \dfrac{\tilde{C}_{kl}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)T}}$, є розв'язком задачі (4), (5).

Розв'язуючи систему (8) за правилом Крамера, одержуємо рівності

$$\tilde{C}_{kl} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{jl}(\nu_k)}{\Delta(\nu_k)}\frac{\varphi_{jk}}{\tilde{\nu}_k^j},$$

де $\Delta(\nu) = \prod\limits_{1\leq r<q\leq n}\left(\lambda_q(\nu) - \lambda_r(\nu)\right) \neq 0$ — визначник Вандермонда, а $\Delta_{jl}(\nu)$ — його відповідні алгебричні доповнення, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = 1, 2, \ldots, n$.

Для того, щоб задача (4), (5) мала єдиний класичний розв'язок для $\nu \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\Delta$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\mu \neq e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}$ для $l = 1, \ldots, n$. З цієї умови випливає, що $\ln\mu \neq \tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T + i2\pi m$ або числа $\dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{\nu}T}$ не є коренями многочлена P_ν для довільних $\nu \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\Delta$ та $m \in \mathbb{Z}$.

У протилежному випадку, коли $\mu = e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}$ для деякого l, існує таке число $m \in \mathbb{Z}$, що корінь $\lambda_l(\nu)$ визначається за формулою: $\lambda_l(\nu) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{\nu}T}$. Тому виконується рівність

$$\frac{(\ln\mu - i2\pi m)^n}{T^n\tilde{\nu}^n} + \sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(\nu)\frac{(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j}}{T^{n-j}\tilde{\nu}^{n-j}} = 0$$

чи еквівалентна їй рівність

$$(\ln\mu - i2\pi m)^n + \sum_{j=1}^{n} b_j(\nu)T^j(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j} = 0, \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Для кратних коренів ($\nu \in \mathcal{N}^{\Delta}$) загальний розв'язок рівняння (4) також буде мати вигляд (7), в якому, залежно від кратності коренів $\lambda_l(\nu)$, замість числових коефіцієнтів C_{kl} будуть многочленні коефіцієнти $C_{kl}(t)$, степеня на одиницю меншого від кратності кореня $\lambda_l(\nu)$. Покажемо, що відсутність розв'язків рівняння (9) буде необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (4), (5) і для коренів довільної кратності.

Отже, для коренів $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ кратностей $n_1 = n_1(k), \ldots, n_N = n_N(k)$ відповідно, зобразимо цей розв'язок формулою

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}C_{kl}(t) = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}\Big(1 \ t \ \ldots \ \frac{t^{n_l-1}}{(n_l-1)!}\Big)C_{kl}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{7_1}$$

де C_{kl} — довільні комплексні стовпці висоти n_l, $n_1 + \cdots + n_N = n$. Тоді

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}e_1^{\intercal}(n_l)\theta_l(t)C_{kl},$$

де $e_j(r)$ — стовпець з номером j одиничної матриці I_r порядку r, уніпотентна матриця $\theta_l(t)$ має порядок n_l і визначається кожною з рівностей

$$\theta_l(t) = \sum_{j=0}^{n_l-1}\frac{t^j}{j!}J_l^j, \qquad \operatorname{col}\big(C_{kl}(t), C'_{kl}(t), \ldots, C_{kl}^{(n_l-1)}(t)\big) = \theta_l(t)C_{kl},$$

причому $J_l = \big(0 \ e_1(n_l) \ \ldots \ e_{n_l-1}(n_l)\big)$ — нільпотентна матриця ($J_l^{n_l} = 0$) порядку n_l і, очевидно, $d\theta_l/dt = J_l\theta_l = \theta_l J_l$, зокрема $d^{n_l}\theta_l/dt^{n_l} = 0$.

Нехай $M = M(\gamma)$ — многочлен, тоді

$$M\Big(\frac{d}{dt}\Big)u_k(t) = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}M\Big(\gamma_l(\nu_k) + \frac{d}{dt}\Big)C_{kl}(t).$$

За формулою Тейлора маємо

$$M\Big(\frac{d}{dt}\Big)u_k(t) = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}\Big(M(\gamma) \ M'(\gamma) \ \ldots \ \frac{M^{n_l-1}(\gamma)}{(n_l-1)!}\Big)\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)} \times$$
$$\times \operatorname{col}\big(C_{kl}(t), C'_{kl}(t), \ldots, C_{kl}^{(n_l-1)}(t)\big) =$$
$$= \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}\Big(M(\gamma) \ M'(\gamma) \ \ldots \ \frac{M^{n_l-1}(\gamma)}{(n_l-1)!}\Big)\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)}\theta_l(t)C_{kl}.$$

Використаємо останнє зображення для випадку $M(\gamma) = \gamma^m$ і запишемо

$$M_m u_k = \mu \sum_{l=1}^{N} \Big(\gamma^m \ (\gamma^m)' \ \dots \ \frac{(\gamma^m)^{n_l-1}}{(n_l-1)!}\Big)\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)} C_{kl} -$$

$$- \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)T} \Big(\gamma^m \ (\gamma^m)' \ \dots \ \frac{(\gamma^m)^{n_l-1}}{(n_l-1)!}\Big)\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)} \theta_l(T) C_{kl}.$$

або

$$M_m u_k = \sum_{l=1}^{N} \Big(\gamma^m \ (\gamma^m)' \ \dots \ \frac{(\gamma^m)^{n_l-1}}{(n_l-1)!}\Big)\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)} \big(\mu I_{n_l} - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}\theta_l(T)\big) C_{kl}.$$

Позначимо $W_k = (W_{k1} \ \dots \ W_{kN})$ узагальнену матрицю Вандермонда, де W_{kl} — матриця розміру $n \times n_l$, перший стовпець якої $\big(1 \ \gamma_l(\nu_k) \ \dots \ \gamma_l^{n-1}(\nu_k)\big)^{\intercal}$, а інші є похідними, зокрема стовпець з номером j має вигляд $\dfrac{1}{(j-1)!}\dfrac{d^{j-1}\big(1 \ \gamma \ \dots \ \gamma^{n-1}\big)^{\intercal}}{d\gamma^{j-1}}\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)}$.

Матриця W_k є невиродженою, тому вектор $\tilde{C}_k = \mathrm{col}\,(\tilde{C}_{k1}, \dots, \tilde{C}_{kN})$, де

$$\tilde{C}_{kl} = \big(\mu I_{n_l} - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}\theta_l(T)\big) C_{kl},$$

зображає формула $\tilde{C}_k = W_k^{-1}\mathrm{col}\,(\varphi_{0k}, \varphi_{1k}, \dots, \varphi_{n-1,k})$.

Оскільки

$$\det\big(\mu I_{n_l} - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}\theta_l(T)\big) = (\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T})^{n_l},$$

то з невиконання рівності (9) випливає існування єдиного розв'язку задачі (4), (5) з векторами $C_{kl} = \big(\mu I_{n_l} - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}\theta_l(T)\big)^{-1}\tilde{C}_{kl}$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (9) *не мало розв'язків* (m, ν) *на множині* $\mathbb{Z} \times \mathcal{N}$.

Доведення. Необхідність. Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$ має лише тривіальний розв'язок. Тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто однорідна задача (4), (5) у просторі $\mathbb{C}^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ має єдиний тривіальний розв'язок. Отже, ненульовим є визначник $\Delta(\nu) \cdot \prod_{l=1}^{n} \big(\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}\big)$ для $\nu \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^{\Delta}$, тобто $\mu \neq e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}$ для $l = 1, \dots, n$. Значить, рівняння (9) не має розв'язків на множині $\mathbb{Z} \times \mathcal{N}$. Аналогічні нерівності отримуємо при $\nu \in \mathcal{N}^{\Delta}$.

Достатність. Доведемо методом від супротивного. Нехай пара (m^*, ν_{k^*}) є розв'язком рівняння (9) на множині $\mathbb{Z} \times \mathcal{N}$. Тоді можна вважати, що $\lambda_1(k^*) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m^*}{\tilde{\nu_{k^*}} T}$, а однорідна задача (4), (5) має розв'язок $e^{\tilde{\nu}_{k^*}\lambda_1(\nu_{k^*})t} = e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T}$. Звідси випливає, що задача (1), (2) у просторі $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$ якщо має, то безліч розв'язків, оскільки $u^*(t,z) = Cz^{\nu_{k^*}}e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T}$, де C — довільна комплексна стала, є розв'язками відповідної однорідної задачі. Теорему доведено.

Для фіксованих μ та T рівняння (9) визначають зліченну кількість гіперплощин у просторі коефіцієнтів a_{s_0,s_1} диференціального рівняння (1), а для фіксованих a_{s_0,s_1} — зліченну кількість точок на площині змінної $\ln\mu$ за фіксованого T, або зліченну кількість точок на осі змінної T за фіксованого μ. Тому множини коефіцієнтів чи параметрів задачі (1), (2), для яких не виконуються умови єдиності мають нульову міру.

За умов теореми 1 для довільного $k \in \mathbb{Z}$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (4), (5) існує, а при $k \in \mathbb{Z} \setminus K^{\Delta}$ його похідні мають такий вигляд:

$$u_k^{(r)}(t) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(\nu_k)\lambda_l^r(\nu_k)}{\prod\limits_{1 \le r < q \le n} \big(\lambda_q(\nu_k) - \lambda_r(\nu_k)\big)} \frac{e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k)T}} \tilde{\nu}_k^{r-j} \varphi_{jk}, \qquad r = 0, 1, \ldots, n. \quad (10)$$

За формулою (3) формальний розв'язок задачі (1), (2) подається у вигляді ряду

$$u(t,z) = \sum_{k \in K^{\Delta}} u_k(t) z^{\nu_k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus K^{\Delta}} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(\nu_k)}{\Delta(\nu_k)} \frac{e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k)T}} \tilde{\nu}_k^{-j} \varphi_{jk} z^{\nu_k}. \quad (11)$$

3 Оцінювання розв'язку і встановлення гладкості

Доведемо належність розв'язку (11) задачі (1), (2) до простору $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$. Враховуючи, що K^{Δ} — скінченна множина (буде показано далі), оцінимо абсолютну величину функцій u_k та їх похідних до порядку n лише для $k \in \mathbb{Z} \setminus K^{\Delta}$, зокрема

$$\big|u_k^{(r)}(t)\big| \le \frac{\tilde{\nu}_k^r}{|\Delta(\nu_k)|} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(\nu_k)| \sum_{l=1}^{n} \frac{\big|\lambda_l^r(k) e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k)t}\big|}{\big|\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k)T}\big|} \sum_{j=0}^{n-1} \big|\tilde{\nu}_k^{-j} \varphi_{jk}\big|, \quad t \in [0,T].$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і перетворимо до вигляду

$$\big|u_k^{(r)}(t)|^2 \le n^3 (1+2A)^{2r} \frac{\tilde{\nu}_k^{2r}}{|\Delta(\nu_k)|^2} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(\nu_k)|^2 \max_{l} \left| \frac{e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k)T}} \right|^2 \sum_{j=0}^{n-1} \big|\tilde{\nu}_k^{-j} \varphi_{jk}\big|^2. \quad (12)$$

Оскільки для довільних $\nu \in \mathbb{R}$ визначники $\Delta_{jl}(\nu)$ є визначниками порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то з (6) маємо

$$|\Delta_{jl}(\nu)| \le (n-1)!(1+2A)^{(n-1)n/2}. \quad (13)$$

Для подальшої оцінки $|u_k|$ розглянемо вираз $\Delta^2(\nu)$, $\nu \in \mathbb{R}$, у формулі (12), який є дискримінантом $D(\nu)$ полінома $P_\nu(\lambda)$ і для якого справедливі такі два зображення:

$$\Delta^2(\nu) = D(\nu) = \prod_{1 \le r < q \le n} \big(\lambda_q(\nu) - \lambda_r(\nu)\big)^2 = \tilde{\nu}^{-n(n-1)} \prod_{1 \le r < q \le n} \big(\tilde{\nu}\lambda_q(\nu) - \tilde{\nu}\lambda_r(\nu)\big)^2,$$

$$D(\nu) = \pm \begin{vmatrix} 1 & \tilde{b}_1(\nu) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & \tilde{b}_n(k) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \tilde{b}_{n-2}(\nu) & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & \tilde{b}_n(\nu) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{b}_1(\nu) & \tilde{b}_2(\nu) & \tilde{b}_3(\nu) & \ldots & \tilde{b}_n(\nu) \\ n & (n-1)\tilde{b}_1(\nu) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & 2\tilde{b}_{n-2}(\nu) & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)\tilde{b}_1(\nu) & (n-2)\tilde{b}_2(\nu) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(\nu) \end{vmatrix},$$

де знак перед визначником визначає формула $(-1)^{(n-1)n/2}$.

Дискримінант $D(\nu)$ подамо у вигляді многочлена:

$$D(\nu) = D_0\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)} + \frac{D_1}{\tilde{\nu}}\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)-1} + \frac{D_2}{\tilde{\nu}^2}\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)-2} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{\tilde{\nu}^{n(n-1)}} = \\ = \Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)}\Big(D_0 + \frac{D_1}{\nu} + \frac{D_2}{\nu^2} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{\nu^{n(n-1)}}\Big), \quad (14)$$

де $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_{n(n-1)}$ — комплексні числа, які є многочленами від a_{s_0,s_1}, причому D_0 — дискримінант многочлена $\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n-j,j}\lambda^{n-j}$ (цей многочлен будується за головною частиною рівняння (1)):

$$D_0 = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \ldots & a_{0,n} \\ n & (n-1)a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & 2a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_{n-1,1} & (n-2)a_{n-2,2} & \ldots & a_{1,n-1} \end{vmatrix},$$

$D_{n(n-1)}$ — дискримінат многочлена $\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n-j,0}\lambda^{n-j}$ (многочлен будується за коефіцієнтами біля чистих за t похідних):

$$D_{n(n-1)} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,0} & \ldots & a_{1,0} & a_{0,0} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,0} & a_{1,0} & a_{0,0} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,0} & a_{n-2,0} & a_{n-3,0} & \ldots & a_{0,0} \\ n & (n-1)a_{n-1,0} & \ldots & a_{1,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & 2a_{2,0} & a_{1,0} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_{n-1,0} & (n-2)a_{n-2,0} & \ldots & a_{1,0} \end{vmatrix}.$$

Нехай $D_0 \neq 0$, тоді дискримінант $D(\nu)$ при $\nu \neq 0$ факторизуємо так:

$$D(\nu) = \frac{D_0}{2}\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)}\Big(2 + \frac{2D_1}{D_0\nu} + \frac{2D_2}{D_0\nu^2} + \ldots + \frac{2D_{n(n-1)}}{D_0\nu^{n(n-1)}}\Big) = \\ = \frac{D_0}{2}\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)}\Big(2 + \frac{2}{\nu D_0}\Big(D_1 + \frac{D_2}{\nu} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{\nu^{n(n-1)-1}}\Big)\Big).$$

З останньої формули випливає нерівність $|D(\nu)| \geq \dfrac{|D_0|}{2}\cdot\Big(\dfrac{|\nu|}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)}$ при $|\nu| \geq \dfrac{\tilde{D}_0}{|D_0|}$, де $\tilde{D}_0 = 2(|D_1| + |D_2| + \ldots + |D_{n(n-1)}|)$.

Для дробу $|\nu|/\tilde{\nu}$ справедливою є оцінка

$$\frac{|\nu|}{\tilde{\nu}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |\nu| \geq 1. \tag{15}$$

Врахувавши нерівність (15), оцінимо модуль $D(\nu)$ знизу

$$|D(\nu)| \geq \frac{|D_0|}{2} \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{n(n-1)} = \big(\sqrt{2}\big)^{-n(n-1)-2}|D_0|, \quad |\nu| \geq \max\Big(1, \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}\Big). \tag{16}$$

Отримана оцінка є точною за ν при $|\nu| \geq \max\Big(1, \dfrac{\tilde{D}_0}{|D_0|}\Big)$, оскільки оцінка зверху, яка випливає із зображення дискримінанта $D(\nu)$, має такий вигляд $|D(\nu)| \leq 3|D_0|/2$.

З оцінки (16) випливає також скінченність множини $\mathcal{N}^{\Delta}$, кількість елементів якої не перевищує кількості елементів множини $\mathcal{N}$, модуль яких менший $\max(1, \tilde{D}_0/|D_0|)$.

У формулі (12) залишається оцінити зверху дроби $\dfrac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}$ для $\nu \in \mathbb{R}$ і $\mu \neq 0$, оскільки $\left|\dfrac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\right| = e^{-\tilde{\nu}Re\lambda_l(\nu)(T-t)}$ для $\mu = 0$.

З рівності $2\mathrm{Re}\,\lambda_j(\nu){=}\lambda_j(\nu) + \bar{\lambda}_j(\nu) = \lambda_j(\nu){-}(-\bar{\lambda}_j(\nu))$ і того, що $-\bar{\lambda}_1(\nu), \ldots, -\bar{\lambda}_n(\nu)$ є коренями многочлена

$$P_{1\nu}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda + \bar{\lambda}_j(\nu)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{-j}\bar{\bar{b}}_j(\nu)\lambda^{n-j},$$

отримаємо, що числа $2\mathrm{Re}\,\lambda_j(\nu)$ є множниками результанта

$$R(\nu) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{l=1}^{n}(\lambda_j(\nu) - (-\bar{\lambda}_l(\nu)))$$

многочленів P_ν та $P_{1\nu}$. Цей результант дорівнює такому визначнику:

$$R(\nu) = \begin{vmatrix}
1 & \tilde{b}_1(\nu) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & \tilde{b}_n(\nu) & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & \tilde{b}_{n-2}(\nu) & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & \tilde{b}_n(\nu) & \ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & \tilde{b}_1(\nu) & \tilde{b}_2(\nu) & \tilde{b}_3(\nu) & \ldots & \tilde{b}_n(k) \\
1 & -\bar{\bar{b}}_1(\nu) & \ldots & (-1)^{n-1}\bar{\bar{b}}_{n-1}(\nu) & (-1)^n\bar{\bar{b}}_n(\nu) & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2}\bar{\bar{b}}_{n-2}(\nu) & (-1)^{n-1}\bar{\bar{b}}_{n-1}(\nu) & (-1)^n\bar{\bar{b}}_n(\nu) & \ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & -\bar{\bar{b}}_1(\nu) & -\bar{\bar{b}}_2(\nu) & -\bar{\bar{b}}_3(\nu) & \ldots & (-1)^n\bar{\bar{b}}_n(\nu)
\end{vmatrix}.$$

Для довільного $j = 1, \ldots, n$ оцінимо модуль даного результанта зверху

$$|R(\nu)| \leq 2^{n^2}(1 + 2A)^{n^2-1}|\mathrm{Re}\,\lambda_j|.$$

Для оцінки знизу подамо результант у вигляді

$$R(\nu) = \Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n^2}\Big(R_0 + \frac{R_1}{\nu} + \frac{R_2}{\nu^2} + \ldots + \frac{R_{n^2}}{\nu^{n^2}}\Big), \quad \nu \neq 0, \tag{17}$$

де R_0 дорівнює такому визначнику:

$$R_0 = \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,1} & \dots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \dots & 0 \\ 1 & -\bar a_{n-1,1} & \dots & (-1)^{n-1}\bar a_{1,n-1} & (-1)^n \bar a_{0,n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-2}\bar a_{2,n-2} & (-1)^{n-1}\bar a_{1,n-1} & (-1)^n\bar a_{0,n} & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & -\bar a_{n-1,1} & -\bar a_{n-2,2} & -\bar a_{n-3,3} & \dots & (-1)^n \bar a_{0,n} \end{vmatrix},$$

і у випадку $R_0 \neq 0$ маємо добуток

$$R(\nu) = \frac{R_0}{2}\Big(\frac{\nu}{\tilde\nu}\Big)^{n^2}\Big(2 + \frac{2}{\nu R_0}\Big(R_1 + \frac{R_2}{\nu} + \ldots + \frac{R_{n^2}}{\nu^{n^2-1}}\Big)\Big).$$

Якщо $\nu \in \mathbb{R}$ і $|\nu| \geq \max\Big(1, \dfrac{\tilde R_0}{|R_0|}\Big)$, де $\tilde R_0 = 2(|R_1| + |R_2| + \ldots + |R_{n^2}|)$, то справджується нерівність

$$2^{n^2}(1+2A)^{n^2-1}|\operatorname{Re}\lambda_j| \geq |R(\nu)| \geq \frac{|R_0|}{2}\Big(\frac{|\nu|}{\tilde\nu}\Big)^{n^2} \geq (\sqrt{2})^{-n^2-2}|R_0|.$$

Оскільки $|\operatorname{Re}\lambda_j(\nu)| \geq \tilde A$, де

$$\tilde A = (1+2A)^{1-n^2}\cdot 2^{-3n^2/2-1}|R_0|,$$

і $\tilde\nu \to \infty$ разом з $|\nu|$, то звідси випливає асимптотика, якщо $|\nu| \to \infty$, то

$$\tilde\nu|\operatorname{Re}\lambda_j(\nu)| \geq \tilde\nu\tilde A \to \infty.$$

Для шуканої оцінки дробів враховуємо асимптотику і знак $\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)$. Якщо $\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)>0$, то справджується на $[0,T]$ оцінка

$$\Big|\frac{e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)T}}\Big| \leq \frac{e^{\tilde\nu \operatorname{Re}\lambda_l(\nu)t}}{\big|\mu - e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)T}\big|} = \frac{e^{\tilde\nu\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)(t-T)}}{\big|\mu e^{-\tilde\nu\lambda_l(\nu)T} - 1\big|} \leq 2e^{-\tilde\nu|\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)|(T-t)}$$

при $\tilde\nu \geq \dfrac{M_1}{|R_0|}$ і $|\nu| \geq \max\Big(1, \dfrac{\tilde R_0}{|R_0|}\Big)$, де $M_1 = \dfrac{\ln(2|\mu|)}{T\tilde A}$.

Якщо ж $\operatorname{Re}\lambda_l(\nu) < 0$, то

$$\Big|\frac{e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)T}}\Big| = \frac{e^{\tilde\nu \operatorname{Re}\lambda_l(\nu)t}}{\big|\mu - e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)T}\big|} \leq \frac{2}{|\mu|}e^{\tilde\nu\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)t}$$

при $\tilde\nu \geq \dfrac{M_2}{|R_0|}$ і $|\nu| \geq \max\Big(1, \dfrac{\tilde R_0}{|R_0|}\Big)$, де $M_2 = \dfrac{\ln(2/|\mu|)}{T\tilde A}$.

Отже, при виконанні умов

$$\tilde\nu \geq \max\frac{(M_1, M_2)}{|R_0|} = \frac{(\sqrt{2})^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}}{T|R_0|}\ln(2\max(1/|\mu|, |\mu|)),$$

$$|\nu| \geq \max\Big(1, \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}\Big)$$

для виразу $\Big|\dfrac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\Big|$ справджуються такі нерівності:

$$\Big|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\Big| \leq 2e^{-\tilde{\nu}\min\limits_l |\mathrm{Re}\,\lambda_l(\nu)|(T-t)} \leq 2e^{-\tilde{\nu}\tilde{A}(T-t)} \qquad \text{для} \quad \mathrm{Re}\,\lambda_l(\nu) > 0,$$

$$\Big|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\Big| \leq \frac{2}{|\mu|}e^{-\tilde{\nu}\min\limits_l |\mathrm{Re}\,\lambda_l(\nu)|t} \leq \frac{2}{|\mu|}e^{-\tilde{\nu}\tilde{A}t} \qquad \text{для} \quad \mathrm{Re}\,\lambda_l(\nu) < 0.$$

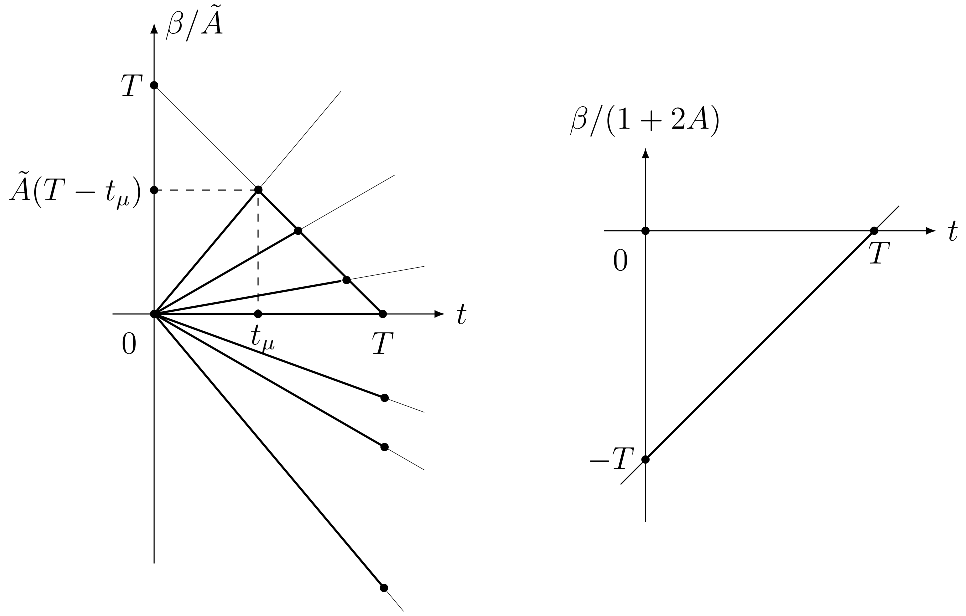

Рис. 1: Кусково-лінійна залежність $\dfrac{\beta}{\tilde{A}}$ від t для $|\mu| > 0$ та лінійна залежність $\dfrac{\beta}{1+2A}$ від t для $\mu = 0$, де $t_\mu = \dfrac{T}{1 + \ln|\mu|}$, причому $t_\mu \to 0$ у разі $|\mu| \to \infty$ і $t_\mu \to T$ у разі $|\mu| \to 1$.

Об'єднавши дані результати, запишемо наступну оцінку:

$$\max_l \Big|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\Big| \leq 2\max\Big(e^{-\tilde{\nu}\tilde{A}(T-t)}, \frac{1}{|\mu|}e^{-\tilde{\nu}\tilde{A}t}\Big) \leq 2e^{-\tilde{\nu}\tilde{A}\min\big(T-t,\ t\ln|\mu|\big)}.$$

Позначивши $\beta(t) = \tilde{A}\min\big(T-t,\ t\ln|\mu|\big)$ для $\mu \neq 0$ і $\beta(t) = (1+2A)(t-T)$ для $\mu = 0$, отримаємо

$$\max_l \Big|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\Big| \leq 2e^{-\tilde{\nu}\beta(t)}. \tag{18}$$

На рисунках зображено залежність від t екпоненційної гладкості розв'язку $\beta = \beta(t)$ з нерівності у формулі (18).

4 Основний результат, теорема існування та єдиності розв'язку

Враховуючи нерівності (12), (13), (16) і (18), для всіх $t \in [0,T]$ і $k \in \mathbb{Z} \setminus K_{00}^{\Delta}$, де K_{00}^{Δ} — множина тих k, які задовольняють хоча б одну з нерівностей

$$|\nu_k| \le \max\Big(1, \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}, \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}\Big), \quad \tilde{\nu}_k \le \max \frac{(M_1, M_2)}{|R_0|},$$

отримаємо оцінки розв'язку задачі (4), (5) та його похідних до порядку n

$$\tilde{\nu}_k^{-2r} e^{2\tilde{\nu}_k \beta(t)} |u_k^{(r)}(t)|^2 \le n^3 \frac{\sqrt{2}^{n(n-1)+6}}{|D_0|} \left((n-1)!\right)^2 (1+2A)^{n(n-1)+2r} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{\nu}_k|^{-2j} |\varphi_{jk}|^2. \qquad (19)$$

Теорема 2. *Нехай $D_0 R_0 \neq 0$ і для всіх $k \in K_{00}^{\Delta}$ рівняння (9) не має розв'язків на множині $\mathbb{Z} \times \mathcal{N}$, а також $\varphi_0 \in \mathbf{E}\mathcal{N}_q^0(\mathcal{S})$, $\varphi_1 \in \mathbf{E}\mathcal{N}_{q-1}^0(\mathcal{S})$,…, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{E}\mathcal{N}_{q-n+1}^0(\mathcal{S})$. Тоді існує лише один розв'язок задачі (1), (2), який належить до простору $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^{\beta}(\mathcal{D})$, де $\beta = \tilde{A} \min\big(T-t,\ t \ln|\mu|\big)$ і $\beta = (1+2A)(t-T)$ у разі $\mu = 0$. Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин φ_0, φ_1, …, φ_{n-1} умов (2).*

Доведення. За умови $D_0 R_0 \neq 0$ справджується оцінка (19) розв'язку u_k задачі (4), (5) для $k \in \mathbb{Z} \setminus K_{00}^{\Delta}$. Якщо $k \in K_{00}^{\Delta}$, то розв'язок задачі належить до простору $\mathbb{C}^n[0,T]$.

З нерівності (12) випливає $\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 \le C_r(k) \sum\limits_{j=0}^{n-1} \left|\tilde{\nu}_k^{-j} \varphi_{jk}\right|^2$, де

$$C_r(k) = \max_t n^3 (1+2A)^{2r} \frac{\tilde{\nu}_k^{2r}}{|\Delta(\nu_k)|^2} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(\nu_k)|^2 \max_l \left| \frac{e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) T}} \right|^2.$$

Враховуючи формулу (11) та нерівність (19), оцінимо зверху квадрат норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^{\beta}(\mathcal{D})} &\le \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \sum_{k \in K_{00}^{\Delta}} \tilde{\nu}_k^{2(q-r)} e^{2\beta(t)\tilde{\nu}_k} |u_k^{(r)}(t)|^2 + \\ &+ \sum_{r=0}^{n} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus K_{00}^{\Delta}} \tilde{\nu}_k^{2q} n^3 \left((n-1)!\right)^2 (1+2A)^{2r+n(n-1)} 2^{(n^2-n+6)/2} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\nu}_k^{-2j} |\varphi_{jk}|^2 \le \\ &\le \sum_{r=0}^{n} \sum_{k \in K_{00}^{\Delta}} C_r(k) \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\nu}_k^{-2j} |\varphi_{jk}|^2 + \frac{C_1}{|D_0|} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus K_{00}^{\Delta}} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\nu}_k^{-2j} |\varphi_{jk}|^2 \le \\ &\le \frac{C_2}{|D_0|} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-j}^0(\mathcal{S})}, \end{aligned} \qquad (20)$$

де

$$C_1 = n^3 (n+1) \left((n-1)!\right)^2 (1+2A)^{n(n-1)} 2^{(n^2-n+6)/2},$$

$$C_2 = \max\Big\{C_1, |D_0| \sum_{r=0}^{n} \max_{k \in K_{00}^{\Delta}} C_r(k) \tilde{\nu}_k^{2(q-r)} e^{2\beta(t)\tilde{\nu}_k}\Big\}.$$

Остання нерівність у формулі (20) випливає зі скінченності множини K_{00}^{Δ}. Теорему доведено.

З доведення теореми випливають властивості (екпоненційної) гладкості β розв'язку задачі (1), (2).

При $|\mu| > 1$ гладкість $\beta(t)$ функції $u(t, \cdot)$ на відрізку $[0, t_\mu]$ лінійно зростає від 0 до $\tilde{A}(T - t_\mu)$, а на відрізку $[t_\mu, T]$ лінійно спадає до 0, де $t_\mu = T/(1 + \ln|\mu|)$. При $|\mu| = 1$ гладкість не залежить від t, при $|\mu| < 1$ гладкість лінійно спадає від 0 до $\tilde{A}T \ln|\mu|$, а при $\mu = 0$ гладкість лінійно зростає від $(-1 - 2A)T$ до 0.

Отже, при $|\mu| > 1$ на інтервалі $(0, T)$ гладкість додатня, при $|\mu| = 1$ гладкість нульова, при $|\mu| < 1$ гладкість від'ємна.

Розглядувана задача у випадку багатьох комплексних змінних є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. Як бачимо, у випадку однієї змінної відповідні знаменники не є малими і оцінюються знизу деякими сталими.

Список літератури

[1] Goy T., Negrych M., Savka I. *On nonlocal boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous elastic beam with pinned-pinned ends.* Carpathian Mathematical Publications. 2018, **10** (1), 105–113. https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.105-113

[2] Il'kiv V.S., Nytrebych Z.M., Pukach P.Y. *Nonlocal problem with moment conditions for hyperbolic equations.* Electronic J. of Differential Eq., 2017, **265**, 1–9. https://digital.library.txstate.edu/handle/10877/16066

[3] Il'kiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Conditions of solvability of the nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity.* Journal of Mathematical Sciences. 2021, **256** (6), 753–769. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05458-4

[4] Kalenyuk P.I., Baranetskij Ya.O. Kolyasa L.I. *A nonlocal problem for a differential operator of even order with involution.* Journal of Applied Analysis.2020, **26** (2), 297–307. https://doi.org/10.1515/jaa-2020-2026

[5] Kalenyuk P.I., Kohut I.V., Nytrebych Z.M. *Problem with nonlocal two-point condition in time for a homogeneous partial differential equation of infinite order with respect to space variables* Journal of Mathematical Sciences. 2010, **167** (1), 1–15. https://doi.org/10.1007/s10958-010-9898-9

[6] Кондратів Л.Й., Симотюк М.М., Тимків І.Р. *Задача з нелокальними умовами для безтипних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами з відхиленням.* Прикарпатський вісник НТШ. Число. 2018, **1** (45), 37–44. https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/11

[7] Malanchuk O., Nytrebych Z. *Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables* Open Mathematics. 2017, **15** (1), 101–110. DOI:10.1515/math-2017-0009

[8] Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. Київ: Наук. думка, 2002, 416 с.

[9] Савка І.Я. *Нелокальна задача із залежними коефіцієнтами в умовах для рівняння другого порядку за часовою змінною* Карпат. мат. публ. 2010, **2** (2), 101 – 110.

[10] Shevchuk R.V., Savka I.Y., Nytrebych Z.M. *The nonlocal boundary value problem for one-dimensional backward Kolmogorov equation and associated semigroup.* Carpathian Mathematical Publications. 2019, **11** (2), 463–474. https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.463-474

[**11**] Власій О.Д., Пташник Б.Й. *Нелокальна крайова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом.* Укр. мат. журн. 2007, **59** (3), 370–381. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/164082

[**12**] Volyanska I.I., Il'kiv V.S., Symotyuk M.M. *Nonlocal boundary-value problem for a second-order partial differential equation in an unbounded strip.* Ukrainian mathematical journal. 2019, **70** (10), 1585–1593. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01591-1

Список літератури

[**1**] Goy T., Negrych M., Savka I. *On nonlocal boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous elastic beam with pinned-pinned ends.* Carpathian Mathematical Publications. 2018, **10** (1), 105–113. https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.105-113

[**2**] Il'kiv, V.S., Nytrebych, Z.M., Pukach, P.Y. *Nonlocal problem with moment conditions for hyperbolic equations.* Electronic J. of Differential Eq., 2017, **265**, 1–9. https://digital.library.txstate.edu/handle/10877/16066

[**3**] Il'kiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Conditions of solvability of the nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity.* Journal of Mathematical Sciences. 2021, **256** (6), 753–769. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05458-4

[**4**] Kalenyuk P.I., Baranetskij Ya.O. Kolyasa L.I. *A nonlocal problem for a differential operator of even order with involution.* Journal of Applied Analysis.2020, **26** (2), 297–307. https://doi.org/10.1515/jaa-2020-2026

[**5**] Kalenyuk P.I., Kohut I.V., Nytrebych Z.M. *Problem with nonlocal two-point condition in time for a homogeneous partial differential equation of infinite order with respect to space variables* Journal of Mathematical Sciences. 2010, **167** (1), 1–15. https://doi.org/10.1007/s10958-010-9898-9

[**6**] Kondrativ L.Yo., Symotyuk M.M., Tymkiv I.R. *Problem with nonlcal conditions for partial diffeential equations with constant coefficitnts with delay.* Precarpathian bulletin of Shevchenko Scientific Society Number. 2018, **1** (45), 37–44. https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/11 (in Ukrainian)

[**7**] Malanchuk, O., Nytrebych, Z. *Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables* Open Mathematics. 2017, **15** (1), 101–110. DOI:10.1515/math-2017-0009

[**8**] Ptashnyk B.I., Il'kiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. Kyiv: Naukova dumka, 2002, 416 p. (in Ukrainian)

[**9**] Savka I.Ya. *Nonlocal problem with dependent coefficients in conditions for the second-order equation in time variable* Carpathian Mathematical Publications. 2010, **2** (2), 101 – 110. (in Ukrainian)

[**10**] Shevchuk R.V., Savka I.Y., Nytrebych Z.M. *The nonlocal boundary value problem for one-dimensional backward Kolmogorov equation and associated semigroup.* Carpathian Mathematical Publications. 2019, **11** (2), 463–474. https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.463-474

[**11**] Vlasii O.D., Ptashnyk B.I. *Nonlocal boundary-value problem for linear partial differential equations unsolved with respect to the higher time derivative.* Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal 2007, **59** (3), 370–381. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/164082 (in Ukrainian)

[**12**] Volyanska I. I., Il'kiv V. S., Symotyuk M.M. *Nonlocal boundary-value problem for a second-order partial differential equation in an unbounded strip.* Ukrainian mathematical journal. 2019, **70** (10), 1585–1593. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01591-1

Надійшло 11.11.2022

Il'kiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Nonlocal boundary value problem in spaces of exponential type of Dirichlet-Taylor series for the equation with complex differentiation operator*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 43–58.

Problems with nonlocal conditions for partial differential equations represent an important part of the present-day theory of differential equations. Such problems are mainly ill possed in the Hadamard sence, and their solvability is connected with the problem of small denominators. A specific feature of the present work is the study of a nonlocal boundary-value problem for partial differential equations with the operator of the generalized differentiation $B = zd/dz$, which operate on functions of scalar complex variable z. A criterion for the unique solvability of these problems and a sufficient conditions for the existence of its solutions are established in the spaces of functions, which are Dirichlet-Taylor series. The unity theorem and existence theorems of the solution of problem in these spaces are proved. The considered problem in the case of many generalized differentiation operators is incorrect in Hadamard sense, and its solvability depends on the small denominators that arise in the constructing of a solution. In the article shown that in the case of one variable the corresponding denominators are not small and are estimated from below by some constants. Correctness after Hadamard of the problem is shown. It distinguishes it from an ill-conditioned after Hadamard problem with many spatial variables.

Бокало М. М.

Мішана задача для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності в необмежених областях без умов на нескінченності

У даній роботі доведено однозначну розв'язність мішаної задачі для деяких анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності в необмежених областях без умов нескінченності. Також отримано апріорну оцінку узагальнених розв'язків цієї задачі.

Ключові слова і фрази: мішана задача, початково-крайова задача, параболічне рівняння вищого порядку, нелінійне параболічне рівняння, узагальнений розв'язок.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна (Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine) (Бокало М. М.)
e-mail: *mm.bokalo@gmail.com (Бокало М.М.)*

Вступ

В даній роботі розглядаємо мішану або, іншими словами, початково-крайову задачу (зокрема, задачу Коші) для деяких параболічних рівнянь у необмежених областях відносно просторових змінних. Як відомо, у випадку лінійних рівнянь для забезпечення єдиності розв'язку такої задачі потрібно накладати певні обмеження на його поведінку при $|x| \to +\infty$. Вперше такий результат було отримано в [25] у випадку задачі Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \qquad u|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Там було доведено, що задача (1) має єдиний класичний розв'язок в при додатковій умові на його поведінку на нескінченності:

$$|u(x,t)| \leqslant A\, e^{a|x|^2}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T], \tag{2}$$

де a, A — сталі (залежні від u). Також було показано, що ця умова є суттєвою, а точніше, було доведено, що задача (1) з $u_0 \equiv 0$ має нетривіальні розв'язки із зростанням

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35D30, 35K25, 35K30, 35K35, 35K55.

$Ae^{a|x|^{2+\varepsilon}}$ при $|x| \to +\infty$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Зауважимо, що обмеження (2) можна інтерпретувати як аналог крайової умови на нескінченності. Подібні результати для як для лінійних, так і нелінійних параболічних рівнянь з широких класів були отримані в [2, 9, 14, 20, 24] та інших. Також відмітимо, що для розв'язності мішаних задач для згаданих вище параболічних рівнянь потрібно накласти певні обмеження щодо поведінки вхідних даних при $|x| \to +\infty$. Зокрема, у статті [25] було показано, що класичний розв'язок задачі (1), (2) існує, якщо u_0 задовольняє умову:

$$|u_0(x)| \leqslant B\, e^{b|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де b, B — які-небудь сталі.

Однак існують нелінійні параболічні рівняння, для яких відповідні мішані задачі однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності. Вперше такий результат було отримано в [10] для рівняння

$$u_t - \Delta u + |u|^{p-2}u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T],$$

де Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n$, $p > 2$ — стала. Пізніше подібні результати були отримані для інших нелінійних параболічних рівнянь, зокрема, в роботах [**?**, 1, 3–5, 8, 10, 13, 19].

Нелінійні диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності виникають при математичному моделюванні різних природних процесів. Зокрема, ці рівняння описують електрореологічні потоки речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у провідниках зі змінним полем температури (див. [22]). Такі рівняння інтенсивно вивчалися в [6, 7, 11, 16, 18, 21, 23] та багатьох інших роботах. При цьому використовувалися узагальнення просторів Лебега і Соболєва (див. [12, 15]).

У даній роботі доведено однозначну розв'язність мішаної задачі для анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності в необмежених областях без умов нескінченності. Як нам відомо, раніше мішані задачі для досліджуваних нами рівнянь не розглядалися.

Робота складається зі вступу і трьох розділів. В першому з них даємо постановку задачі і формулювання основного результату. В другому розділі наводимо допоміжні твердження, які використанні в третьому розділі для обґрунтування основного результату.

1 Постановка задачі і формулювання основного результату

Нехай n, m — натуральні числа, M — підмножина множини $\{0, 1, \ldots, m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$, і $M_0 := M \setminus \{0\}$. Позначимо через N кількість мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ розмірності n (впорядкованих наборів з n цілих невід'ємних чисел), довжини яких $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ є елементами множини M. Нехай $\mathbb{R}^n$ — лінійний простір, елементами якого є впорядковані набори дійсних чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і на якому введена норма $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Через $\mathbb{R}^N$ позначаємо лінійний простір, складений з впорядкованих наборів з N дійсних чисел $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \ldots, \xi_\alpha, \ldots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k := \min\{j \mid \alpha_j \neq \beta_j\}$). Тут і далі $\widehat{0} = (0, \dots, 0)$ — мультиіндекс, складений з нулів. Покладемо $|\xi| := \Big(\sum\limits_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^2\Big)^{1/2}$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Нехай Ω — необмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою поверхнею і позначимо через ν одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Нехай $T > 0$ — яке-небудь фіксоване число. Приймемо

$$Q := \Omega \times (0, T), \quad \Sigma := \Gamma \times (0, T).$$

Розглянемо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t + \sum_{|\alpha| \in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, \delta u) = \sum_{|\alpha| \in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{3}$$

крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{4}$$

та початкову умову

$$u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

де $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$, $|\alpha| \in M$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ — задані функції, які задовольняють певні умови, про які буде сказано пізніше. Тут і далі для функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ позначаємо через δv впорядкований набір з похідних $D^\alpha v \equiv \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} v$ функції v порядків $|\alpha| \in M$ (правило впорядкування таке ж, як для компонентів векторів $\xi \in \mathbb{R}^N$).

Далі сформульовану вище *мішану задачу для рівняння* (3) *з крайовими умовами* (4) *і початковою умовою* (5) коротко називатимемо *задачею* (3) — (5).

Ми будемо розглядати узагальнені розв'язки задачі (3) — (5), а для цього введемо необхідні позначення і зробимо відповідні припущення щодо вхідних даних цієї задачі.

Спочатку введемо потрібні нам далі *функційні простори.* Нехай G — яка-небудь область в $\mathbb{R}^n$, $r : G \to \mathbb{R}$ — вимірна функція така, що $r(x) \geq 1$ для м.в. $x \in G$, причому, якщо $r(x) > 1$ для майже всіх $x \in G$, то $r'(x)$, $x \in G$, — функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in G$. Під $L_{r(\cdot)}(G)$ розуміємо лінійний простір (класів) вимірних функцій $v : G \to \mathbb{R}$, для яких функціонал $\rho_{G,r}(v) := \int\limits_G |v(x)|^{r(x)}\, dx$ приймає скінчені значення, з нормою $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leq 1\}$. Цей простір є банаховим і його називають *узагальненим простором Лебега* або *простором Лебега зі змінним показником* (див., наприклад, [12]). Зауважимо, що коли $r(x) = r_0 \equiv \mathrm{const} \geq 1$ для м.в. $x \in G$, то $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G)} = \|\cdot\|_{L_{r_0}(G)}$. Відомо, що якщо $1 < \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x \in G} r(x) \leq \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in G} r(x) < \infty$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(G)$ можна ототожнити з $L_{r'(\cdot)}(G)$. Аналогічно як $L_{r(\cdot)}(G)$ визначаємо простір $L_{r(\cdot)}(D)$, де $D = G \times (0, T)$, використовуючи функціонал $\rho_{D,r}(w) := \iint\limits_D |w(x, t)|^{r(x)}\, dxdt$ замість $\rho_{G,r}(v)$.

Через $Bd(\Omega)$ позначимо множину всеможливих обмежених підобластей області Ω. Нехай $p : \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна функція така, що $p(x) \geq 1$ для м.в. $x \in \Omega$, причому, якщо $p(x) > 1$ для майже всіх $x \in \Omega$, то $p'(x)$, $x \in \Omega$, — функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Через $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначаємо лінійний простір (класів) вимірних функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}$, звуження яких на довільну область $\Omega' \in Bd(\Omega)$ належать $L_{p(\cdot)}(\Omega')$, із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega')}\,|\,\Omega' \in Bd(\Omega')\}$. Цей простір є повним лінійним локально опуклим простором. Так само як $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ вводимо повний лінійний локально опуклий простір $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega'\times(0,T))}\,|\,\Omega' \in Bd(\Omega')\}$. Зауважимо, що послідовність $\{v_l\}_{l=1}^{\infty}$ *слабко* збігається до v в $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ (відповідно, в $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$), якщо для будь-якої області $\Omega' \in Bd(\Omega)$ послідовність $\{v_l|_{\Omega'}\}_{l=1}^{\infty}$ (відповідно, $\{v_l|_{\Omega'\times(0,T)}\}_{l=1}^{\infty}$) збігається до $v|_{\Omega'}$ (відповідно, до $v|_{\Omega'\times(0,T)}$) слабко в $L_{p(\cdot)}(\Omega')$ (відповідно, в $L_{p(\cdot)}(\Omega' \times (0,T))$).

Також введемо простір $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) := \{v \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\,\big|\,D^\alpha v \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ |\alpha| \leq m\}$, який із системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{H^m(\Omega')}\,\big|\,\Omega' \in Bd(\Omega)\}$ є повним лінійним локально опуклим простором. Тут і далі $H^m(\Omega') := \{v \in L_2(\Omega')\,\big|\ D^\alpha v \in L_2(\Omega'),\ |\alpha| \leq m\}$ — стандартний простір Соболєва з нормою $\|v\|_{H^m(\Omega')} := \Big(\int_{\Omega'}\sum_{|\alpha|\leq m}|D^\alpha v|^2\,dx\Big)^{1/2}$. Послідовність $\{v_j\}$ збігається до v в просторі $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, якщо послідовність $\{v_j\big|_{\Omega'}\}$ збігається до $v\big|_{\Omega'}$ в просторі $H^m(\Omega')$ для будь-якої $\Omega' \in Bd(\Omega)$. Нехай $C^m_c(\Omega)$ — лінійний простір, складений з m раз неперервно диференційовних і фінітних на Ω функцій, а $C^m_c(\overline{\Omega})$ — лінійний простір, складений з m раз неперервно диференційовних на $\overline{\Omega}$ функцій, які мають обмежені носії, тобто їх носії є компактними множинами в $\overline{\Omega}$. Через $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначимо замикання простору $C^m_c(\Omega)$ в $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, а через $\overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega)$ — підпростір простору $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, складений з функцій, які мають обмежений носій.

Будемо розглядати простір $H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) := \{w \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\,\big|\,D^\alpha w \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\ |\alpha| \leq m\}$, який із системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{H^{m,0}(\Omega'\times(0,T))}\,\big|\,\Omega' \in Bd(\Omega)\}$ є повним лінійним локально опуклим простором. Тут і далі $H^{m,0}(\Omega' \times (0,T)) := \{w \in L_2(\Omega' \times (0,T))\,\big|\,D^\alpha w \in L_2(\Omega' \times (0,T)),\ |\alpha| \leq m\}$ — стандартний простір Соболєва з нормою $\|v\|_{H^{m,0}(\Omega'\times(0,T))} := \Big(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega'}\sum\limits_{|\alpha|\leq m}|D^\alpha v|^2\,dxdt\Big)^{1/2}$. Послідовність $\{w_j\}$ збігається до w в просторі $H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, якщо послідовність $\{w_j\big|_{\Omega'\times(0,T)}\}$ збігається до $w\big|_{\Omega'\times(0,T)}$ в просторі $H^{m,0}(\Omega' \times (0,T))$ для будь-якої $\Omega' \in Bd(\Omega)$. Через $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ позначимо підпростір простору $H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, складений з функцій w таких, що $w(\cdot,t) \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ для майже всіх $t \in (0,T)$.

Під простором $C\big([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$ розумітимемо простір функцій $w(x,t)$, $(x,t) \in Q$, таких, що для довільної обмеженої підобласті Ω' області Ω (тобто $\Omega' \in Bd(\Omega)$) їх звуження на множину $\Omega' \times (0,T)$ належить простору $C\big([0,T]; L_2(\Omega')\big)$ з нормою $\|w\|_{C\left([0,T];L_2(\Omega')\right)} := \max_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{L_2(\Omega')}$. Простір $C\big([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$ є повним лінійним локально опуклим простором із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{C\left([0,T];L_2(\Omega')\right)}\,|\,\Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Тепер перейдемо до умов на вхідні дані досліджуваної задачі.

Нехай

(P) $p : \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна функція така, що

$$p^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x) > 2\,, \qquad p^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) < \infty.$$

Під $\mathbb{A}_p$, де p — функція, що задовольняє умову **(P)**, розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори $(a_\alpha) := (a_{\widehat{0}}, \ldots, a_\alpha, \ldots)$ з N визначених на $Q \times \mathbb{R}^N$ дійснозначних функцій, які пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M та впорядковані лексикографічно, причому компоненти набору (a_α) задовольняють умови:

($\mathbf{A_1}$) для кожного $\alpha\,, |\alpha| \in M$, функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_\alpha(x,t,\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ є неперервною, а для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ функція $a_\alpha(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною; крім того, $a_\alpha(x,t,0) = 0$, $|\alpha| \in M$, для майже всіх $(x,t) \in Q$;

($\mathbf{A_2}$) для майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ виконуються нерівності

$$|a_{\widehat{0}}(x,t,\xi)| \le h_{\widehat{0}}(x,t)\left(|\xi|^{2/p'(x)} + |\xi_{\widehat{0}}|^{p(x)-1}\right) + g_{\widehat{0}}(x,t),$$

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \le h_\alpha(x,t)|\xi| + g_\alpha(x,t), \quad |\alpha| \in M_0,$$

де $h_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $|\alpha| \in M$, $g_{\widehat{0}} \in L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $|\alpha| \in M_0$;

($\mathbf{A_3}$) існують сталі $B_1 > 0$ і $B_2 \ge 0$ такі, що для кожного $\alpha, |\alpha| \in M_0$, майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$|a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta)| \le \Big(B_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2 \,+\, B_2|\xi_{\widehat{0}} - \eta_{\widehat{0}}|^2\Big)^{1/2};$$

($\mathbf{A_4}$) існують сталі $K_1 > 0$, $K_2 \ge 0$, $K_3 > 0$ такі, що для майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha)$$
$$\ge K_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2 \,+\, K_2\,|\xi_{\widehat{0}} - \eta_{\widehat{0}}|^2 + K_3\,|\xi_{\widehat{0}} - \eta_{\widehat{0}}|^{p(x)},$$

причому, якщо виконується одна з двох умов: $B_2 > 0$ або $p^+ \ge 2(n+1)/n$, то $K_2 > 0$.

Зауваження 1. *Якщо $M = \{0, m\}$, $p^+ \in (2; 2(n+1)/n)$, то, зокрема, елементами множини $\mathbb{A}_p$ є набори (a_α), компонентами яких є функції $a_{\widehat{0}}(x,t,\xi) := \widetilde{a}_{\widehat{0}}(x,t)|\xi_{\widehat{0}}|^{p(x)-2}\xi_{\widehat{0}}$, $a_\alpha(x,t,\xi) = \widetilde{a}_\alpha(x,t)\xi_\alpha$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, для кожного α, $|\alpha| = m$, де $\widetilde{a}_\alpha$, $|\alpha| \in M$, — вимірні обмежені додатні і відділені від нуля функції. Одному з таких наборів буде відповідати рівняння*

$$u_t + (-\Delta)^m u + \widetilde{a}_{\widehat{0}}(x,t)|u|^{p(x)-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Нехай $\mathbb{F}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ — множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha := (f_{\widehat{0}}, \ldots, f_\alpha, \ldots)$ з N визначених на Q дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як компоненти елементів множини $\mathbb{A}_p$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють умову:
(F) $f_{\widehat{0}} \in L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\ f_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})\ \forall\alpha,\ |\alpha| \in M_0$.

Позначимо

$$\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) := \overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C\big([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big).$$

Скажемо, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до v в $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, якщо для будь-якої області $\Omega' \in Bd(\Omega)$ послідовність $\{v_k\big|_{\Omega'\times(0,T)}\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до $v|_{\Omega'\times(0,T)}$ в $H^{m,0}(\Omega' \times (0,T)) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega' \times (0,T)) \cap C\big([0,T]; L_2(\Omega')\big)$.

Означення 1. *Нехай $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $u_0 \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Узагальненим розв'язком задачі (3) — (5) називається функція $u \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, яка задовольняє початкову умову (5) та інтегральну рівність*

$$\iint\limits_{Q} \Big[-u\,\psi\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u)\, D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt = \iint\limits_{Q} \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha\psi\varphi\,dxdt \tag{6}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{m}_{c}(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$.

Нас буде цікавити існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (3) — (5). Для формулювання відповідного результату і його обґрунтування будемо використовувати такі позначення: для довільного $R > 0$

$$\Omega_R \ \text{— зв'язна компонента множини}\ \ \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x| < R\},$$

$$Q_R := \Omega_R \times (0,T), \quad \Sigma_R := \Gamma_R \times (0,T).$$

Теорема 1. *Нехай p задовольняє умову $(\mathbf{P})$, $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $u_0 \in L_{2,loc}(\overline{\Omega})$. Тоді задача (3) — (5) має єдиний узагальнений розв'язок і він для будь-яких R, R_0 таких, що $0 < R_0 \le R/2$, $R \ge 1$, задовольняє оцінку*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha u(x,t)|^2 + K_2|u(x,t)|^2 + |u(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dxdt$$

$$\le C_1\Big\{ R^{n-\frac{2q}{q-2}} + \iint\limits_{Q_R} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|f_\alpha(x,t)\big|^2 + \big|f_{\widehat{0}}(x,t)\big|^{p'(x)}\Big]\,dxdt + \int\limits_{\Omega_R} \big|u_0(x)\big|^2\,dx\Big\}, \tag{7}$$

де $q = p^+$, якщо $K_2 = 0$, і $q \in (2; p^-] \cup \{p^+\}$ — яке-небудь, якщо $K_2 > 0$; C_1 — додатна стала, яка залежать тільки від $B_1, B_2, K_1, K_2, K_3,\ p^-, p^+, n, m, q$.

2 Допоміжні твердження

В цьому розділі наведемо твердження, які використовуються в наступному розділі для доведення основного результату.

Твердження 1 ([12, 15])**.** *Для довільного $R > 0$ і будь-якої функції $v \in L_{p(\cdot)}(Q_R)$ правильні нерівності*

$$\min\left\{\big(\rho_{p,R}(v)\big)^{1/p^-}, \big(\rho_{p,R}(v)\big)^{1/p^+}\right\} \le \|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)} \le \max\left\{\big(\rho_{p,R}(v)\big)^{1/p^-}, \big(\rho_{p,R}(v)\big)^{1/p^+}\right\},$$

$$\min\left\{\big(\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)}\big)^{p^-}, \big(\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)}\big)^{p^+}\right\} \le \rho_{p,R}(v) \le \max\left\{\big(\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)}\big)^{p^-}, \big(\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)}\big)^{p^+}\right\},$$

де

$$\rho_{p,R}(v) := \iint\limits_{Q_R} |v(x,t)|^{p(x)}\,dxdt, \quad \|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)} := \inf\{\lambda > 0 \,|\, \rho_{p,R}(v/\lambda) \le 1\}.$$

Лема 1 (лема 1, [6])**.** *Нехай $R_* \ge 1$, $v \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_{\widehat{0}} \in L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $|\alpha| \in M$, такі, що*

$$\iint\limits_{Q} \big[-v\psi\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha \psi\varphi\big]\,dxdt = 0$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\mathrm{supp}\,\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$.

Тоді $v \in C\big([0,T]; L_2(\Omega_R)\big)$ $\forall\ R \in (0, R_*)$ і для довільних функцій $\theta \in C^1([0,T])$, $w \in C^m_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, $\mathrm{supp}\,w \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, та будь-яких чисел t_1, t_2, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, правильна рівність

$$\theta(t_2)\int\limits_\Omega |v(x,t_2)|^2\,w(x)\,dx \,-\, \theta(t_1)\int\limits_\Omega |v(x,t_1)|^2\,w(x)\,dx \,-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |v(x,t)|^2\,w(x)\,\theta'(t)\,dxdt \,+\, 2\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha\,D^\alpha(v\,w)\,\theta\,dxdt \,= 0. \tag{8}$$

Зауваження 2. *Якщо $v\big|_{\Omega_{R_*}\times(0,T)} \in L_2\big(0,T; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_{R_*})\big)$ і виконується умова леми 1, то $v \in C\big([0,T]; L_2(\Omega_{R_*}\big)$ і виконується рівність (8) з $w \equiv 1$. Це легко випливає з доведення леми 1.*

Лема 2. *Нехай $R_* \ge 1$, $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$ і для кожного $l \in \{1,2\}$ функції $(f_{\alpha,l}) \in \mathbb{F}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $u_{0,l} \in L_{2,loc}(\overline{\Omega})$ і $u_l \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такі, що виконується початкова умова*

$$u_l(x,0) = u_{0,l}(x)\,, \quad x \in \Omega_{R_*}, \tag{9}$$

та інтегральна рівність

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \Big[-u_l\psi\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_l) D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt = \iint\limits_{Q_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,l} D^\alpha\psi\varphi\,dxdt \tag{10}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$.

Тоді для будь-яких чисел R, R_0 *таких, що* $0 < 2R_0 \le R \le R_*, R \ge 1$, *правильна нерівність*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} \big|u_1(x,t) - u_2(x,t)\big|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|D^\alpha u_1(x,t) - D^\alpha u_2(x,t)\big|^2$$

$$+K_2\big|u_1(x,t) - u_2(x,t)\big|^2 + \big|u_1(x,t) - u_2(x,t)\big|^{p(x)}\Big]\,dxdt$$

$$\le C_1\Big\{R^{n-\frac{2q}{q-2}} + \iint\limits_{Q_R} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t)\big|^2 + \big|f_{\widehat{0},1}(x,t) - f_{\widehat{0},2}(x,t)\big|^{p'(x)}\Big]\,dxdt$$

$$+\int\limits_{\Omega_R} \big|u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)\big|^2\,dx\Big\}, \tag{11}$$

де q *і* C_1 *такі ж, як у теоремі 1.*

Доведення леми 2. Покладемо $v := u_1 - u_2$. З інтегральних тотожностей, отриманих з (10), відповідно, для $l=1$ і $l=2$, дістанемо

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \Big[-v\psi\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} \big(a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big) D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt$$

$$= \iint\limits_{Q_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}) D^\alpha\psi\varphi\,dxdt$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$. Звідси на підставі леми 1 дістанемо

$$\theta(t_2)\int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t_2)|^2\,w(x)\,dx \;-\; \theta(t_1)\int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t_1)|^2\,w(x)\,dx$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t)|^2\,w(x)\,\theta'(t)\,dxdt$$

$$+\,2\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} \big(a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big)\,D^\alpha(v\,w)\,\theta\,dxdt$$

$$= 2\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2})\,D^\alpha(vw)\,\theta\,dxdt, \tag{12}$$

де $\theta \in C^1\big([0,T]\big)$, $w \in C^m_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $t_1, t_2 \in [0,T]$ — довільні.

Нехай R_0 і R — які-небудь числа такі, що $0 < 2R_0 < R \le R_*$, $R \ge 1$. Покладемо

$$\zeta(x) := \begin{cases} (R^2 - |x|^2)/R, & \text{якщо } |x| \le R, \\ 0, & \text{якщо } |x| > R. \end{cases}$$

Візьмемо в (12) $t_1 = 0$, $t_2 = \tau \in (0,T]$, $\theta(t) = 1$, $t \in [0,T]$, $w(x) = \zeta^s(x)$, $x \in \Omega$, де $s > m$ — достатньо велике число (очевидно, що при $s > m$ маємо $\zeta^s \in C_c^m(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp}\zeta^s \subset \overline{\Omega_R}$). У результаті отримаємо рівність

$$\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2 \zeta^s(x)\,dx + 2\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M} \big(a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big)\, D^\alpha(v\,\zeta^s)\,dxdt$$

$$= 2\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2})\, D^\alpha(v\,\zeta^s)\; dxdt + \int\limits_{\Omega_R} \big|u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)\big|^2 \zeta^s(x)\,dx, \tag{13}$$

де $Q_R^\tau := \Omega_R \times (0,\tau)$.

Тепер зауважимо таке. Нехай $\widetilde{v} \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\rm loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \in M_0$, $g_\alpha \in L_{2,\rm loc}(\Omega)$. Очевидно, що

$$\int\limits_\Omega g_\alpha\, D^\alpha(\widetilde{v}\,\zeta^s)\,dx = \int\limits_\Omega g_\alpha\, D^\alpha\widetilde{v}\,\zeta^s\,dx + \int\limits_\Omega g_\alpha \left(D^\alpha(\widetilde{v}\,\zeta^s) \;-\; D^\alpha\widetilde{v}\,\zeta^s\right)dx. \tag{14}$$

З леми 3.1 роботи [1] випливає, що

$$\int\limits_\Omega g_\alpha \left(D^\alpha(\widetilde{v}\,\zeta^s) \;-\; D^\alpha\widetilde{v}\,\zeta^s\right)dx \le \varepsilon \int\limits_\Omega |g_\alpha|^2\zeta^s\,dx + \varepsilon\int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} \big|D^\beta\widetilde{v}\big|^2\Big)\,\zeta^s\,dx$$

$$+\,C_\alpha(\varepsilon)\int\limits_\Omega |\widetilde{v}|^2\,\zeta^{s-2|\alpha|}\,dx, \tag{15}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, $C_\alpha(\varepsilon) > 0$ — стала, яка від R не залежить.

Отож, з (13) на підставі (14), (15) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2\zeta^s(x)\,dx + 2\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M} \big(a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big)\, D^\alpha v\,\zeta^s\,dxdt$$

$$\le \varepsilon \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} \big|a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big|^2\,\zeta^s\,dxdt$$

$$+\,\varepsilon \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} \big|f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}\big|^2\,\zeta^s\;dxdt \;+\; \varepsilon \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big(\sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v|^2\Big)\,\zeta^s\,dxdt$$

$$+\,C_7(\varepsilon)\iint\limits_{Q_R^\tau} |v|^2 \Big(\sum_{i\in M_0} \zeta^{s-2i}\Big)\,dxdt$$

$$+\,2\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M} |f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}|\,|D^\alpha v|\,\zeta^s\;dxdt + \int\limits_{\Omega_R} \big|u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)\big|^2\,\zeta^s(x)\,dx, \tag{16}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, $C_7(\varepsilon) > 0$ — стала, яка від R не залежить.

Оцінимо члени нерівності (16). Використовуючи умову ($\mathbf{A_4}$) та пам'ятаючи, що $v := u_1 - u_2$, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M} \big(a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big)\big(D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2\big)\,\zeta^s\, dxdt$$

$$\geq \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big[K_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v(x,t)|^2 + K_2|v(x,t)|^2 + K_3|v(x,t)|^{p(x)}\Big]\,\zeta^s\, dxdt. \tag{17}$$

Використавши умову ($\mathbf{A_3}$), здобудемо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} \big|a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big|^2 \zeta^s\, dxdt$$

$$\leq (N-1) \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big(B_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v|^2 + B_2|v|^2\Big)\zeta^s\, dxdt. \tag{18}$$

Застосовуючи узагальнену нерівність Коші, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M} |f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}|\,|D^\alpha v|\,\zeta^s\, dxdt \leq \iint\limits_{Q_R^\tau} |f_{\widehat{0},1} - f_{\widehat{0},2}|\,|v|\,\zeta^s\, dxdt$$

$$+\frac{\varepsilon}{2} \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v|^2\,\zeta^s\; dxdt + \frac{1}{2\varepsilon} \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} |f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}|^2\,\zeta^s\; dxdt, \tag{19}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число.

Далі використовуватимемо нерівність Юнга

$$|a\,b| \leq \varepsilon|a|^\gamma + \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma-1}}\,|b|^{\gamma'}, \tag{20}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\gamma > 1$, $\gamma' = \frac{\gamma}{\gamma-1}$.

Оскільки $\varepsilon^{-\frac{1}{\gamma-1}} = (\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{\gamma-1}}$ для $\gamma > 1$, то у випадку $0 < \varepsilon < 1$ функція $(1;+\infty) \ni \gamma \to \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma-1}}$ є спадною.

Нехай $(x,t) \in Q_R$ — яка-небудь точка така, що $v(x,t)$, $p(x)$ визначені і $p^- \leq p(x) \leq p^+$. Покладемо в нерівності Юнга $a = |v(x,t)|^2\,\zeta^{\frac{s}{\gamma}}(x)$, $\quad b = \zeta^{\frac{s}{\gamma'}-2i}(x)$, $\quad \gamma = \frac{p(x)}{2}, \gamma' = \frac{p(x)}{p(x)-2}$, $\varepsilon = \eta_1 \in (0,1)$, $i \in M_0$. У результаті одержимо нерівність

$$|v(x,t)|^2\,\zeta^{s-2i}(x) \;\leq \eta_1\,|v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x) + \eta_1^{-\frac{2}{p(x)-2}}\,\zeta^{s-\frac{2i\,p(x)}{p(x)-2}}(x)$$

$$\leq \eta_1\,|v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x) \;+ \eta_1^{-\frac{2}{p^--2}}\,\zeta^{s-\frac{2i\,p(x)}{p(x)-2}}(x)$$

для майже всіх $(x,t) \in Q_R$. Зінтегруємо її, припустивши, що $s > \frac{2m\,p(x)}{p(x)-2}$ для майже всіх $(x,t) \in Q_R$. У результаті отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2\,\zeta^{s-2i}(x)\,dxdt \leq \eta_1 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x)\,dxdt$$

$$+\eta_1^{-\frac{2}{p^--2}} \iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{\,s-\frac{2ip(x)}{p(x)-2}}(x)\,dxdt, \tag{21}$$

де $\eta_1 \in (0,1)$, $i \in M_0$.

Нехай $q \in (2, p^-]$. Очевидно, що $L_{p(\cdot)}(Q_R) \subset L_q(Q_R)$. Аналогічно попередньому здобудемо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2\,\zeta^{s-2i}(x)\ dxdt \le \eta_1 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^q\,\zeta^s(x)\ dxdt$$

$$+\,\eta_1^{-\frac{2}{q-2}} \iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{\,s-\frac{2i\,q}{q-2}}(x)\,dxdt, \tag{22}$$

де $\eta_1 > 0$, $i \in M_0$, $s > 2iq/(q-2)$.

Також використаємо таку оцінку

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \big|f_{\widehat{0},1}(x,t) - f_{\widehat{0},2}(x,t)\big|\,|v(x,t)|\,\zeta^s(x)\,dxdt \le \eta_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x)\,dxdt$$

$$+\,\eta_2^{-\frac{1}{p^--1}} \iint\limits_{Q_R^\tau} \big|f_{\widehat{0},1}(x,t) - f_{\widehat{0},2}(x,t)\big|^{p'(x)}\,\zeta^s(x)\,dxdt, \tag{23}$$

де $\eta_2 \in (0,1)$ — довільна стала.

З (16) на підставі (17) — (19), (21), (23) при достатньо малих значеннях $\varepsilon, \eta_1, \eta_2$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2\,\zeta^s\,dx \;+\; \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big[K_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v(x,t)|^2 + (2K_2-\sigma)|v(x,t)|^2$$

$$+\,K_3|v(x,t)|^{p(x)}\Big]\,\zeta^s(x)\ dxdt \le C_8 \sum_{i\in M_0} \iint\limits_{Q_R} \zeta^{s-\frac{2i\,p(x)}{p(x)-2}}(x)\ dxdt$$

$$+\,C_9 \iint\limits_{Q_R} \Big(\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t)\big|^2 + \big|f_{\widehat{0},1}(x,t) - f_{\widehat{0},2}(x,t)\big|^{p'(x)}\Big)\zeta^s(x)\ dxdt$$

$$+\int\limits_{\Omega_R} \big|u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)\big|^2\,\zeta^s\,dx, \tag{24}$$

де $s > \frac{2m\,p^-}{p^--2}$ — довільна стала; C_8, C_9 — додатні сталі, які залежать тільки від p^-, p^+, $m, n, B_1, B_2, K_1, K_2, K_3, s$; $\sigma = 0$, якщо $B_2 = 0$, і $\sigma = K_2$, якщо $B_2 > 0$, а отже, за нашим припущенням, $K_2 > 0$.

Зауважимо, що

$$\frac{2m\,p^-}{p^- - 2} \ge \frac{2m\,p(x)}{p(x)-2} \ge \frac{2i\,p(x)}{p(x)-2} \ge \frac{2i\,p^+}{p^+-2} \ge \frac{2p^+}{p^+-2}$$

для майже всіх $(x,t)\in Q$, $i\in M_0$. Легко переконатися, що $0\le\zeta(x)\le R$, коли $x\in\mathbb{R}^n$ та $\zeta(x)\ge R-R_0$ при $|x|\le R_0$. Врахувавши сказане і, зокрема, те, що $0<2R_0\le R\le R_*, R\ge 1$, з (24) отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|v(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_{Q_{R_0}}\Big[K_1\sum_{|\alpha|\in M_0}|D^\alpha v(x,t)|^2+(2K_2-\sigma)\,|v(x,t)|^2$$

$$+K_3\,|v(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dxdt\le C_{11}\,R^{n-\frac{2p^+}{p^+-2}}+$$

$$+C_{12}\iint\limits_{Q_R}\Big(\big|f_{\widehat{0},1}(x,t)-f_{\widehat{0},2}(x,t)\big|^{p'(x)}+\sum_{|\alpha|\in M_0}\big|f_{\alpha,1}(x,t)-f_{\alpha,2}(x,t)\big|^2\Big)\,dxdt$$

$$+\int\limits_{\Omega_R}\big|u_{0,1}(x)-u_{0,2}(x)\big|^2\,dx,\tag{25}$$

де C_{11},C_{12} — додатні сталі, які залежать тільки від $p^-,p^+,m,n,K_1,K_2,K_3,B_1$ та B_2.

З (25) легко отримаємо нерівність (11) з $q=p^+$. Звернемо увагу на те, що до цього часу ми припускали, що $K_2\ge 0$.

Нехай $K_2>0$. Візьмемо яке-небудь $q\in(2,p^-]$. Безпосередньо переконуємося, що для довільної точки $(x,t)\in Q$ такої, що $v(x,t)$ і $p(x)$ визначені і $p^-\le p(x)\le p^+$, правильна нерівність

$$K_2\,|v(x,t)|^2\,+\,K_3\,|v(x,t)|^{p(x)}\ge\,K_4|v(x,t)|^q,\tag{26}$$

де $K_4=\min\{K_2,K_3\}$. Міркуючи аналогічно тому, як це робилося вище, з (16) на підставі (17) — (19), (22), (23) і (26) одержимо (11) з $q\in(2,p^-]$. $\square$

Наслідок 1. *Нехай $R_*\ge 1$, $(a_\alpha)\in\mathbb{A}_p$, $(f_\alpha)\in\mathbb{F}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $u_0\in L_{2,loc}(\overline{\Omega})$. Припустимо, що функція $w\in\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ задовольняє початкову умову*

$$u(x,0)=u_0(x)\,,\quad x\in\Omega_{R_*},$$

та інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_{R_*}}\Big[-w\psi\varphi'+\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(x,t,\delta w)D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt=\iint\limits_{Q_{R_*}}\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha\psi\varphi\,dxdt\tag{27}$$

для будь-яких $\psi\in\overset{\circ}{H}{}^{m,1}_c(\Omega)\cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $supp\,\psi\subset\Omega_{R_*}$, $\varphi\in C^1_c(0,T)$.

Тоді для будь-яких чисел R_0,R таких, що $0<2R_0\le R\le R_*,R\ge 1$, правильна нерівність, яка відрізняється від нерівності (7) тільки тим, що замість u стоїть w.

3 Обґрунтування основного результату

Доведення теореми 1. Нехай k — яке-небудь натуральне число. Нехай u_k — функція з простору $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(Q_k)\cap L_{p(\cdot)}(Q_k)\cap C\big([0,T];L_2(\Omega_k)\big)$, яка задовольняє початкову умову (5) та інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_k}\Big[-u_k\psi\varphi'+\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(x,t,\delta u_k)D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt=\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt\tag{28}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_k) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega_k)$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$.

Доведення існування функції u_k проводиться методом Гальоркіна. Єдиність цієї функції легко довести, врахувавши зауваження 2 та використавши умову $(\mathbf{A_4})$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ продовжимо на $\overline{Q}$ функцію u_k нулем, залишивши за цим продовженням позначення u_k. Покажемо, що послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ містить підпослідовність, яка збігається до узагальненого розв'язку задачі (3) — (5).

Нехай k і l — довільні натуральні числа, причому $1 < k < l$; R_0, R — будь-які дійсні числа такі, що $0 < 2R_0 \le R \le k-1$, $R \ge 1$; q — дійсне число, яке задовольняє відповідні умови з формулювання теореми 1 та умову $n - 2q/(q-2) < 0$. Тоді з леми 2, вибравши $R_* = k-1$, отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_k(x,t) - u_l(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|D^\alpha u_k(x,t) - D^\alpha u_l(x,t)\big|^2$$
$$+ |u_k(x,t) - u_l(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dxdt \le C_1 R^{n-2q/(q-2)}, \tag{29}$$

де $C_1 > 0$ — стала, яка від $k,\ l,\ R_0$ та R не залежать.

Нехай $\varepsilon > 0$ — яке-небудь число. Зафіксуємо довільно вибране значення $R_0 > 0$ і виберемо значення $R \ge \max\{1; 2R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (29) була меншою за ε. Тоді для будь-яких $k \ge R+1$ і $l > k$ ліва частина нерівності (29) менша за ε. Це означає, що послідовність $\big\{u_k\big|_{Q_{R_0}}\big\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(Q_{R_0}) \cap L_{p(\cdot)}(Q_{R_0}) \cap C\big([0,T]; L_2(\Omega_{R_0})\big)$. Оскільки $R_0 > 0$ — довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такої, що

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}). \tag{30}$$

Тепер відмітимо, що на підставі умови $(\mathbf{A_3})$ маємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|a_\alpha(x,t,\delta u_k) - a_\alpha(x,t,\delta u)\big|^2 \Big]\,dxdt$$
$$\le (N-1) \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[B_1 \sum_{|\beta|\in M_0} \big|D^\beta(u_k - u)\big|^2 + B_2|u_k - u|^2\Big]\,dxdt, \quad R_0 > 0. \tag{31}$$

З (30) і (31), оскільки R_0 — довільне, випливає, що

$$a_\alpha\big(\circ,\diamond,\delta u_k(\circ,\diamond)\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_\alpha\big(\circ,\diamond,\delta u(\circ,\diamond)\big) \quad \text{в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad |\alpha| \in M_0. \tag{32}$$

Тепер покажемо, що існує підпослідовність $\big\{u_{k_j}\big\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\big\{u_k\big\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u_{k_j}(\circ,\diamond)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u(\circ,\diamond)\big) \quad \text{слабко в} \quad L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}). \tag{33}$$

Нехай $R_0 > 0$ — яке-небудь число. З наслідку леми 2 для будь-якого $k > R_0 + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) маємо

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} \big|u_k(x,t)\big|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|D^\alpha u_k(x,t)\big|^2 + |u_k(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dxdt \le C_{14}(R_0), \tag{34}$$

де $C_{14}(R_0) > 0$ — стала, яка від k не залежить.

На підставі умови ($\mathbf{A_2}$) і нерівності Гельдера, врахувавши (34), маємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} \big|a_{\widehat{0}}\big(x,t,\delta u_k(x,t)\big)\big|^{p'(x)}\,dxdt \le$$

$$\le \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big|h_{\widehat{0}}(x,t)\big(|\delta u_k(x,t)|^{2/p'(x)} + |u_k(x,t)|^{p(x)-1}\big) + g_{\widehat{0}}(x,t)\Big|^{p'(x)}\,dxdt$$

$$\le \iint\limits_{Q_{R_0}} \big(2\,\big|h_{\widehat{0}}(x,t)\big|^{p(x)} + 1\big)^{\frac{p'(x)}{p(x)}}\big(|\delta u_k(x,t)|^2 + |u_k(x,t)|^{p(x)} +$$

$$+ |g_{\widehat{0}}(x,t)|^{p'(x)}\big)\,dxdt \le C_{15}(R_0), \tag{35}$$

де $C_{15}(R_0) > 0$ — стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

На підставі (30), (35) і умови ($\mathbf{A_1}$), врахувавши рефлексивність простору $L_{p(\cdot)}(Q_{R_0})$, можна зробити висновок про існування підпослідовності $\big\{u_{k_j}\big\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\big\{u_k\big\}_{k=1}^{\infty}$ та функції $\chi_{\widehat{0}} \in L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ таких, що

$$u_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u, \quad a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u_{k_j}(\circ,\diamond,)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u(\circ,\diamond,)\big) \quad \text{майже всюди на} \quad Q, \tag{36}$$

$$a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u_{k_j}(\circ,\diamond)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{\widehat{0}}(\circ,\diamond) \quad \text{слабко в} \quad L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}). \tag{37}$$

З (36) та (37) отримаємо (див. [17]), що

$$\chi_{\widehat{0}}(\circ,\diamond) = a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u(\circ,\diamond)\big). \tag{38}$$

Нехай $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}_{\mathrm{c}}(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$. Для кожного $j \ge j_0$, де $j_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{k_{j_0}}}$, з означення u_{k_j} маємо

$$\iint\limits_{Q} \Big[-u_{k_j}\psi\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_{k_j}) D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt = \iint\limits_{Q} \Big[\sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha\, D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt. \tag{39}$$

Перейдемо в (39) до границі при $j \to +\infty$, врахувавши (30), (32), (37), (38). У результаті отримаємо (6) для заданої функції ψ. Оскільки ψ — довільна функція, то ми довели, що u — узагальнений розв'язок задачі (3) — (5).

Доведемо *єдиність узагальненого розв'язку* досліджуваної задачі. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 — (різні) узагальнені розв'язки задачі (3) — (5). З леми 2 (R_* — будь-яке число) маємо

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2\,dx \le C_1 R^{n-2q/(q-2)}, \tag{40}$$

де R_0, R — довільні сталі такі, що $0 < 2R_0 \le R$, $R \ge 1$, а $q > 0$ — таке, що $n - 2q/(q-2) < 0$ (стала $C_1 > 0$ від R_0 і R не залежать).

Зафіксуємо $R_0 > 0$ і перейдемо в (40) до границі при $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що $u_1 = u_2$ майже скрізь на Q_{R_0}. Оскільки $R_0 > 0$ — довільне число, то звідси маємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Q. Отже, ми довели коректність задачі (3) — (5). $\square$

4 Висновки

Тут ми розглянули один клас анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків, які задані в необмежених за просторовими змінними областях і мішані задачі для яких є однозначно розв'язними без будь-яких обмежень на поведінку розв'язків та зростання вхідних даних на нескінченності. Досліджувані тут рівняння мають змінні показники нелінійності і, відповідно, їх розв'язки беруться з узагальнених просторів Лебега та Соболєва. На наш погляд, вивчений тут клас рівнянь може бути розширеним зі збереженням його основних властивостей.

Список літератури

[**1**] Bernis F. *Elliptic and parabolic semilinear parabolic problems without conditions at infinity.* Arch. Rational Mech. Anal. 1989, **106** (3), 217–241.

[**2**] Benilan Ph., Grandall M.G., Pierre M. *Solutions of the porous medium equations in R^n under optimal conditions on initial values.* Indiana Univ. Math. J. 1984, **33** (1), 51–87.

[**3**] Boccardo L., Gallouët Th., Vazquez J.L. *Solutions of nonlinear parabolic equations without growth restrictions on the data*, Electronic J. Diff. Eq. 2001, **60**, 1–20.

[**4**] Bokalo M.M. *Boundary value problems for semilinear parabolic equations in unbounded domains without conditions at infinity.* Siberian Math. J. 1996, **37** (5), 860–867.

[**5**] Bokalo N.M. *The well-posedness of the first boundary value problem and the Cauchy problem for some quasilinear parabolic systems without conditions at infinity.* J. Math. Sci. 2006, **135** (1), 2625–2636.

[**6**] Бокало М. М., Паучок І.Б. *Коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності.* Математичні студії 2006, **24** (1), 25–48.

[**7**] Bokalo M.M., Buhrii O.M., Mashiyev R.A. *Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity.* J. Nonl. Evol. Eq. Appl. 2013, **6**, 67–87.

[**8**] Bokalo M., Buhrii O., Hryadil N. *Initial-boundary value problems for nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity.* Nonlinear Analysis. Elsevier. USA, 2020, **192**, 1–17.

[**9**] Bokalo M. *Initial-boundary value problems for anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains with conditions at infinity.* Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA) 2022, **30** (1), 98-121. doi 10.15421/142205.

[**10**] Brézis H. *Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without conditions at infinity.* Appl. Math. Optim. 1984, **12** (3), 271–282.

[**11**] Buhrii O., Buhrii N. *Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities.* J. Math. Anal. Appl. 2019, **473**, 695–711.

[**12**] Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Springer, Heidelberg, 2011.

[**13**] Gladkov A., Guedda M. *Diffusion-absorption equation without growth restrictions on the data at infinity.* J. Math. Anal. Appl. 2002, **274** (1), 16–37.

[**14**] Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. *Зображення розв'язків рівняння типу Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині.* Буковинський математичний журнал 2021. **9** (1), 189–199. doi.org/10.31861/bmj2021.01.16.

[**15**] Kováčik O., Rákosnı́c J. *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*. Czechoslovak Mathematical Journal 1991, **41** (116), 592–618.

[**16**] Kováčik O. *Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$*. Fasciculi Mathematici. 1995, **25**, 87–94.

[**17**] Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Paris (France): Dunod Gauthier-Villars, 1969.

[**18**] Mashiyev R. A., Buhrii O. M. *Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 2011, **377**, 450–463.

[**19**] Marchi C., Tesei A. *Higher-order parabolic equations without conditions at infinity.* J. Math. Anal. Appl. 2002, **269**, 352–368.

[**20**] Oleinik O.A., Iosifyan G.A. *An analog of Saint-Venant principle and uniqueness of the solutions of the boundary-value problems in unbounded domains for parabolic equations.* Usp. Mat. Nauk 1976, **31** (6), 142–166. (in Russian)

[**21**] Rădulescu V., Repovš D., *Partial differential equations with variable exponents: variational methods and qualitative analysis.* CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2015.

[**22**] Růžička M. Electroreological fluids: modeling and mathematical theory. Springer-Verl., Berlin, 2000.

[**23**] Samokhin V. N. *On a class of equations that generalize equations of polytropic filtration.* Diff. Equat. 1996, **32** (5), 648–657. (in Russian)

[**24**] Shishkov A.E. *The solvability of the boundary-value problems for quasilinear elliptic and parabolic equations in unbounded domains in the classes of functions growing at the infinity.* Ukr. Math. J. 1985, **47** (2), 277–289. (in Russian)

[**25**] Tikhonov A.N. *Théoremes d'unicité pour l'équation de la chaleur.* Mat. Sb. 1935, **42** (2), 199–216.

Список літератури

[**1**] Bernis F. *Elliptic and parabolic semilinear parabolic problems without conditions at infinity.* Arch. Rational Mech. Anal. 1989, **106** (3), 217–241.

[**2**] Benilan Ph., Grandall M.G., Pierre M. *Solutions of the porous medium equations in R^n under optimal conditions on initial values.* Indiana Univ. Math. J. 1984, **33** (1), 51–87.

[**3**] Boccardo L., Gallouët Th., Vazquez J.L. *Solutions of nonlinear parabolic equations without growth restrictions on the data*, Electronic J. Diff. Eq. 2001, **60**, 1–20.

[**4**] Bokalo M.M. *Boundary value problems for semilinear parabolic equations in unbounded domains without conditions at infinity.* Siberian Math. J. 1996, **37** (5), 860–867.

[**5**] Bokalo N.M. *The well-posedness of the first boundary value problem and the Cauchy problem for some quasilinear parabolic systems without conditions at infinity.* J. Math. Sci. 2006, **135** (1) , 2625–2636.

[**6**] Bokalo M.M., Pauchok I.B. *On the well-posedness of a Fourier problem for nonlinear parabolic equations of higher order with variable exponents of nonlinearity.* Matematychni Studii 2006, **26** (1), 25–48. (in Ukrainian)

[**7**] Bokalo M.M., Buhrii O.M., Mashiyev R.A. *Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity.* J. Nonl. Evol. Eq. Appl. 2013, **6**, 67–87.

[**8**] Bokalo M., Buhrii O., Hryadil N. *Initial-boundary value problems for nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity.* Nonlinear Analysis. Elsevier. USA, 2020, **192**, 1–17.

[**9**] Bokalo M. *Initial-boundary value problems for anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains with conditions at infinity.* Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA) 2022, **30** (1), 98-121. doi 10.15421/142205.

[**10**] Brézis H. *Semilinear equations in* $\mathbb{R}^N$ *without conditions at infinity.* Appl. Math. Optim. 1984, **12** (3), 271–282.

[**11**] Buhrii O., Buhrii N. *Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities.* J. Math. Anal. Appl. 2019, **473**, 695–711.

[**12**] Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Springer, Heidelberg, 2011.

[**13**] Gladkov A., Guedda M. *Diffusion-absorption equation without growth restrictions on the data at infinity.* J. Math. Anal. Appl. 2002, **274** (1), 16–37.

[**14**] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *Representation of solutions of Kolmogorov type equations with increasing coefficients and degenerations on the initial hyperplane* Bukovinian. Math. J. 2021, **9** (1), 189–199. doi.org/10.31861/bmj2021.01.16. (in Ukrainian)

[**15**] Kováčik O., Rákosníc J. *On spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{k,\,p(x)}$. Czechoslovak Mathematical Journal 1991, **41** (116), 592–618.

[**16**] Kováčik O. *Parabolic equations in generalized Sobolev spaces* $W^{k,p(x)}$. Fasciculi Mathematici. 1995, **25**, 87–94.

[**17**] Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Paris (France): Dunod Gauthier-Villars, 1969.

[**18**] Mashiyev R. A., Buhrii O. M. *Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 2011, **377**, 450–463.

[**19**] Marchi C., Tesei A. *Higher-order parabolic equations without conditions at infinity.* J. Math. Anal. Appl. 2002, **269**, 352–368.

[**20**] Oleinik O.A., Iosifyan G.A. *An analog of Saint-Venant principle and uniqueness of the solutions of the boundary-value problems in unbounded domains for parabolic equations.* Usp. Mat. Nauk 1976, **31** (6), 142–166. (in Russian)

[**21**] Rădulescu V., Repovš D., *Partial differential equations with variable exponents: variational methods and qualitative analysis.* CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2015.

[**22**] Růžička M. Electroreological fluids: modeling and mathematical theory. Springer-Verl., Berlin, 2000.

[**23**] Samokhin V. N. *On a class of equations that generalize equations of polytropic filtration.* Diff. Equat. 1996, **32** (5), 648–657. (in Russian)

[**24**] Shishkov A.E. *The solvability of the boundary-value problems for quasilinear elliptic and parabolic equations in unbounded domains in the classes of functions growing at the infinity.* Ukr. Math. J. 1985, **47** (2), 277–289. (in Russian)

[**25**] Tikhonov A.N. *Théoremes d'unicité pour l'équation de la chaleur.* Mat. Sb. 1935, **42** (2), 199–216.

Надійшло 07.11.2022

Bokalo M. M. *Initial-boundary value problem for higher-orders nonlinear parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 59–76.

Initial-boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains with respect to the spatial variables were studied by many authors. As is well known, to guarantee the uniqueness of the solution of the initial-boundary value problems for linear and some nonlinear parabolic equations in unbounded domains we need some restrictions on solution's behavior as $|x| \to +\infty$ (for example, solution's growth restriction as $|x| \to +\infty$, or belonging of solution to some functional spaces). Note that we need some restrictions on the data-in behavior as $|x| \to +\infty$ to solvability of the initial-boundary value problems for parabolic equations considered above.

However, there are nonlinear parabolic equations for which the corresponding initial-boundary value problems are unique solvable without any conditions at infinity.

Nonlinear differential equations with variable exponents of the nonlinearity appear as mathematical models in various physical processes. In particular, these equations describe electroreological substance flows, image recovering processes, electric current in the conductor with changing temperature field. Nonlinear differential equations with variable exponents of the nonlinearity were intensively studied in many works. The corresponding generalizations of Lebesgue and Sobolev spaces were used in these investigations.

In this paper we prove the unique solvability of the initial–boundary value problem without conditions at infinity for some of the higher-orders anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity. An a priori estimate of the generalized solutions of this problem was also obtained.

Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 2, 77–89 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №2, 77–89

Городецький В.В., Мартинюк О.В.

Властивості розв'язків рівняння теплопровідності з дисипацією

Доведено коректну розв'язність задачі Коша для рівняння теплопровідності з дисипацією, коли початковою функцією є елемент простору $(S^{1/2}_{1/2})'$.

Ключові слова і фрази: задача Коші, рівняння теплопровідності, гармонійний осцилятор, коректна розв'язність, функції Ерміта.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці
e-mail: *o.martynyuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Теорія задачі Коші для рівнянь з частинними похідними параболічного типу бере свій початок, як відомо, із дослідження властивостей розв'язків рівняння теплопровідності. Фундаментальним розв'язком такого рівняння є функція

$$G(t,x) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \exp\{-x^2/(4t)\}, \ t>0, x\in\mathbb{R}.$$

Сама ця функція, як функція x (при кожному $t>0$) є елементом простору $S^{1/2}_{1/2}$. Елементами такого простору є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції, які разом з усіма своїми похідними спадають при $|x|\to+\infty$ як $\exp\{-ax^2\}$, $x\in\mathbb{R}$, $a>0$. Граничне значення $G(t,x)$ при $t\to+0$ і фіксованому $x\in\mathbb{R}$ (δ-функція Дірака) існує вже у просторі $(S^{1/2}_{1/2})'$ усіх лінійних і неперервних функціоналів, заданих на $S^{1/2}_{1/2}$. Цей факт дозволив встановити, що $(S^{1/2}_{1/2})'$ збігається із множиною початкових значень для постановки задачі Коші для рівняння теплопровідності, при яких розв'язки такої задачі є нескінченно диференційовними за змінною x функціями. Аналогічна ситуація має місце і у випадку рівнянь параболічного типу загальнішого вигляду (М.Л. Горбачук, В.І. Горбачук, О.І. Кашпіровський, П.І. Дудников та ін. [1–5]).

У цій роботі досліджуються властивості розв'язків рівняння теплопровідності з дисипацією, яке пов'язане з гармонійним осцилятором – оператором $A=-d^2/dx^2+x^2$ (невід'ємним і самоспряженим у $L_2(\mathbb{R})$). При цьому знайдено явний вигляд функції, яка є аналогом фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності. Знайдено формулу, яка описує всі нескінченно диференційовні розв'язки такого

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D15, 30D35, 30J10.

рівняння, доведено коректну розв'язність задачі Коші з початковою функцією – елементом простору $(S_{1/2}^{1/2})'$, при цьому встановлено, що $(S_{1/2}^{1/2})'$ є "максимальним" простором початкових даних задачі Коші, при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за просторовою змінною функціями. Основним засобом дослідження є формальні ряди Ерміта, які ототожнюються з лінійними неперервними функціоналами, заданими на $S_{1/2}^{1/2}$.

1. Ортонормовані многочлени Ерміта. Функції Ерміта. Функція F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ваговою, якщо вона невід'ємна і така, що абсолютно збіжними є інтеграли

$$\alpha_n = \int\limits_{\mathbb{R}} x^n F(x)dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

які називаються степеневими моментами функції F. За F, зокрема, можна взяти функцію $\exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Користуючись методом математичної індукції, можна довести, що

$$(e^{-x^2})^{(n)} = e^{-x^2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}, \ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, функція $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є многочленом степеня n. Цей многочлен називається стандартизованим многочленом Ерміта. Многочлени $\{H_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ ортогональні на $\mathbb{R}$ з ваговою функцією $\exp(-x^2)$, при цьому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x)dx = \sqrt{\pi}2^n n!, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, ортонормовані многочлени Ерміта $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}.$$

Многочлени $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, побудовані за ваговою функцією $F(x) = \exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, утворюють ортонормований базис у просторі $L_2(\mathbb{R}, \exp(-x^2))$. У просторі $L_2(\mathbb{R})$ ортонормований базис утворюють функції Ерміта

$$h_n(x) = e^{-x^2/2}\hat{H}_n(x) = (-1)^n \pi^{-1/4}(n!2^n)^{-1/2} e^{x^2/2}(e^{-x^2})^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

2. Простори основних та узагальнених функцій. Формальні ряди Ерміта

Символом S_β^β, $\beta > 0$ – фіксований параметр, позначають сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists c > 0 \, \exists A > 0 \, \exists B > 0 \, \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \, \forall x \in \mathbb{R} : \ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq cA^k B^m k^{k\beta} m^{m\beta}.$$

Якщо $\beta \geq 1/2$, то простори S_β^β нетривіальні і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини. Якщо $1/2 \leq \beta < 1$, то S_β^β складається з тих і лише тих функцій φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і для яких

$$|\varphi(x+iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\beta} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, \{x, y\} \subset \mathbb{R},$$

де сталі $c, a, b > 0$ залежать лише від функції φ.

Топологічна структура просторах S_β^β визначається так. Символом $S_{\beta,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\beta^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall \overline{A} > A\ \forall \overline{B} > B: \ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \le c\overline{A}^k \overline{B}^m k^{k\beta} m^{m\beta}, \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta,\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k \varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^m k^{k\beta} m^{m\beta}}, \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\beta,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\beta,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\beta^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\beta,A}^{\beta,B}$.

Якщо P – деякий фіксований многочлен, то в просторі S_β^β визначена і неперервна операція множення на P. Звідси, зокрема, випливає, що функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, належать до простору $S_{1/2}^{1/2}$. Справді, $e^{-x^2/2} \in S_{1/2}^{1/2}$, бо $|e^{-z^2}| = e^{-x^2/2+y^2/2}$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$.

Звідси та з характеристики просторів S_β^β, $1/2 \le \beta < 1$, випливає, що $\dfrac{1}{\beta} = 2$, $\dfrac{1}{1-\beta} = 2$, тобто $\beta = \dfrac{1}{2}$. Функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд $P(x)\exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, де P – многочлен Ерміта. Отже, $h_k \in S_{1/2}^{1/2}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$.

Символом $(S_\beta^\beta)'$ позначимо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на S_β^β зі слабкою збіжністю. Елементи простору $(S_\beta^\beta)'$ називатимемо узагальненими функціями. Зазначимо, що S_β^β неперервно вкладається в $(S_\beta^\beta)'$, тобто кожну основну функцію $\varphi \in S_\beta^\beta$ можна розуміти як регулярну узагальнену функцію $f_\varphi \in (S_\beta^\beta)'$:

$$\langle f_\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi(x)dx, \ \forall \psi \in S_\beta^\beta.$$

Якщо $f \in (S_\beta^\beta)'$, то і $f^{(p)} \in (S_\beta^\beta)'$ для кожного $p \in \{2, 3, 4, \dots\}$, при цьому узагальнена функція $f^{(p)}$ визначається формулою

$$\langle f^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \langle f, \varphi^{(p)} \rangle, \ \forall \varphi \in S_\beta^\beta,$$

(тут символом $\langle f^{(p)}, \cdot \rangle$ позначається дія функціоналу $f^{(p)}$ на основну функцію).

Кожній узагальненій функції $f \in (S_\beta^\beta)'$ відповідає формальний ряд Ерміта $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f) h_k$, де $c_k(f) = \langle f, h_k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Фур'є-Ерміта. Функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, є власними функціями гармонійного осцилятора $A = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2$ – невід'ємно самоспряженого оператора в $L_2(\mathbb{R})$, спектр якого суто дискретний, $\lambda_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – його власні числа.

Із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів у гільбертовому просторі, власні функції якого утворюють ортонормований базис, випливає, що для кожної узагальненої функції $f \in (S_\beta^\beta)'$ її ряд Ерміта збігається до f у просторі $(S_\beta^\beta)'$. При цьому елементи просторів S_β^β, $(S_\beta^\beta)'$ можна охарактеризувати за допомогою їхніх коефіцієнтів Фур'є-Ерміта так [4]:

а) $(f \in S_\beta^\beta) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0\ \exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k(f)| \leq c \exp\{-\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\})$;

б) $(f \in (S_\beta^\beta)') \Leftrightarrow (\forall \mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $|c_k(f)| \leq c \exp\{\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\})$.

Крім того, $S_{\beta/2}^{\beta/2} = H_{\{\beta\}} = \bigcup\limits_{\mu>0} H_{\mu,\beta}$, де $H_{\mu,\beta}$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, для яких при деякому $\mu > 0$

$$\|\varphi\|^2_{H_{\mu,\beta}} := \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)^{1/\beta}} |c_k(\varphi)|^2 < \infty,\ c_k(\varphi) = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Відповідно, $(S_{\beta/2}^{\beta/2})' = H'_{\{\beta\}} = \bigcap\limits_{\mu>0} H'_{\mu,\beta}$, при цьому якщо $f \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, то для довільного $\mu > 0$

$$\|\varphi\|^2_{H'_{\mu,\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\mu(2k+1)^{1/\beta}} |c_k(\varphi)|^2 < \infty,\ c_k(f) = \langle f, h_k\rangle, k \in \mathbb{Z}_+.$$

3. Рівняння теплопровідності з дисипацією

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - x^2 u(t,x),\ (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

яке називатимемо рівнянням теплопровідності з дисипацією. Зауважимо, що рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Au(t,x) = 0,\ (t,x) \in \Omega, \tag{2}$$

де $A = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2$ – гармонійний осцилятор (невід'ємний самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ оператор).

Під розв'язком рівняння (1) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка задовольняє умови: 1) $u(t,\cdot)$ – неперервно диференційовна по t (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$); 2) $u(\cdot,x) \in L_2(\mathbb{R})$ і $u(\cdot,x)$ – двічі неперервно диференційовна функція по x (при кожному фіксованому $t > 0$); 3) $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (1).

Теорема 1. *Функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли вона зображається у вигляді*

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(2k+1)} c_k h_k(x) = \langle f_y, K_{t,x}(y)\rangle, \tag{3}$$

де $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k = f \in (S_{1/2}^{1/2})'$,

$$K_{t,x}(y) = (2\pi \mathrm{sh}(2t))^{-1} \exp\{\mathrm{sh}^{-1}(2t)xy - \frac{1}{2}\mathrm{cth}(2t)(x^2+y^2)\},$$

при цьому $K_{t,x}(\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ (при кожному $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$), $u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t > 0$.

Доведення. Нехай $u(t,x)$ – розв'язок рівняння (1). Оскільки $u(t,x) \in L_2(\mathbb{R})$ при кожному $t \in (0,T]$, а функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, утворюють ортонормований базис у $L_2(\mathbb{R})$, то

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) h_k(x), (t,x) \in \Omega,$$

$$c_k(t) \equiv c_k(u(t,\cdot)) = (u(t,\cdot), h_k)_{L_2(\mathbb{R})}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

причому

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(t)|^2, t \in (0,T].$$

Для відшукання $c_k(t)$ помножимо (2) скалярно на h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$; у результаті прийдемо до співвідношення

$$(u'_t, h_k) + (Au, h_k) = 0.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$ маємо

$$(Au, h_k) = (u, Ah_k) = (u, (2k+1)h_k) = (2k+1)(u, h_k) = (2k+1)c_k(t)$$

(тут враховано, що h_k – власна функція оператора A, а $(2k+1)$ – його власне число). Із диференційовності функції $u(t,x)$ за змінною $t \in (0,T]$ випливає диференційовність функції $c_k(t) = (u(t,\cdot), h_k)$. Отже, функція $c_k(t)$ задовольняє рівняння

$$c'_k(t) + (2k+1)c_k(t) = 0, \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

загальний розв'язок якого має вигляд $c_k(t) = c_k \exp\{-t(2k+1)\}$, $c_k = \text{const}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-t(2k+1)} h_k(x), (t,x) \in \Omega.$$

причому

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 e^{-2t(2k+1)} \leq c^2,$$

де $c^2 = c^2(t) > 0$. Отже,

$$\forall t > 0 \ \exists c = c(t) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ \ |c_k(t)| \leq c e^{t(2k+1)}.$$

Звідси випливає, що ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$ є формальним рядом Ерміта деякої узагальненої функції $f \in (S^{1/2}_{1/2})'$, при цьому

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S^{1/2}_{1/2})', \ c_k = \langle f, h_k \rangle, \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

тобто $c_k = c_k(t)$ – коефіцієнти Ерміта функції $f \in (S^{1/2}_{1/2})'$.

Таким чином,

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{-t(2k+1)}h_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-t(2k+1)}\langle f,h_k(y)\rangle h_k(x)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\langle f_y,h_k(y)\rangle e^{-t(2k+1)}h_k(x).$$

Урахувавши властивості лінійності та неперервності функціонала f, одержимо

$$u(t,x)=\lim_{n\to\infty}\langle f_y,\sum_{k=0}^{n}e^{-t(2k+1)}h_k(y)h_k(x)\rangle=\langle f_y,\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}e^{-t(2k+1)}h_k(x)h_k(y)\rangle=$$

$$=\langle f_y,\sum_{k=0}^{\infty}e^{-t(2k+1)}h_k(x)h_k(y)\rangle\equiv\langle f_y,K_{t,x}(y)\rangle. \tag{4}$$

Оскільки $|h_k(x)h_k(y)|\leq 1$, $\forall k\in\mathbb{Z}_+$, $\forall\{x,y\}\subset\mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-t(2k+1)}h_k(x)h_k(y)$ збігається рівномірно по $\{x,y\}\subset\mathbb{R}$ при $t>0$. Крім того, $K_{t,x}(\cdot)\in S_{1/2}^{1/2}$, бо

$$|c_k(K_{t,x})|=|e^{-t(2k+1)}h_k|\leq e^{-t(2k+1)},\ \forall k\in\mathbb{Z}_+,t>0.$$

Для обґрунтування коректності проведених у (4) перетворень доведемо, що $S_{n,t,x}(y)\to K_{t,x}(y)$ при $n\to\infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2}$, де

$$S_{n,t,x}(y)=\sum_{k=0}^{n}e^{-t(2k+1)}h_k(x)h_k(y).$$

Нагадаємо, що $S_{1/2}^{1/2}=H_{\{1\}}=\bigcup\limits_{\mu>0}H_{\mu,1}$, де $H_{\mu,1}$ – сукупність функцій з простору $S_{1/2}^{1/2}$, для яких при деякому $\mu>0$

$$\|\varphi\|_{H_{\mu,1}}^2=\sum_{k=0}^{\infty}e^{2\mu(2k+1)}|c_k(\varphi)|^2<\infty,\ c_k(\varphi)=(\varphi,h_k)_{L_2(\mathbb{R})},k\in\mathbb{Z}_+.$$

Отже, потрібно довести, що:

1) $S_{n,t,x}\in H_{\mu,1}$ при деякому $\mu>0$ та кожному $n\in\mathbb{N}$ (при фіксованих $t>0$ і $x\in\mathbb{R}$);

2) $\|S_{n,t,x}-K_{t,x}\|_{H_{\mu,1}}\to 0$, $n\to\infty$ при фіксованих $t>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Для доведення 1) зауважимо, що

$$c_k(S_{n,t,x})=\langle S_{n,t,x},h_k\rangle=(S_{n,t,x},h_k)_{L_2(\mathbb{R})}=\begin{cases}\exp\{-t(2k+1)\}, & \text{якщо } k\leq n,\\ 0, & \text{якщо } k>n.\end{cases}$$

Тоді для довільно фіксованого $\mu<t$ маємо:

$$\|S_{n,t,x}\|_{H_{\mu,1}}^2=\sum_{k=0}^{\infty}e^{2\mu(2k+1)}|c_k(S_{n,t,x})|^2=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} e^{-2t(2k+1)} |h_k(x)|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2(t-\mu)(2k+1)} < \infty$$

(тут скористалися тим, що $|h_k(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$). Отже, властивість 1) доведена.

Для доведення 2) досить показати, що

$$\alpha_{n,t,x}(y) := \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-t(2k+1)} h_k(x) h_k(y) \to 0, \ n \to \infty$$

у просторі $H_{\mu,1}$, де $\mu < t$, тобто що

$$\|\alpha_{n,t,x}\|^2_{H_{\mu,1}} \to 0, \ n \to \infty,$$

при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $\alpha_{n,t,x} \in H_{\mu,1} \subset S_{1/2}^{1/2}$, де $0 < \mu < t$ ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ фіксовані), то

$$c_k(\alpha_{n,t,x}) = \langle \alpha_{n,t,x}, h_k \rangle = (\alpha_{n,t,x}, h_k)_{L_2(\mathbb{R})} = \begin{cases} e^{-t(2k+1)}, & \text{якщо } k \geq n, \\ 0, & \text{якщо } k < n. \end{cases}$$

Тоді для $\mu < t$ маємо:

$$\|\alpha_{n,t,x}\|^2_{H_{\mu,1}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} |c_k(\alpha_{n,t,x})|^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} e^{-2t(2k+1)} |h_k|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-2(t-\mu)(2k+1)} \to 0$$

при $n \to \infty$ як залишок збіжного ряду. Цим доведено, що умова 2) виконується.

Далі скористаємося співвідношенням [5]

$$(1-\omega^2)^{-1/2} \exp\left\{ \frac{2xy\omega - (x^2+y^2)\omega^2}{1-\omega^2} \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! 2^k} H_k(x) H_k(y) \omega^k = \pi^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{H}_k(x) \hat{H}_k(y) \omega^k, |\omega| < 1, \{x,y\} \subset \mathbb{R}$$

(ω – довільно фіксований параметр). Покладемо $\omega = \exp\{-2t\}$, $t > 0$. Урахувавши зв'язок між многочленами H_n та $\hat{H}_n$ (див. п. 1), знайдемо, що

$$K_{t,x}(y) = \pi^{-1/2} e^{-(t+x^2/2+y^2/2)(1-e^{-4t})^{-1/2}} \exp\left\{ \frac{2xye^{-2t} - (x^2+y^2)e^{-4t}}{1-e^{-4t}} \right\} =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} (\mathrm{sh}(2t)^{-1/2}) \exp\{\mathrm{sh}^{-1}(2t)xy - \frac{1}{2}\mathrm{cth}(2t)(x^2+y^2)\}.$$

Нехай тепер функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, має вигляд (3). Доведемо, що вона є розв'язком рівняння (1). Справді, оскільки A – невід'ємний самоспряжений оператор у $L_2(\mathbb{R})$, $\sigma(A) = \{2k+1, k \in \mathbb{Z}_+\}$, то спектральна функція E_λ, $\lambda \in [0,\infty)$, є кусково-сталою і має розриви у точках $\lambda_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, причому $E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k}$ – оператор проектування на власний підпростір оператора A, який відповідає власному значенню $\lambda_k = 2k+1$.

Цей підпростір є одновимірним, а відповідна функція Ерміта h_k утворює його базис. Отже,

$$(E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k})\varphi = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})} h_k = c_k(\varphi) h_k,$$

а спектральна функція E_λ, $\lambda \in [0, \infty)$, у цьому випадку має вигляд

$$(E_\lambda \varphi)(x) = \sum_{\lambda_k < \lambda} c_k(\varphi) h_k(x).$$

Звідси та з основної спектральної теореми для самоспряжених операторів випливає, що

$$A\varphi = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda \varphi = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k (E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k})\varphi(x)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \lambda_k c_k(\varphi) h_k(x), \lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$Au(t,x) = \sum_{k=0}^\infty (2k+1) c_k(u(t,x)) h_k(x) = \sum_{k=0}^\infty (2k+1) e^{-t(2k+1)} c_k(y) h_k(x).$$

Функція $u(t,x)$ диференційовна по t (при кожному $x \in \mathbb{R}$). Справді, нехай $t \in [\varepsilon, T]$, де $\varepsilon > 0$. Доведемо, що ряд

$$-\sum_{k=0}^\infty c_k \cdot (2k+1) e^{-t(2k+1)} h_k(x) := \gamma(t,x) \tag{5}$$

збігається рівномірно по t (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$), бо тоді $\partial u(t,x)/\partial t = \gamma(t,x)$, $t \in [\varepsilon, T]$. Оскільки $|h_k(x)| \leq 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, то

$$|-(2k+1) c_k e^{-t(2k+1)} h_k(x)| \leq (2k+1)|c_k| e^{-\varepsilon(2k+1)} \leq \frac{2}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(2k+1)} |c_k|.$$

Оскільки $\sum\limits_{k=0}^\infty c_k h_k = f \in (S_{1/2}^{1/2})'$, то для $\mu = \varepsilon/4$ існує стала $c_\mu > 0$ така, що

$$|c_k| \leq c_\mu e^{\frac{\varepsilon}{4}(2k+1)}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|-(2k+1) c_k e^{-t(2k+1)} h_k(x)| \leq \frac{2}{\varepsilon} c_\mu e^{-\frac{\varepsilon}{4}(2k+1)}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, ряд (5) збігається рівномірно при $t \geq \varepsilon$. Цим доведено, що функція $u(t,x)$ диференційовна по t на відрізку $[\varepsilon, T]$. Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то функція $u(t,x)$ диференційовна по t на проміжку $(0, T]$, при цьому правильним є співвідношення $\partial u(t,x)/\partial t = \gamma(t,x)$, $t \in (0,T]$, $x \in \mathbb{R}$. Звідси вже випливає, що u – розв'язок рівняння (1).

Теорему доведено. $\square$

Наслідок 1. *Нехай* $f \in (S_{1/2}^{1/2})'$. *Тоді*

$$u(t,x) = \langle f_y, K_{t,x}(y)\rangle \to f \text{ при } t \to +0$$

у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Доведення. Символом s позначимо множину всіх послідовностей $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ дійсних чисел з покоординатною збіжністю, які задовольняють умову:

$$\forall \mu > 0 \ \exists c = c(\mu) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |a_k| \le c e^{\mu(2k+1)}.$$

Побудуємо відображення F: $(S_{1/2}^{1/2})' \to s$ так. Кожному $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f) h_k \in (S_{1/2}^{1/2})'$ поставимо у відповідність послідовність $\{c_k(f) = \langle f, h_k\rangle, k \in \mathbb{Z}_+\} \in s$. При цьому різним елементам з $(S_{1/2}^{1/2})'$ відповідають різні елементи з s. Справді, якщо $\{f_1, f_2\} \subset (S_{1/2}^{1/2})'$ і $f_1 \ne f_2$, то існує $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $c_{k_0}(f_1) \ne c_{k_0}(f_2)$; бо у протилежному випадку

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ c_k(f_1) = c_k(f_2),$$

тобто $\langle f_1 - f_2, h_k\rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Нехай

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi) h_k \in S_{1/2}^{1/2}, c_k(\varphi) = (\varphi, h_k), k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi) h_k, n \in \mathbb{N}.$$

Внаслідок лінійності функціоналу $f_1 - f_2$

$$\langle f_1 - f_2, S_n\rangle = \langle f_1 - f_2, \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi) h_k\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi)\langle f_1 - f_2, h_k\rangle = 0.$$

Урахувавши властивість неперервності функціоналу $f_1 - f_2$, а також те, що $S_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2}$, одержимо

$$\langle f_1 - f_2, \varphi\rangle = \langle f_1 - f_2, \lim_{n\to\infty} S_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_1 - f_2, S_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_1 - f_2, \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi) h_k\rangle = 0.$$

Це означає, що $f_1 = f_2$. Отже, відображення

$$F : (S_{1/2}^{1/2})' \ni f \to \{c_k(f) = \langle f, h_k\rangle, k \in \mathbb{Z}_+\} \in s$$

є бієкцією. Більше того, F – ін'єкція. Дійсно, нехай $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\} \in s$. Визначимо функціонал f так: $\langle f, h_k\rangle = a_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ для довільної функції $\varphi \in \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi) h_k \in S_{1/2}^{1/2}$ покладемо, за означенням, $\langle f, \varphi\rangle = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi)$. Функціонал f визначений коректно, оскільки ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi)$ є збіжним. Справді, оскільки $\varphi \in S_{1/2}^{1/2}$, то

$$\exists \mu > 0 \ \exists c > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k(\varphi)| \le c e^{-\mu(2k+1)}$$

і, за умовою,

$$\forall \mu_1 > 0 \ \exists c_1 = c_1(\mu_1) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |a_k| \le c_1 e^{\mu_1(2k+1)}. \tag{6}$$

Взявши $\mu_1 = \mu/2$, одержимо збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi)$. Очевидно, що побудований функціонал f – лінійний. Доведемо його неперервність. Нехай $\{\varphi_n, n \ge 1\} \subset S_{1/2}^{1/2}$ і $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2} = H_{\{1\}} = \bigcup\limits_{\mu>0} H_{\mu,1}$. Це означає, що при деякому $\mu_0 > 0$

$$\|\varphi_n\|^2_{H_{\mu_0,1}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu_0(2k+1)} |c_k(\varphi_n)|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 : \ \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} |c_k(\varphi_n)|^2 < \varepsilon.$$

Звідси випливає, що

$$e^{\mu_0(2k+1)} |c_k(\varphi_n)| < \sqrt{\varepsilon}, \ \forall k \in \mathbb{Z}_+, \ \forall n \ge n_0,$$

або $|c_k(\varphi_n)| < \sqrt{\varepsilon} e^{-\mu_0(2k+1)}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, $\forall n \ge n_0$. Тоді

$$|\langle f, \varphi_n \rangle| = \Big| \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi_n) \Big| \le \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| e^{-\mu_0(2k+1)}.$$

Поклавши в (6) $\mu_1 = \mu_0/2$, прийдемо до нерівності

$$|\langle f, \varphi_n \rangle| \le \sqrt{\varepsilon} c_1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\mu_0}{2}(2k+1)} = c_2 \sqrt{\varepsilon}, \ \forall n \ge n_0.$$

Звідси випливає, що f – неперервний функціонал на $S_{1/2}^{1/2}$, тобто $f \in (S_{1/2}^{1/2})'$, що й потрібно було довести.

Оскільки $u(t, \cdot) \in S_{1/2}^{1/2} \subset (S_{1/2}^{1/2})'$, то

$$F[u(t, \cdot)] = \{e^{-t(2k+1)} c_k(f), k \in \mathbb{Z}_+\} \in s.$$

Оскільки $|e^{-t(2k+1)} c_k(f)| \le |c_k(f)|$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $f \in (S_{1/2}^{1/2})'$, то

$$\forall \mu > 0 \ \exists c = c(\mu) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k(f)| \le c e^{\mu(2k+1)}.$$

Звідки й випливає, що $F[u(t, \cdot)] \in s$. Крім того,

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ e^{-t(2k+1)} c_k(f) \to c_k(f) \text{ при } t \to +0,$$

тобто $F[u(t, \cdot)] \to F[f]$ при $t \to +0$ у просторі s. Тоді

$$u(t, \cdot) = F^{-1}[F[u(t, \cdot)]] \to F^{-1}[F[f]] = f, \ t \to +0,$$

у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Твердження доведено. $\square$

З наслідку 1 випливає, що для рівняння (1) (або (2)) задачу Коші можна ставити так: у множині розв'язків рівняння (1) знайти розв'язок, який задовольняє умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f,\ \ f \in (S_{1/2}^{1/2})' \tag{7}$$

у тому розумінні, що $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Теорема 2. *Задача Коші* (1), (7) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = \langle f_y, K_{t,x,y}\rangle,\ \ (t,x) \in \Omega,$$

при цьому $u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $t > 0$.

Доведення. Із наведених вище результатів випливає, що обґрунтування вимагає властивість єдиності розв'язку та властивість неперервної залежності розв'язку від початкової умови. Функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли вона зображається формулою (3). Якщо в (3) $f = 0$, то $c_k(f) = 0$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$ ($c_k(f) = \langle f, h_k\rangle$). Отже, $u(t,x) = 0$ для $(t,x) \in \Omega$. Звідси випливає єдиність розв'язку задачі (1), (7).

Розв'язок $u(t,x)$ задачі Коші (1), (7) неперервно залежить від початкової функції $f \in (S_{1/2}^{1/2})'$ у такому розумінні. Якщо $\{f, f_n, n \geq 1\} \subset (S_{1/2}^{1/2})'$ і $f_n \to f$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$ (тобто слабко), то $u_n \to u$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

При доведенні наслідку 1 побудовано ізоморфізм F: $(S_{1/2}^{1/2})' \to s$. Тоді F^{-1}: $s \to (S_{1/2}^{1/2})'$. У даному випадку

$$F[u_n] = \{e^{-t(2k+1)}c_k(f_n), k \in \mathbb{Z}_+\}, F[u] = \{e^{-t(2k+1)}c_k(f), k \in \mathbb{Z}_+\},$$

$$F[f_n] = \{c_k(f_n), k \in \mathbb{Z}_+\}, F[f] = \{c_k(f), k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

За умовою $c_k(f_n) \to c_k(f)$ при $n \to \infty$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді $e^{-t(2k+1)}c_k(f_n) \to e^{-t(2k+1)}c_k(f)$ при $n \to \infty$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$, тобто $F[u_n] \to F[u]$ при $n \to \infty$ у просторі s. Звідси вже випливає, що $u_n \to u$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Твердження доведено. □

Зауваження 1. *Нехай* $n \in \{2, 3, \dots\}$ *– фіксоване, тоді [4]*

$$\Big(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\Big)^n \varphi(x) = \sum_{0 \leq p+q \leq 2n} C_{p,q}^n x^p \varphi^{(q)}(x), x \in \mathbb{R}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

при цьому коефіцієнти $C_{p,q}^n$ *задовольняють нерівності*

$$|C_{p,q}^n| \leq 10^n n^{n-\frac{1}{2}(p+q)}.$$

Для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{0 \leq p+q \leq 2n} C_{p,q}^n x^p \frac{\partial^q u(t,x)}{\partial x^q},\ \ (t,x) \in \Omega, \tag{8}$$

правильними є результати, отримані для рівняння (1). *А саме, має місце таке твердження: розв'язком рівняння* (8) *є функція*

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(2k+1)^n} c_k h_k(x) = \langle f_y, \tilde{K}_{t,x}(y)\rangle,$$

де $\tilde{K}_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(2k+1)^n} h_k(x) h_k(y)$, *при цьому* $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_{1/2}^{1/2})'$, $\tilde{K}_{t,x}(\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $t > 0$.

Якщо $f = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})'$, де δ – дельта-функція Дірака, то розв'язок задачі Коші (1), (7) має вигляд

$$u(t,x) = \langle \delta_y, K_{t,x}(y)\rangle = K_{t,x}(0) = (2\pi)^{-1/2}(\mathrm{sh}(2t))^{-1/2} \exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathrm{cth}(2t)x^2\Big\}.$$

Якщо $\alpha \in (0,+\infty) \setminus \{2,3,\dots\}$, то, внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів, з урахуванням того, що спектр гармонійного осцилятора є суто дискретним ($\sigma(A) = \{2k+1, k \in \mathbb{Z}_+\}$), одержимо

$$A^\alpha \varphi = \int_0^\infty \lambda^\alpha dE_\lambda \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^\alpha c_k(\varphi) h_k, \;\; c_k(\varphi) = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})},$$

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi) h_k \in \mathcal{D}(A^\alpha) = \Big\{\varphi : \;\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{2\alpha} |c_k(\varphi)|^2 < \infty\Big\}.$$

Розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + A^\alpha u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Omega,$$

є функція

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(2k+1)^\alpha} c_k h_k \equiv \langle f_y, \Psi_{t,x}(y)\rangle,$$

де

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_\omega^\omega)', \quad \omega = \begin{cases} 1/2, & \alpha \in (1,+\infty) \setminus \{2,3,\dots\}, \\ 1/(2\alpha), & \alpha \in (0,1), \end{cases}$$

$\Psi_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(2k+1)^\alpha} h_k(x) h_k(y)$, $\Psi_{t,x}(\cdot) \in S_\omega^\omega$ при кожному $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $u(t,\cdot) \in S_\omega^\omega$ при кожному $t > 0$, $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $(S_\omega^\omega)'$.

Список літератури

[1] *Horodets'kyi V. V.* The boundary properties of parabolic equation solutions smooth in layer. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 225 p. (in Ukrainian)

[2] *Horodets'kyi V. V.* Evolution equations in countable-normalized spaces of infinitely differentiable functions. - Chernivtsi: Ruta, 2008. - 400 p. (in Ukrainian)

[3] *Horodets'kyi V. V., Martynyuk O. V.* Parabolic pseudodifferential equations with analytic symbols in S type spaces. - Chernivtsi: Tehnodruk, 2019. - 280 p. (in Ukrainian)

[4] *Horbachuk M.L., Horbachuk V.I.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht (Boston) London: Kluwer, 1991. – 374 p.

[5] *Horodets'kyi V. V.* The initial values sets of smooth solutions for differential-operator parabolic equations. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 219 p. (in Ukrainian)

Надійшло 14.11.2022

Horodets'kyi V.V., Martynyuk O.V. *Properties of the equation of heat conduction with dissipation solutions*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 77–89.

This paper investigates the properties of the solutions of the equation of heat conduction with dissipation, which is associated with a harmonic oscillator - the operator $-d^2/dx^2 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ (non-negative and self-adjoint in $L_2(\mathbb{R})$). An explicit form of the function is given, which is analogous to the fundamental solution of the Cauchy problem for the heat conduction equation. A formula that describes all infinitely differentiable (with respect to the variable x) solutions of such an equation was found, well-posedness of the Cauchy problem for the heat conduction equation with dissipation with the initial function, which is an element of the space of generalized functions $(S_{1/2}^{1/2})'$, is established. It is established that $(S_{1/2}^{1/2})'$ is the "maximum" space of initial data of the Cauchy problem, for which the solutions are infinite functions differentiable by spatial variable. The main means of research are formal Hermite series, which are identified with linear continuous functionals defined on $S_{1/2}^{1/2}$.

Городецький В.В., Шевчук Н.М., Колісник Р.С.

Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних рівнянь у просторах типу S

Доведено коректну розв'язність багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з функціями від оператора диференціювання, зокрема, з операторами дробового диференціювання, та початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу S'. Досліджено поведінку розв'язку зазначеної задачі при $t \to +\infty$ у просторах типу S' (слабка стабілізація). Знайдено умову на початкову функцію, при виконанні якої розв'язок стабілізується до нуля рівномірно на $\mathbb{R}$.

Ключові слова і фрази: багатоточкова за часом задача, еволюційні рівняння, задача Коші, оператор Бесселя, параболічні рівняння, топологічна структура, мультиплікатор, згортка, згортувач, фінітна узагальнена функція, перетворення Фур'є.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *v.gorodetskiy@chnu.edu.ua,n.shevchuk@chnu.edu.ua, r.kolisnyk@chnu.edu.ua*

Вступ. У теорії задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь та систем рівнянь на сьогодні одержано досить повні результати щодо коректної розв'язності, інтегрального зображення розв'язків та дослідження їх властивостей. При цьому початкові умови – початкові функції - часто мають особливості у одній або декількох точках і допускають регуляризацію у певних просторах узагальнених функцій типу розподілів Соболєва-Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо. Отже, задача Коші для таких рівнянь має природну постановку і у класах початкових умов, які є узагальненими функціями скінченного або нескінченного порядків.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними параболічного типу або сингулярних параболічних рівнянь з оператором Бесселя (B-параболічних рівнянь [1]) часто використовуються простори типу S, введені І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим в [2]. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними спадають при $|x| \to \infty$ швидше, ніж $\exp\{-a|x|^\alpha\}$, a, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$. У працях [3–8] встановлено, що простори типу S та S' – топологічно спряжені до S, є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовими змінними.

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39B12, 45J05.

Теорія лінійних параболічних та B-параболічних рівнянь з частинними похідними бере свій початок із дослідження рівняння теплопровідності. Класична теорія задачі Коші та крайових задач для таких рівнянь і систем рівнянь побудована в працях І.Г. Петровського, С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, М.І. Матійчука, М.В. Житарашу, А. Фрідмана, С. Теклінда, І.А. Кіпріянова, В.В. Крехівського та ін. Задача Коші з початковими умовами у просторах узагальнених функцій типу розподілів та ультрарозподілів вивчалася Г.Є. Шиловим, Б.Л. Гуревичем, М.Л. Горбачуком, В.І. Горбачук, О.І. Кашпіровським, Я.І. Житомирським, В.В. Городецьким, О.В. Мартинюк та ін.

Узагальненням задачі Коші для таких рівнянь є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f, \tag{1}$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0,\infty)$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші), при цьому умова (1) трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція. Зазначимо, що нелокальна багатоточкова за часом задача відноситься до нелокальних задач для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами з нелокальними умовами, при описі всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач (див., напр., [9–15] огляд результатів, які стосуються нелокальних задач, див. у [15]).

Формальним розширенням класу лінійних параболічних рівнянь є еволюційні рівняння з оператором $\varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$, побудованими за функціями, які задовольняють певну умову. У цій статті досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}. \tag{2}$$

Зауважимо, що до рівнянь (2) відносяться і рівняння параболічного типу з операторами диференціювання "нескінченного порядку" [16], а також рівняння з операторами дробового диференціювання. Встановлено властивості фундаментального розв'язку багатоточкової за часом задачі для рівняння (2), доведено коректну розв'язність зазначеної задачі з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу S', знайдено аналітичне зображення розв'язку. Досліджено поведінку розв'язку $u(t,\cdot)$ при $t \to +\infty$ у просторі узагальнених функцій типу S' (слабка стабілізація), а також рівномірну стабілізацію розв'язку до нуля на $\mathbb{R}$.

1. Простори типу S та S'. І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов ввели в [2] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють умову

$$\exists c = c(\varphi) > 0 \; \exists A = A(\varphi) > 0 \; \exists B = B(\varphi) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \; \forall\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le cA^k B^n m_{kn} \tag{3}$$

де $m_{kn} = k^{k\alpha} n^{n\beta}$, α, $\beta > 0$ – фіксовані параметри.

Введені простори можна охарактеризувати ще й так [2].

S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

де сталі c, a, $B > 0$ залежать лише від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1-\beta$, то S_α^β складається з тих й лише тих функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в комплексну площину $\mathbb{C}$ і для яких

$$|\varphi(x+iy)| \leq c\exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, c, a, b > 0, \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

S_α^1, $\alpha > 0$, складається з функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в деяку смугу $|\mathrm{Im}\, z| < \delta$, $z = x + iy$ (залежну від φ) комплексної площини, при цьому справджується оцінка

$$|\varphi(x+iy)| \leq c\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, c, a > 0, |y| < \delta, x \in \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини.

Топологічна структура в S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, $A, B > 0$, позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову

$$\forall \overline{A} > A, \ \forall \overline{B} > B: \ |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c\overline{A}^k \overline{B}^n k^{k\alpha} n^{n\beta}, \ \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований досконалий простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}}, \ \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Вказану систему норм іноді замінюють еквівалентною їй системою норм

$$\|\varphi\|'_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{\exp\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha}\} |\varphi^{(n)}(x)|}{(B+\rho)^n n^{n\beta}}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, тобто в S_α^β вводиться топологія індуктивної границі просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Отже, збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_\alpha^\beta$ до нуля в просторі S_α^β – це збіжність за топологією одного з просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, до якого належать всі функції φ_ν. Іншими словами (див. [2]), $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ у просторі S_α^β тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{\varphi_\nu^{(n)}, \nu \geq 1\}$ (при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$) збігається при $\nu \to +\infty$ рівномірно до нуля на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і для деяких $c, a, B > 0$, не залежних від ν, справджується нерівність

$$|\varphi_\nu^{(n)}(x)| \leq cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ називається *мультиплікатором* у просторі S_α^β, якщо $g\psi \in S_\alpha^\beta$ для довільної функції $\psi \in S_\alpha^\beta$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором у S_α^β.

Множина $F \subset S_{\alpha}^{\beta}$ називається *обмеженою*, якщо вона міститься в деякому зліченно-нормованому просторі $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ і в ньому обмежена, тобто, для всіх функцій з F справджується оцінка (3) (або (4)) з одними й тими ж сталими $c, A, B > 0$ $(c, B, a > 0)$.

У просторах S_{α}^{β} клас лінійних обмежених операторів збігається з класом лінійних неперервних операторів [2].

У цих просторах визначена і неперервна операція множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргумента T_x: $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$, $\forall \varphi \in S_{\alpha}^{\beta}$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду

$$(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x), h \to 0,$$

справджуються для кожної функції $\varphi \in S_{\alpha}^{\beta}$ в сенсі збіжності за топологією простору S_{α}^{β} (див. [2]).

Простори S_{α}^{β} пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула $F[S_{\alpha}^{\beta}] = S_{\beta}^{\alpha}$, де

$$F[S_{\alpha}^{\beta}] := \Big\{\psi : \ \psi(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \ \varphi \in S_{\alpha}^{\beta}\Big\},$$

при цьому оператор F: $S_{\alpha}^{\beta} \to S_{\beta}^{\alpha}$, $\alpha, \beta > 0$, є неперервним.

Символом P_{ω}, де $\omega \in (0, 1]$ – довільно фіксований параметр, позначимо множину функцій φ: $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, які задовольняють умови: 1) $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 2) $\forall \sigma \in \mathbb{R}$: $\varphi(\sigma) > |\sigma|^{\omega}$, 3) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c_{\varepsilon} > 0$ $\forall \sigma \in \mathbb{R}$: $\varphi(\sigma) \leq c_{\varepsilon} \exp\{\varepsilon |\sigma|^{\omega}\}$, 4) $\exists c_0, B_0 > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \sigma \in \mathbb{R}$: $|\varphi^{(n)}(\sigma)| \leq c_0 B_0^n n!$.

Урахувавши формулу Стірлінга, умову 4) можна записати у вигляді

4$'$) $\exists c_1, B_1 > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \sigma \in \mathbb{R}$: $|\varphi^{(n)}(\sigma)| \leq c_1 B_1^n n^n$

(приклади функцій, які задовольняють умови 1) –4), або 1) – 4$'$), наведемо пізніше).

Лема 1. *Кожна функція $\varphi \in P_{\omega}$ – мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}^{1}$, а також у кожному просторі $S_{1/\omega}^{\gamma}$, де $\gamma > 1$.*

Доведення. Насамперед доведемо, що $\varphi\psi \in S_{1/\omega}^{1}$ для довільної функції $\psi \in S_{1/\omega}^{1}$. Функція ψ, згідно з означенням простору $S_{1/\omega}^{1}$, задовольняє умову

$$\exists a > 0 \ \exists c > 0 \ \exists B > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ \ \forall \sigma \in \mathbb{R} :$$

$$|\psi^{(n)}(\sigma)| \leq c B^n n^n \exp\{-a|\sigma|^{\omega}\}. \tag{5}$$

Урахувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, умови 3), 4$'$), одержимо

$$|(\varphi(\sigma)\psi(\sigma))^{(n)}| = \Big| \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varphi^{(k)}(\sigma) \psi^{(n-k)}(\sigma) \Big| \leq$$

$$\leq |\varphi(\sigma)| \cdot |\psi^{(n)}(\sigma)| + \sum_{k=1}^{n} C_n^k |\varphi^{(k)}(\sigma)| |\psi^{(n-k)}(\sigma)\Big| \leq$$

$$\leq c_1 c_\varepsilon B^n n^n \exp\{\varepsilon|\sigma|^\omega - a|\sigma|^\omega\} + c_1 c_\varepsilon \sum_{k=1}^{n} C_n^k B_1^k k^k B^{n-k}(n-k)^{n-k} \exp\{-a|\sigma|^\omega\}.$$

Взявши $\varepsilon = a/2$, прийдемо до нерівності

$$|(\varphi(\sigma)\psi(\sigma))^{(n)}| \leq \tilde{c}\tilde{B}^n n^n \exp\{-\tilde{a}|\sigma|^\omega\}, \tag{6}$$

де $\tilde{c} = c_1 c_\varepsilon$, $\tilde{B} = \max\{B, B_2\}$, $B_2 = 2\max\{B, B_1\}$, $\tilde{a} = a/2$. З (6) випливає, що $\varphi\psi \in S^1_{1/\omega}$, а також те, що оператор $\psi \to \varphi\psi$ відображає кожну обмежену множину простору $S^1_{1/\omega}$ у обмежену множину цього ж простору, тобто цей оператор є неперервним. Це і означає, що φ – мультиплікатор у просторі $S^1_{1/\omega}$, а також у кожному просторі $S^\gamma_{1/\omega}$, де $\gamma > 1$.

Лему 1 доведено. □

Нехай φ – довільно фіксована функція з класу P_ω. Нагадаємо, що $i\partial/\partial x$ – самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ зі щільною у $L_2(\mathbb{R})$ областю визначення

$$\mathcal{D}(i\partial/\partial x) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) :\ \exists \psi' \in L_2(\mathbb{R})\}.$$

Якщо E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, – спектральна функція оператора $i\partial/\partial x$, то, внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів та операційного числення для таких операторів

$$\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) dE_\lambda \psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}\Big(\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big).$$

Звідси випливає, що $\varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ – самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ оператор. Відомо ([17]), що

$$E_\lambda \psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} \Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau\Big\} e^{-it\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} F[\psi](\sigma) e^{-it\sigma} d\sigma.$$

Отже, $dE_\lambda \psi = \dfrac{1}{2\pi} F[\psi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda$, тобто

$$\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) F[\psi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda = F^{-1}[\varphi(\lambda) F[\psi]].$$

Якщо $\psi \in S_2^{1/\omega}$, то $F[\psi] \in S^2_{1/\omega}$. Оскільки φ – мультиплікатор у просторі $S^2_{1/\omega}$, то $\varphi F[\psi] \in S^2_{1/\omega}$, а $F^{-1}[\varphi F[\psi]] \in S_2^{1/\omega}$. Нехай $\hat{A} := \varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)\Big|_{S_2^{1/\omega}}$ – звуження оператора $\varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ на простір $S_2^{1/\omega}$. Із означення мультиплікатора та властивостей перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що $\hat{A}$: $S_2^{1/\omega} \to S_2^{1/\omega}$ – лінійний, неперервний оператор, який збігається із псевдодиференціальним оператором у просторі $S_2^{1/\omega}$, побудованим за функцією-символом $\varphi \in P_\omega$.

Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю. Елементи простору $(S_\alpha^\beta)'$ називатимемо узагальненими функціями типу ультрарозподілів. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, де $f^{(p)}$ визначається за допомогою формули:

$$\langle f^{(p)}, \psi\rangle := (-1)^p \langle f, \psi^{(p)}\rangle, \forall \psi \in S_\alpha^\beta$$

(тут $\langle f^{(p)}, \psi\rangle$ позначає дію функціонала $f^{(p)}$ на основну функцію ψ). Оскільки в основному просторі S_α^β визначена операція зсуву, то згортку узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ із основною функцією $\psi \in S_\alpha^\beta$ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\rangle = \langle f_\xi, \varphi(x-\xi)\rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi).$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргумента у просторі S_α^β випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ визначається за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \psi\rangle = \langle f, F[\psi]\rangle, \ \forall \psi \in S_\beta^\alpha.$$

Із властивості лінійності і неперервності функціонала f та властивостей перетворення Фур'є основних функцій випливає лінійність і неперервність функціонала $F[f]$, визначеного на просторі основних функцій S_β^α. Отже, перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ є узагальненою функцією, заданою на S_β^α, тобто $F[f] \in (S_\beta^\alpha)'$.

Нехай $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f * \psi \in S_\alpha^\beta$ для довільної функції $\psi \in S_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\psi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \psi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається *згортувачем* у просторі S_α^β. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$ – згортувач у просторі S_α^β, то для довільної функції $\psi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f * \psi] = F[f] \cdot F[\psi]$, при цьому $F[f]$ – мультиплікатор у просторі S_β^α.

2. Багатоточкова за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t + \hat{A}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{7}$$

де $\hat{A} = \varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)|_{S_2^{1/\omega}} = F^{-1}[\varphi F]$, $\varphi \in P_\omega$ (див. п. 1). Під розв'язком рівняння (7) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка володіє властивостями: 1) $u(t,\cdot) \in C^1(0,+\infty)$ при кожному $x \in \mathbb{R}$; 2) $u(\cdot,x) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t \in (0,\infty)$; 3) $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (7).

Для рівняння (7) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (7), який задовольняє умову:

$$\mu u(0,x) - \mu_1 u(t_1,x) - \dots - \mu_m u(t_m,x) = f(x), x \in \mathbb{R}, f \in S_2^{1/\omega}, \tag{8}$$

де $u(0,x) := \lim\limits_{t\to+0} u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,+\infty)$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum\limits_{k=1}^m \mu_k$.

Розв'язок задачі (7), (8) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є, ввівши позначення: $F[u(t,\cdot)] = v(t,\cdot)$. Для функції $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ дістанемо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + \varphi(\sigma)v(t,\sigma) = 0,\ (t,\sigma) \in \Omega, \tag{9}$$

$$\mu v(0,\sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t_k,\sigma) = \tilde{f}(\sigma),\ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c\exp\{-t\varphi(\sigma)\},\ (t,\sigma) \in \Omega, \tag{11}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (10). Підставивши (11) у (10) знайдемо, що

$$c = \tilde{f}(\sigma)\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k\varphi(\sigma)\}\Big)^{-1},\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)]$, $Q(t,\sigma) := Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $Q_1(t,\sigma) = \exp\{-t\varphi(\sigma)\}$, $Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k\varphi(\sigma)\}\Big)^{-1}$. Далі, міркуючи формально, прийдемо до співвідношення:

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x),\ (t,x) \in \Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{i\sigma\xi}d\xi\Big)e^{-i\sigma x}d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big((2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{-i\sigma(x-\xi)}d\sigma\Big)f(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega. \tag{12}$$

Коректність проведених тут перетворень, а, отже, правильність формули (12) випливає з властивостей функції Q, які наведено нижче.

Лема 2. *Для похідних функції $Q_1(t,\sigma)$, $(t,\sigma) \in \Omega$, правильними є оцінки*

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq cA^s t^{\nu s} s^s \exp\{-t|\sigma|^\omega\}, s \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

де $\nu = 0$, якщо $0 < t \leq 1$ і $\nu = 1$, якщо $t > 1$, сталі c, $A > 0$ не залежать від t.

Доведення. Для доведення твердження скористаємось формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\sigma^s F(g(\sigma)) = \sum_{p=1}^{s} \frac{d^p F(g)}{dg^p} \sum \frac{s!}{p_1! \ldots p_l!}\Big(\frac{d}{d\sigma}g(\sigma)\Big)^{p_1} \ldots \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}g(\sigma)\Big)^{p_l}, s \in \mathbb{N} \tag{14}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $p_1+2p_2+\dots+lp_l=s$, $p_1+p_2+\dots+p_l=m$), де покладемо $F=e^g$, $g=-t\varphi(\sigma)$. Тоді

$$D^s_\sigma e^{-t\varphi(\sigma)}=e^{-t\varphi(\sigma)}\sum_{p=1}^{s}\sum\frac{s!}{p_1!\dots p_l!}\Lambda,$$

де символом Λ позначено вираз:

$$\Lambda:=\Big(\frac{d}{d\sigma}(-t\varphi(\sigma))\Big)^{p_1}\Big(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\sigma^2}(-t\varphi(\sigma))\Big)^{p_2}\dots\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}(-t\varphi(\sigma))\Big)^{p_l}.$$

Урахувавши властивості функції $\varphi\in P_\omega$ знайдемо, що

$$|\Lambda|\le c_0^{p_1+\dots+p_l}B_0^{p_1+2p_2+\dots+lp_l}t^{p_1+\dots+p_l}\le\tilde c_0^s t^p B_0^s, \tag{15}$$

де $\tilde c_0=\max\{1,c_0\}$. Скориставшись (15), нерівністю $\varphi(\sigma)>|\sigma|^\omega$, $\sigma\in\mathbb{R}$, та формулою Стірлінга, прийдемо до нерівності

$$|D^s_\sigma Q_1(t,\sigma)|\le\tilde c_0B_0^st^{\nu s}s!\exp\{-t\varphi(\sigma)\}\le cA^st^{\nu s}s^s\exp\{-t|\sigma|^\omega\},\sigma\in\mathbb{R}, \tag{16}$$

де $\nu=0$, якщо $0<t\le1$ і $\nu=1$, якщо $t>1$, сталі c, $A>0$ не залежать від t. Лему 2 доведено. □

Зауваження 1. *Із оцінок* (16) *випливає, що* $Q_1(t,\cdot)\in S^1_{1/\omega}$ *при кожному* $t>0$.

Лема 3. *Функція* Q_2 *– мультиплікатор у просторі* $S^2_{1/\omega}$.

Доведення. Для доведення твердження здійснимо оцінку похідних функції Q_2. Для цього скористаємося формулою (14), у якій покладемо $F=\varphi^{-1}$, $\varphi=R$, де

$$R(\sigma)=\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_k\varphi(\sigma)\}\equiv\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_kQ_1(t_k,\sigma).$$

Тоді $Q_2(\sigma)=F(\varphi)\equiv R^{-1}$ і

$$|D^s_\sigma Q_2(\sigma)|=\Big|\sum_{p=1}^{s}\frac{d^p}{dR^p}R^{-1}\sum\frac{s!}{p_1!\dots p_l!}\Big(\frac{d}{d\sigma}R(\sigma)\Big)^{p_1}\cdot\dots\cdot\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}R(\sigma)\Big)^{p_l}\Big|.$$

Врахувавши нерівності (16), одержимо

$$\Big|\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\sigma^j}R(\sigma)\Big|\le\frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{m}\mu_k|D^j_\sigma Q_1(t_k,\sigma)|\le\tilde c_0\sum_{k=1}^{m}\mu_kB_0^jt_m^{\nu_j}\le\tilde c\tilde B^j,$$

де $\tilde c=\tilde c_0\mu$, $\tilde B=B_0\tilde t_m$, $\tilde t_m=\max\{1,t_m\}$ (тут врахована нерівність $\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k<\mu$, а також те, що $0<t_1<t_2<\dots<t_m<+\infty$). Тоді

$$\Big|\Big(\frac{d}{d\sigma}R(\sigma)\Big)^{p_1}\dots\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}R(\sigma)\Big)^{p_l}\Big|\le(\tilde c\tilde B)^{p_1}(\tilde c\tilde B^2)^{p_2}\dots(\tilde c\tilde B^l)^{p_l}=$$

$$= \tilde{c}^{p_1+\dots+p_l}\tilde{B}^{p_1+2p_2+\dots+lp_l} \le \tilde{\tilde{c}}^s\tilde{B}^s,\ \ \tilde{\tilde{c}} = \max\{1,\tilde{c}\}.$$

Крім того, $\dfrac{d^p}{dR^p}R^{-1} = (-1)^p p! R^{-(p+1)}$ і

$$R^{-1}(\sigma) = Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k\varphi(\sigma)\}\Big)^{-1} \le \Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\Big)^{-1} \equiv \beta_0 > 0,$$

оскільки, за умовою, $\mu > \sum\limits_{k=1}^m \mu_k$. Отже,

$$\Big|\frac{d^p}{dR^p}R^{-1}\Big| \le \beta_0^{p+1}p!, |D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le \tilde{\tilde{c}}^s\tilde{B}^s s! \sum_{p=1}^s \beta_0^{p+1}p! \le c_1\beta_1^2(s!)^2 \le c_2\beta_2^s s^{2s}, s\in\mathbb{N}.$$

З останньої нерівності та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $S^2_{1/\omega}$.

Лему 3 доведено. □

Наслідок 1. *При кожному $t>0$ функція $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}$, є елементом простору $S^2_{1/\omega}$, при цьому справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \le \tilde{c}\tilde{A}^s t^{\nu s}s^{2s}\exp\{-t|\sigma|^\omega\}, s\in\mathbb{Z}_+, (t,\sigma)\in\Omega,$$

де сталі $\tilde{c}$, $\tilde{A}>0$ не залежать від t.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та формулу $F^{-1}[S^2_{1/\omega}] = S_2^{1/\omega}$, одержимо, що $G(t,\cdot)\in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t>0$. Виділимо в оцінках похідних функції G (за змінною x) залежність від параметра t, вважаючи, що $t>1$. Для цього скористаємося співвідношенням

$$x^k D_x^s F[\varphi](x) = i^{k+s}F[(\sigma^s\varphi(\sigma))^{(k)}] =$$

$$= i^{k+s}\int_{\mathbb{R}}(\sigma^s\varphi(\sigma))^{(k)}e^{i\sigma x}d\sigma, \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+, \varphi\in S^2_{1/\omega}.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1}i^{k+s}(-1)^s\int_{\mathbb{R}}(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}e^{i\sigma x}d\sigma.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій та оцінки похідних функції $Q(t,\sigma)$, одержимо

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| = \Big|\sum_{p=0}^k C_k^p(\sigma^s)^{(p)}Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\Big| \le$$

$$\le |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1}Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| + \frac{k(k-1)}{2!}s(s-1)\times$$

$$\times|\sigma^{s-2}Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \dots \le \tilde{c}\Big[\tilde{A}^k t^{\nu k}\tilde{B}^s t^{-s/\omega}m_{ks} + ks\tilde{A}^{k-1}t^{\nu(k-1)}\tilde{B}^{s-1}t^{-(s-1)/\omega}m_{k-1,s-1} +$$

$$+\frac{1}{2!}k(k-1)s(s-1)\tilde{A}^{k-2}t^{\nu(k-2)}\tilde{B}^{s-2}t^{-(s-2)/\omega}m_{k-2,s-2}+\dots\Big]e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega},$$

де $m_{ks}=k^{2k}s^{s/\omega}$; тут врахована також нерівність

$$|\sigma|^s\exp\{-t|\sigma|^\omega\}\le\tilde{B}^s t^{-s/\omega}s^{s/\omega}\exp\Big\{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega\Big\},\tilde{B}=2^{1/\omega}.$$

Врахувавши результати, наведені в [2, с. 236–241], одержимо , що подвійна послідовність $m_{ks}=k^{2k}s^{s/\omega}$ задовольняє нерівність

$$ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}\le\tilde{\gamma}(k+s),\quad \tilde{\gamma}>0.$$

Урахувавши останню нерівність, а також те, що $t>1$, матимемо

$$|(\sigma^sQ(t,-\sigma))^{(k)}|\le\tilde{c}\tilde{A}^kt^k\tilde{B}^sm_{ks}\Big(1+\frac{ks}{\tilde{A}\tilde{B}}\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}+\dots+$$

$$+\frac{1}{2!}k(k-1)s(s-1)\frac{1}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{ks}}+\dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}\le\tilde{c}\tilde{A}^kt^k\tilde{B}^sm_{ks}\times$$

$$\times\Big(1+\frac{ks}{\tilde{A}\tilde{B}}\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}+\frac{1}{2!}\frac{1}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}(k-1)(s-1)\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{k-1,s-1}}+\dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}\le$$

$$\le\tilde{c}\tilde{A}^kt^k\tilde{B}^sm_{ks}\Big(1+\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A}\tilde{B}}(k+s)+\frac{1}{2!}\frac{\tilde{\gamma}^2}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}(k+s)^2+\dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}\le$$

$$\le c_1\overline{A}^kt^k\overline{B}^km_{ks}e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega},\overline{A}=\tilde{A}\exp\Big\{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A}\tilde{B}}\Big\},\overline{B}=\tilde{B}\exp\Big\{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A}\tilde{B}}\Big\}.$$

Отже,

$$|x^kD_x^sG(t,x)|\le(2\pi)^{-1}c_1\overline{A}^kt^k\overline{B}^sm_{ks}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}d\sigma\le c_2\overline{A}^kt^k\overline{B}^st^{-1/\omega}k^{2k}s^{s/\omega},\{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|D_x^sG(t,x)|\le c_2\overline{B}^st^{-1/\omega}s^{s/\omega}\inf_k\frac{\overline{A}^kk^{2k}}{(t^{-1}|x|)^k}\le c_3\overline{B}^st^{-1/\omega}s^{s/\omega}\exp\{-a_0t^{-1/2}|x|^{1/2}\},$$

де $c_3,\overline{B},a_0>0$ не залежать від t; тут ми скористалися відомою нерівністю з [2, с. 204]:

$$\exp\{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}\}\le\inf_k\frac{L^kk^{k\alpha}}{|\xi|^k}\le c\exp\{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}\},\ c=e^{\frac{\alpha e}{2}},$$

в якій $\alpha=2$, $L=\overline{A}$. Таким чином, правильним є твердження

Лема 4. *Похідні функції $G(t,x)$ (за змінною x) при $t>1$ задовольняють нерівності*

$$|D_x^sG(t,x)|\le c_3\overline{B}^st^{-1/\omega}s^{s/\omega}\exp\{-a_0t^{-1/2}|x|^{1/2}\},s\in\mathbb{Z}_+,\tag{17}$$

сталі $c_3,\overline{B},a_0>0$ не залежать від t.

Наведемо ще деякі властивості функції G.

Лема 5. *Функція $G(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_2^{1/\omega}$, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення твердження досить встановити, що функція $F[G(t,\cdot)] = Q(t,\cdot)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі $S^2_{1/\omega}$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,\cdot) - Q(t,\cdot)] \to \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\cdot),\ \ \Delta t\to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

1) $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} D^s_\sigma(-\varphi(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s\in\mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$;

2) $|D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \bar{c}\bar{B}^s s^{2s}\exp\{-\bar{a}|\sigma|^\omega\}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c},\bar{B},\bar{a}>0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma)\in\Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\varphi(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma), 0<\theta<1.$$

Отже,

$$D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma\varphi(\sigma) D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) \tag{18}$$

і

$$D^s_\sigma\Big(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big) = -\sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma\varphi(\sigma)[D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma)].$$

Оскільки

$$D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma) = D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t,\ \ 0<\theta_1<1,$$

то звідси та з оцінок (17) випливає, що

$$D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t\to 0, \Delta t\to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Тоді і

$$D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma)\to D^s_\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big),\ \Delta t\to 0,$$

рівномірно на кожному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Врахувавши (18) та оцінки, які задовольняють функції $\varphi(\sigma)$, $Q(t,\sigma)$ та їхні похідні, знайдемо, що

$$|D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le c_0\tilde{c}\sum_{l=1}^{s} C^l_s B^l_0 l^l \tilde{A}^{s-l} t^{\nu(s-l)}(s-l)^{2(s-l)}\exp\{-(t+\theta\Delta t)|\sigma|^\omega\} +$$

$$+c_\varepsilon\tilde{c}\tilde{A}^s s^{2s} t^{\nu s}\exp\{-(t+\theta\Delta t)|\sigma|^\omega + \varepsilon|\sigma|^\omega\}$$

(тут $\varepsilon > 0$ – довільно фіксований параметр). Візьмемо $\varepsilon = t/2$. Тоді

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \overline{c}\overline{L}^s s^{2s} \exp\{-\overline{a}|\sigma|^\omega\},$$

де $\overline{c} = \max\{c_0\tilde{c}, c_\varepsilon\}$, $\overline{L} = \max\{\overline{B}, \overline{A}\}$, $\overline{B} = 2\max\{B_0, \tilde{A}\}$, $\overline{a} = t/2$, причому всі сталі не залежать від Δt.

Твердження доведено. □

Наслідок 2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot), \quad \forall f \in (S_2^{1/\omega})', t > 0.$$

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною

$$f * G(t,\cdot) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle, \ \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[(f * G(t+\Delta t,\cdot)) - (f * G(t,\cdot))] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle.$$

Внаслідок леми 5 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi), \Delta t \to 0$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S_2^{1/\omega}$. Тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \langle f_\xi, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = \langle f_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\xi)\rangle = f * G(t,\cdot).$$

Твердження доведено. □

Лема 6. *У просторі $(S_2^{1/\omega})'$ виконуються співвідношення:*

1) $G(t,\cdot) \to F^{-1}[Q_2], \quad t \to +0;$

2) $\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k G(t_k,\cdot) \to \delta, t \to +0$ (19)

(тут δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. 1. Урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S', для доведення твердження досить встановити, що

$$F[G(t,\cdot)] = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \to Q_2(\cdot), t \to +0,$$

у просторі $(S^2_{1/\omega})'$. Для цього візьмемо довільну функцію $\psi \in S^2_{1/\omega}$ і, скориставшись тим, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $S^2_{1/\omega}$, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\langle Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot),\psi\rangle = \langle Q_1(t,\cdot), Q_2(\cdot)\psi\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma = \langle Q_2,\psi\rangle$$

(тут $Q(t,\cdot) = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot)$ трактується як регулярний функціонал з простору $(S^2_{1/\omega})'$). Звідси вже випливає твердження 1 леми 6.

2. Урахувавши твердження 1, одержимо

$$\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k,\cdot) =$$

$$= \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^m \mu_k F^{-1}[Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)] =$$

$$= F^{-1}\Big[\mu Q_2 - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\Big] = F^{-1}\Big[\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big)Q_2(\cdot)\Big] =$$

$$= F^{-1}\Big[\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big)\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big)^{-1}\Big] = F^{-1}[1] = \delta.$$

Отже, співвідношення (19) виконується в просторі $(S_2^{1/\omega})'$.

Твердження доведено. □

Зауваження 2. *Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$, то задача (7), (8) – задача Коші для рівняння (7). У цьому випадку $Q_2(\sigma) = 1$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $G(t,\cdot) = F^{-1}[e^{-t\varphi(\sigma)}]$ і $G(t,\cdot) \to F^{-1}[1] = \delta$, $t \to +0$, у просторі $(S_1^{1/\omega})'$.*

Наслідок 3. *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \quad f \in (S^{1/\omega}_{2,*})', (t,x) \in \Omega$$

(тут $(S^{1/\omega}_{2,*})'$ – клас згортувачів у просторі $S_2^{1/\omega}$). Тоді у просторі $(S_2^{1/\omega})'$ виконується граничне співвідношення

$$\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \omega(t_k,\cdot) \to f, t \to +0.$$

Доведення. Для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення

$$F\Big[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \omega(t_k,\cdot)\Big] \to F[f], t \to +0,$$

виконується у просторі $(S^2_{1/\omega})' = F[(S_2^{1/\omega})']$. Згідно з умовою, узагальнена функція f – згортувач у просторі $S_2^{1/\omega}$, $G(t,\cdot) \in S_2^{1/\omega}$ (при кожному $t > 0$), тому

$$F[\omega(t,x)] = F[f * G(t,x)] = F[f] \cdot Q(t,\cdot).$$

Оскільки $Q(t,\cdot) \to Q_2(\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі $(S^2_{1/\omega})'$ (див. доведення твердження 1 леми 6), а $F[f]$ – мультиплікатор у просторі $S^2_{1/\omega}$, то в просторі $(S^2_{1/\omega})'$ виконується граничне співвідношення

$$F[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot)] = F[f]\Big(\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\cdot)\Big) \underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow} F[f]\Big(\mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot) Q_2(\cdot)\Big) = F[f] Q_2(\cdot)\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big) =$$

$$= F[f]\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big)^{-1}\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big) = F[f].$$

Твердження доведено. □

Функція $\omega(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, є розв'язком рівняння (7). Справді, оскільки f – згортувач у просторі $S_2^{1/\omega}$, то

$$\hat{A}\omega(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma) F[f * G(t,\cdot)]] = F^{-1}[\varphi(\sigma) F[f] Q(t,\cdot)] = -F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\cdot) F[f]\Big] =$$

$$= -F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)\Big] F[f]\Big] = -F^{-1}\Big[F\Big[f * \frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)\Big]\Big] = -f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

З іншого боку (див. наслідок 2),

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t,\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $\omega(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (7).

З наслідку 3 випливає, що для рівняння (7) m-точкову задачу можна ставити так: знайти розв'язок рівняння (7), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f \in (S_{2,*}^{1/\omega})', \tag{20}$$

де граничне співвідношення (20) розглядається у просторі $(S_2^{1/\omega})'$ (обмеження на параметри μ, μ_1, ..., μ_m, t_1, ..., t_m такі ж, як і у випадку задачі (7), (8)).

Із доведеного раніше випливає, що функція $u(t,x) = f * G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, є розв'язком рівняння (7). Якщо $f = \delta \in (S_{2,*}^{1/\omega})'$, то $f * G(t,x) = G(t,x)$, тобто $G(t,x)$ також є розв'язком рівняння (7). Урахувавши цей факт, а також співвідношення (19). функцію $G(t,x)$ називатимемо фундаментальним розв'язком задачі (7), (20).

Теорема 1. *Задача* (7), (20) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), (t,x) \in \Omega.$$

Доведення. Функція $f * G(t,x)$ задовольняє рівняння (7). Розв'язок неперервно залежить від f в умові (20) у тому розумінні, що якщо $\{f, f_n, n \geq 1\} \subset (S_{2,*}^{1/\omega})'$ і $f_n \to f$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$, то $u_n = f_n * G(t,x) \to u = f * G(t,x)$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$. Ця властивість випливає з властивості неперервності згортки.

Залишилося переконатися в тому, що задача (7), (20) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \hat{A}^* v, (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R}, 0 \leq t < t_0 < +\infty \tag{21}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in (S_{2,*}^{1/\omega})', \tag{22}$$

де $\hat{A}^*$ – звуження спряженого оператора до оператора $\hat{A}$ на простір $S_2^{1/\omega} \subset (S_{2,*}^{1/\omega})'$. Умову (22) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (21), (22) є розв'язною при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t$: $(S_{2,*}^{1/\omega})' \to S_2^{1/\omega}$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (S_{2,*}^{1/\omega})'$ розв'язок задачі (21), (22). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних $0 \leq t < t_0 < +\infty$ і володіє властивостями:

$$\forall \psi \in (S_{2,*}^{1/\omega})' : \ \frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} = \hat{A}^* Q_{t_0}^t \psi, \quad \lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі $(S_{2,*}^{1/\omega})'$).

Розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(S_{2,*}^{1/\omega})' \supset S_2^{1/\omega}$. Доведемо, що задача (7), (20) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(S_{2,*}^{1/\omega})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (7) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x) = 0$ (при кожному $t \in (0,\infty)$). Застосуємо функціонал u до функції $Q_{t_0}^t \psi$, де ψ – довільний елемент з простору $S_2^{1/\omega} \subset (S_{2,*}^{1/\omega})'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (7), (21), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q_{t_0}^t \psi}{\partial t} \right\rangle = \langle -\hat{A}u, Q_{t_0}^t \psi\rangle + \langle u, \hat{A}^* Q_{t_0}^t \psi\rangle =$$
$$= \langle -\hat{A}u, Q_{t_0}^t \psi\rangle + \langle \hat{A}u, Q_{t_0}^t \psi\rangle = 0, t \in [0,t_0).$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій [2] випливає співвідношення

$$\lim_{t \to t_0} \langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi\rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = c_0 = c_0(t_0)$$

у довільній точці $t_0 \in (0,\infty)$. Отже, якщо в (20) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle u(t,\cdot), \psi\rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \langle u(t_k,\cdot), \psi\rangle = \mu c_0 - \sum_{k=1}^m \mu_k c_k = 0.$$

Звідси випливає, що $c_0 = c_1 = \cdots = c_m = 0$. Справді, нехай це не так. Наприклад, $c_0 \neq 0$. Тоді маємо співвідношення:

$$\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \beta_k = 0,$$

де $\beta_k = c_k/c_0$, тобто $\mu = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \beta_k$. Оскільки, за умовою $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, де $\mu_1, \ldots, \mu_m$ – фіксовані, то одержане протиріччя доводить, що $c_0 = 0$. Аналогічно переконуємося в тому, що $c_1 = \cdots = c_m = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0, \cdot), \psi \rangle = 0$ для довільного $\psi \in S_2^{1/\omega}$, тобто $u(t_0, \cdot)$ – нульовий функціонал з простору $(S_{2,*}^{1/\omega})'$. Оскільки $t_0 \in (0, \infty)$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t, x) = 0$ для всіх $t \in (0, \infty)$. Теорему 1 доведено. □

Теорема 2. *Нехай* $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, *– розв'язок задачі* (7), (20). *Тоді* $u(t, x) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *у просторі* $(S_2^{1/\omega})'$.

Доведення. Розв'язок задачі (7), (20) дається формулою

$$u(t, x) = f * G(t, x) = \langle f_\xi, G(t, x - \xi) \rangle, f \in (S_{2,*}^{1/\omega})', (t, x) \in \Omega.$$

Доведемо, що $\langle u(t, \cdot), \psi \rangle \to 0$ при $t \to +\infty$ для довільної функції $\psi \in S_2^{1/\omega}$ (це і означатиме, що $u(t, \cdot) \to 0$ при $t \to +\infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$). Введемо позначення

$$\Psi_t(\xi) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, x - \xi) \psi(x) dx, \quad \Psi_{t,R}(\xi) := \int\limits_{-R}^{R} G(t, x - \xi) \psi(x) dx, \quad R > 0,$$

і доведемо, що: а) при кожному $t > 1$ і $R > 0$ функція $\Psi_{t,R}(\xi)$ є елементом простору $S_2^{1/\omega}$. $\Psi_{t,R}(\xi) \to \Psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ у просторі $S_2^{1/\omega}$; б) $\Psi_t(\xi) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t > 1$. Звідси дістаємо, що

$$\langle u(t, \cdot), \psi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, G(t, x - \xi) \rangle \psi(x) dx = \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, x) \psi(x + \xi) dx \rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y) \psi(-(y - \xi)) dy \rangle = \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y) \check{\psi}(y - \xi) dy \rangle, \check{\psi}(z) = \psi(-z),$$

(тут $u(t, \cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(S_2^{1/\omega})'$ при кожному $t > 0$).

Отже, встановимо властивість а). При фіксованих $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)| \leq \int\limits_{-R}^{R} |\xi^k \psi(x) D_\xi^m G(t, x - \xi)| dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\xi^k \psi(\xi + \eta) D_\eta^m G(t, \eta)| d\eta.$$

Оскільки $\psi \in S_2^{1/\omega}$, то при деяких $c, L, B > 0$

$$|\xi^k D_\xi^m \psi(\xi)| \leq c L^k B^m k^{2k} m^{m/\omega}, \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Звідси, при кожному $\eta \in \mathbb{R}$:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi^k \psi(\xi + \eta)| - \sup_{y \in \mathbb{R}} |(y - \eta)^k \psi(y)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} \Big| \sum_{l=0}^{k} C_k^l y^l (-\eta)^{k-l} \psi(y) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l |\eta|^{k-l} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^l \psi(y)| \leq c \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^{2l} |\eta|^{k-l}.$$

Далі скористаємося оцінками (17). Тоді

$$|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)| \leq c \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} |D_\eta^m G(t,\eta)| d\eta \leq$$

$$\leq cc_3 \overline{B}^m t^{-1} m^{m/\omega} \sum_{l=0}^{k} C_k^l l^{2l} L^l \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\{-a_0 t^{-1/2} |\eta|^{1/2}\} d\eta.$$

За допомогою безпосередніх обчислень знаходимо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\{-a_0 t^{-1/2} |\eta|^{1/2}\} d\eta \leq c_4 \tilde{L}^{k-l} (k-l)^{2(k-l)} t^{k-l+1}, c_4, \tilde{L} > 0.$$

Таким чином,

$$|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)| \leq cc_3 c_4 \overline{B}^m m^{m/\omega} \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l \tilde{L}^{k-l} t^{k-l} l^{2l} (k-l)^{2(k-l)} \leq$$

$$\leq \overline{c} \overline{B}^m \overline{L}^k k^{2k} m^{m/\omega}, \tag{23}$$

де $\overline{c} = cc_3c_4$, $\overline{L} = 2\max\{L, \tilde{L}t\}$. Отже, $\Psi_{t,R}(\xi) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t > 1$ і довільному $R > 0$. Далі безпосередньо переконуємося в тому, що $\Psi_{t,R}(\xi) \to \Psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ рівномірно по ξ разом з усіма своїми похідними на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Крім того, сукупність функцій $\{\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)\}$, $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$, рівномірно обмежена (відносно R) у просторі $S_2^{1/\omega}$ (ця властивість випливає з оцінок (21), у яких сталі $\overline{c}, \overline{B}, \overline{L} > 0$ не залежать від R). Це і означає виконання умови а).

З умови а) випливає умова б), оскільки в досконалому просторі кожна обмежена множина є компактною.

Використовуючи властивості а), б), отримаємо співвідношення

$$\langle u(t,\cdot), \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)(f * \check{\psi})(y) dy.$$

Оскільки f – згортувач у просторі $S_2^{1/\omega}$, то $f * \check{\psi} \in S_2^{1/\omega}$. Тоді, врахувавши оцінки (17) (при $s = 0$), одержимо

$$|\langle u(t,\cdot), \psi \rangle| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,-y)| \, |(f * \check{\psi})(y)| dy \leq ct^{-1/\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * \check{\psi})(y)| dy \leq c_0 t^{-1/\omega} \to 0, t \to +\infty,$$

для довільної функції $\psi \in S_2^{1/\omega}$, тобто $u(t,\cdot) \to 0$ при $t \to +\infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$. Теорему 2 доведено. $\square$

Якщо узагальнена функція f в умові (20) є фінітною (тобто носій f ($\mathrm{supp} f$) – обмежена множина в $\mathbb{R}$), то можна говорити про рівномірне прямування до нуля на $\mathbb{R}$ при $t \to +\infty$ розв'язку $u(t,x)$ задачі (7), (20). Зауважимо, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторах типу S. Ця властивість випливає із загального результату, який стосується теорії досконалих просторів (див. [2, с. 173]): якщо Φ – досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ. Фінітні функціонали утворюють досить широкий клас. Зокрема, кожна обмежена замкнена множина є носієм деякої фінітної узагальненої функції [5].

Теорема 3. *Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі* (7), (20) *з узагальненою функцією f, яка є елементом простору $(S_{2,*}^{1/\omega})'$, де $\omega \in (0,1)$. Тоді $u(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.*

Наведемо схему доведення сформульованого твердження. Нехай *supp* $f \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\psi \in S_2^{1/\omega}$ таку, що $\psi(x) = 1$, $x \in [a_1, b_1]$, *supp* $\psi \subset [a_2, b_2]$. Така функція існує, оскільки простір $S_2^{1/\omega}$ при $1/\omega > 1$ містить фінітні функції [2]. Подамо функцію $u(t,x)$ у вигляді

$$u(t,x) = \langle f_\xi, \psi(\xi) G(t, x-\xi)\rangle + \langle f_\xi, \gamma(\xi) G(t, x-\xi)\rangle,$$

де $\gamma = 1 - \psi$. Оскільки

$$\mathrm{supp}\,(\gamma(\xi) G(t, x-\xi)) \cap \mathrm{supp} f = \varnothing,$$

то

$$u(t,x) = t^{-1/\omega} \langle f_\xi, t^{1/\omega} \psi(\xi) G(t, x-\xi)\rangle.$$

Для доведення твердження досить переконатися в тому, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{1/\omega}\psi(\xi) G(t, x-\xi)$ обмежена в просторі $S_2^{1/\omega}$ при великих значеннях $t, x \in \mathbb{R}$ і $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1]$ (ця властивість випливає з оцінок (17)).

Приклад. Розглянемо функцію

$$\varphi_{\omega,p}(\sigma) = \Big(\sum_{k=0}^{p} \sigma^{2k}\Big)^{\omega/(2p)}, \sigma \in \mathbb{R},$$

де $\omega \in (0,1]$, $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксовані числа. Очевидно, що $\varphi_{\omega,p} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(\sigma) > |\sigma|^\omega$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Якщо $|\sigma| \leq 1$, то

$$\varphi_{\omega,p}(\sigma) \leq (p+1)^{\omega/(2p)} \leq (p+1) \leq (p+1) e^{\varepsilon|\sigma|^\omega}$$

для довільно фіксованого $\varepsilon > 0$. Якщо $|\sigma| > 1$, то

$$\varphi_{\omega,p}(\sigma) \leq (p+1)|\sigma|^\omega \leq \frac{1}{\varepsilon}(p+1) e^{\varepsilon|\sigma|^\omega}.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall \sigma \in \mathbb{R}: \ \ \varphi_{\omega,p}(\sigma) \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon|\sigma|^\omega},$$

де $c_\varepsilon = (p+1)\max\{1, 1/\varepsilon\}$. Крім того, безпосередньо переконуємося в тому, що похідні функції $\varphi_{\omega,p}$ задовольняють умову

$$\exists c_0, B_0 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \sigma \in \mathbb{R}: \ \ |\varphi^{(n)}_{\omega,p}(\sigma)| \le c_0 B_0^n n!$$

(сталі c_0, B_0 залежать від p, ω). Отже, $\varphi_{\omega,p} \in P_\omega$ (при довільно фіксованому $p \in \mathbb{N}$).

Скориставшись спектральною теоремою для самоспряжених операторів та операційним численням для таких операторів одержимо

$$\varphi_{\omega,p}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big(I + \sum_{k=1}^{p}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{2k}\Big)^{\omega/(2p)} = \Big(I + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}\Big)^{\omega/(2p)}$$

(тут I – одиничний оператор). Наприклад,

$$\varphi_{1,1}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)^{1/2}.$$

Цей оператор часто використовується в теорії дробового інтегро-диференціювання і називається оператором Бесселя дробового диференціювання порядку $1/2$ (див. [18]). Інші приклади:

$$\varphi_{4/7,2}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\Big)^{1/7},$$

$$\varphi_{5/6,3}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^6}{\partial x^6}\Big)^{5/36},$$

оператори $\varphi_{\omega,p}\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ природно називати операторами дробового диференціювання. Згідно з теоремою 1, нелокальна m-точкова за часом задача для рівняння (7), наприклад, з оператором $\varphi_{5/6,3}\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ коректно розв'язна, якщо початкова функція f в умові (20) є елементом простору $(S^{5/6}_{2,*})'$.

Наведемо ще приклад узагальненої функції з простору $(S^{1/\omega}_{2,*})'$. Нехай

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{|x|^{-\alpha}\}, & x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \alpha > 0, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Відомо [19], що f_α допускає регуляризацію у просторі $(S^\beta_2)'$, де $1 < \beta < 1 + 1/\alpha$, тобто f_α є регулярною узагальненою функцією з простору $(S^\beta_2)'$. Якщо вважати, що $\omega \in (0,1)$ і покласти $\beta = 1/\omega > 1$, то

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\omega} - 1 = \frac{1-\omega}{\omega}, \alpha < \frac{\omega}{1-\omega}.$$

Отже, якщо $\alpha < \dfrac{\omega}{1-\omega}$, то $f_\alpha \in (S^{1/\omega}_2)'$. Для прикладу візьмемо $\alpha = \dfrac{\omega}{2(1-\omega)}$ і покладемо $\omega = 1/2$; тоді $\alpha = 1/2$. Отже, функція

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \exp\{|x|^{-1/2}\}, & x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

породжує регулярний функціонал з простору $(S_2^2)'$. Оскільки носій $(\mathrm{supp})f_{1/2}$ – відрізок $[-1,1]$, то $f_{1/2}$ – фінітна узагальнена функція, а, отже, $f_{1/2}$ – згортувач у просторі S_2^2. Згідно з теоремами 1, 3, задача (7), (20) з оператором $\varphi_{1/2,p}\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ і початковою функцією $f_{1/2} \in (S_{2,*}^2)'$ – коректно розв'язна, при цьому $u(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.

Висновки. Формального розширення класу рівнянь з частинними похідними параболічного типу можна домогтися, залучивши еволюційні рівняння з операторами $\varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$, побудованими за повними функціями. Звуження таких операторів на певні простори типу S (простори S_α^β) збігаються із псевдодиференціальними операторами у таких просторах, побудованих за функціями φ, які є мультиплікаторами у просторах S_β^α. Такий підхід дозволяє ефективно використати метод перетворення Фур'є для дослідження багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з операторами дробового диференціювання і початковою функцією, яка може мати в одній точці особливість навіть "експоненціального" порядку.

Список літератури

[**1**] *Khrehivskiy V.V., Matiychuk M.I.* Fundamental solutions and Cauchy problem for linear parabolic systems for equqtions with Bessel operator // Dokl. AN SSSR. – 1968. - V.181, No 6. – P. 1320–1323. (in Ukrainian)

[**2**] *Gelfand I.M., Shylov G.E.* The space of the spaces of main and generalized functions. – M.: Fizmatgiz, 1958. – 307 p. (in Russian)

[**3**] *Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L.* The boundary problems for differential-operator equations. – K.: Nauk. dumka, 1984. – 284 p. (in Ukrainian)

[**4**] *Gorbachuk M.L., Dudnikov P.I.* On initial data of Cauchy problem for parabolic equations when the solutions are infinity differentiable // Dokl. AN USST. Ser. A, 1981. – No 4. – p. 9–11. (in Russian)

[**5**] *Gorodetskyy V.V.* The boundary properties of parabolic equation solutions smooth in layer. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 225 p. (in Ukrainian)

[**6**] *Gorodetskyy V.V.* The initial values sets of smooth solutions for differential-operator parabolic equations. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 219 p. (in Ukrainian)

[**7**] *Zhytomirskiy Ya.I.* Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with a Bessel differential operato // Mat. sbornik. – 1955. – V. 36, No 2. – P. 299–310. (in Russian)

[**8**] *Gorodetskyy V.V., Martynuk O.V.* Parabolic pseudodifferential equations with analytic symbols in S type spaces. - Chernivtsi: Tehnodruk, 2019. - 280 p. (in Ukrainian)

[**9**] *Nahushev A.M.* Mathematical biology equations. – M.: Vysshaya shkola, 1995. – 301 p. (in Russian)

[**10**] *Dezin A.A.* General questions of the theory of boundary value problems. – M.: Nauka, 1980. – 208 p. (in Russian)

[**11**] *Belavin I.A., Kapitsa S.P., Kurdyumov S.P.* // Zhurn vychysl. matematiki i matematicheskoy fiziki. – 1998. – V. 38, No 6. – P. 885–902. (in Russian)

[**12**] *Makarov A.A.* Existence of a correct two-point boundary value problem for systems of pseudodifferential equations // Differents. uravneniya. – 1994. – V. 30, No 1. – P. 144–150. (in Russian)

[**13**] *Chesalin V.I.* A problem with nonlocal boundary conditions for some abstract hyperbolic equations // Differents. uravneniya. – 1979. – V. 15, No 11. – C. 2104–2106. (in Russian)

[**14**] *Gorodetskyy V.V., Drin' Ya.M.* Multipoint by time problem for one class of evolition pseudodifferential equations // Ukr. mat. zhurn. – 2014. – V. 66, No 5. – P. 619–633. (in Russian)

[**15**] *Gorodetskyy V.V., Martynyuk O.V.* Cauchy problem and non-local problems for singular evolution equations of parabolic type. – Chernivtsi: Knygy XXI. – 2010. – 320 p. (in Ukrainian)

[**16**] *Verezhak G.P., Gorodetskyy V.V.* Stabilization of solutions of a non-local multipoint by time problem for one class of evolution pseudo-differential equations // Neliniyni kolyvannya. – 2017. – V. 20, No 3. – P. 303–327. (in Ukrainian)

[**17**] *Gorodetskyy V.V., Nagnibida N.I., Nastasiev P.P.* The solving functional analysys problems methods. – Kiev, Vysshaya shkola, 1990. – 479 p. (in Russian)

[**18**] *Samko G.S., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional integrals and derivatives and some of their applications . – Minsk: Nauka i tehnika, 1987. – 688 p. (in Russian)

[**19**] *Gorodetskyy V.V., Drin' Ya.M., Nagnibida M.I.* Generalized functions. Methods of problem solving. – Chernivtsi: Knygy – XXI, 2011. – 504 p. (in Ukrainian)

Надійшло 02.12.2022

Horodets'kyi V.V., Shevchuk N.M., Kolisnyk R.S. *Multipoint by time problem for a class of evolution equations in S type space*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 90–110.

The goal of this paper is to study evolution equations of the parabolic type with operators $\varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ built according to certain functions (different from polynomials), in particular, with operators of fractional differentiation. It is found that the restriction of such operators to certain S-type spaces match with pseudo-differential operators in such spaces constructed by these functions, which are multipliers in spaces that are Fourier transforms of S-type spaces. The well-posedness of the nonlocal multipoint by time problem is proved for such equations with initial functions that are elements of spaces of generalized functions of S-type. The properties of the fundamental solutions of the specified problem, the behavior of the solution at $t \to +\infty$ in spaces of S'-type (weak stabilization) were studied. We found conditions under which the solution stabilizes to zero uniformly on $\mathbb{R}$.

Карлова О.О.[1,3], Катиринчук К.М.[1], Проценко В.І.[2]

Періодичність рекурентних послідовностей другого і третього порядку

Одержано необхідні і достатні умови на коефіцієнти u_i для періодичності рекурентних послідовностей, що задаються співвідношенням $a_{n+k} = u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_0$ при $n = 0, 1, \ldots$ та $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, k-1$, у випадку $k = 2, 3$.

Ключові слова і фрази: рекурентна послідовність k-го порядку, періодична послідовність, послідовність Фібоначчі.

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
[2] Український Католицький Університет, Україна;
[3] Університет Яна Кохановського в Кельцах, Польща
e-mail: *o.karlova@chnu.edu.ua*

1 Мотивація та історичні ремарки

Серед усіх числових послідовностей числа Фібоначчі та Люка, безперечно, займають одне з визначних місць. Незважаючи на істотну кількість книжок та статей, присвячених послідовностям Фібоначчі та Люка, інтерес до них не згасає й досі, про що свідчить, наприклад, активно діючий журнал "The Fibonacci Quarterly" [7], зокрема, наявність відкритих проблем з цієї тематики майже в кожному номері журналу. Крім того, кожних два роки проводиться міжнародна конференція під егідою Fibonacci Association [8]. Дуже ґрунтовний огляд разом з проблемами та задачами можна знайти в книзі Томаса Коши [4]; рекомендуємо також статтю Дена Калмана і Роберта Мени [3] і літературу, згадану в цій статті.

Мотивацією цього дослідження стало таке спостереження. Якщо замість класичної послідовності Фібоначчі, яка задається рекурентною формулою

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 0, 1, 2, \ldots$$

та при початкових значеннях $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ має вигляд

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

УДК 515.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* 11B37, 11B39.

розглянути послідовність

$$G_{n+2} = G_{n+1} - G_n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

то при $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ послідовність $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ матиме вигляд

$$0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, \dots.$$

Іншими словами, вона є періодичною з періодом 6.

Таким чином, природно виникають питання

- Які умови повинні задовольняти коефіцієнти рекурентної послідовності для її періодичності?
- Якою може бути довжина періода та як вона залежить від коефіцієнтів послідовності?
- Чи залежить періодичність або довжина періода від початкових значень послідовності?

Нескладно можна показати, що послідовність Фібоначчі за модулем довільного натурального числа $m \geq 2$ періодична, адже серед перших (m^2+1)-ї пар чисел Фібоначчі знайдуться дві рівні пари $(F_i, F_{i+1}) \equiv (F_j, F_{j+1}) \mod m$ для деяких $i \leq j$. Найменше натуральне число $\pi(m)$, яке є довжиною періода послідовності Фібоначчі за модулем m, називається *періодом Пізано.* Це поняття добре вивчене як для класичної послідовності Фібоначчі, так і для різних її узагальнень (див. [9] та цитовану там літературу).

У цій статті ми вивчаємо періодичність послідовностей типу Фібоначчі у звичайному розумінні, тобто, за модулем 1. Наскільки нам відомо, це питання не вивчалося раніше. Ми даємо відповіді на наведені вище запитання для рекурентних послідовностей другого та третього порядків.

Спочатку в другому пункті ми наводимо необхідні та достатні умови періодичності для загальної рекурентної послідовності k-го порядку.

В третьому пункті ми розглядаємо послідовності 2-го порядку, тобто, послідовності, які задаються рекурентно співвідношенням $a_{n+2} = u_1 a_{n+1} + u_0 a_0$ з дійсними коефіцієнтами $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ та дійсними початковими значеннями $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Наведемо тут деякі цікаві послідовності, що описуються цим співвідношенням. Покладемо $a_0 = 0$ і $a_1 = 1$. Тоді

- при $u_0 = u_1 = 1$ ми отримаємо класичну послідовність Фібоначчі $(F_n)_{n=0}^{\infty}$;
- при $u_0 = 1, u_1 = -1$ ми отримаємо описану вище послідовність $(G_n)_{n=0}^{\infty}$, періодичну з періодом 6;
- при $u_0 = 3$, $u_1 = -1$ одержимо послідовність

$$0, 1, 3, 8, 21, 55, \dots,$$

в якій впізнаємо послідовність $(F_{2n})_{n=0}^{\infty}$ чисел Фібоначчі з парними індексами,

- при $u_0 = 3$, $u_1 = -2$ ми отримаємо послідовність
$$0, 1, 3, 7, 15, 31, \dots,$$
тобто, послідовність чисел Мерсенна вигляду $M_n = 2^n - 1$,

- при $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ отримується послідовність усіх цілих невід'ємних чисел
$$0, 1, 2, 3, 4, \dots,$$

- при $u_0 = 11$, $u_1 = -10$ маємо послідовність вигляду
$$0, 1, 11, 111, 1111, 11111, \dots.$$

Також у третьому пункті статті ми застосовуємо загальні властивості, знайдені в другому пункті, до дослідження періодичності послідовностей другого порядку. Ми з'ясовуємо, зокрема, що коефіцієнт u_1 у випадку періодичної послідовності майже ніколи не може бути раціональним числом, що встановлено в підпункті 3.4. Тут слід зазначити, що Твердження 3 не є новим і відоме, як "Теорема Нівена" (див. [6, Corollary 3.12]). Проте оригінальне доведення теореми Нівена використовує техніку вищої алгебри, тоді як ми наводимо цілком елементарне її доведення.

У четвертому пункті ми вивчаємо рекурентні послідовності третього порядку, тобто, послідовності, що визначаться співвідношенням $a_{n+3} = u_2 a_{n+2} + u_1 a_{n+1} + u_0 a_n$, і знаходимо необхідні та достатні умови на коефіцієнти u_0, u_1 та u_2 для того, щоб послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ була періодичною.

2 Необхіді та достатні умови періодичності рекурентних послідовностей

Позначимо $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Означення 1. Послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ дійсних чисел є *рекурентною порядку* $k \in \mathbb{N}$, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ виконується співвідношення
$$a_{n+k} = u_{k-1} a_{n+k-1} + u_{k-2} a_{n+k-2} + \dots u_1 a_{n+1} + u_0 a_n \tag{1}$$
для деякого набору $u = (u_0, \dots, u_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$, де $u_0 \neq 0$.

Розглянемо матрицю U розмірності $k \times k$, вектор x_n
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{k-2} & u_{k-1} \end{pmatrix}, \ x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \dots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Ux_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \dots \\ u_0a_n + u_1a_{n+1} + \dots + u_{k-1}a_{n+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \dots \\ a_{n+k} \end{pmatrix} = x_{n+1}.$$

Таким чином, має місце співвідношення

$$x_{n+1} = Ux_n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}_0$, причому вектор x_0 складається з k початкових значень послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Означення 2. Числова послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ є *періодичною*, якщо існують такі числа $N \in \mathbb{N}$ та $n_0 \in \mathbb{N}_0$, що

$$a_{n+N} = a_n \ \forall n \geq n_0.$$

Найменше з таких чисел N називається *періодом* послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Твердження 1. *Рекурентна послідовність k-го порядку $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ є періодичною з періодом $N \in \mathbb{N}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$x_N = x_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Доведення. Необхідність очевидна. Доведемо *достатність.* Без обмеження загальності вважатимемо, що $n_0 \in \mathbb{N}_0$ – найменше серед натуральних чисел m, таких, що $a_{n+N} = a_n$ для всіх $n \geq m$. Тоді $n_0 < N$. Оскільки з (1) випливає, що

$$u_0 a_{n_0+N-1} = a_{n_0+N+k-1} - u_{n_0+N+k-2} a_{n_0+N+k-2} - \dots - u_1 a_{n_0+N},$$

то згідно з припущенням

$$u_0 a_{n_0+N-1} = a_{n_0+k-1} - u_{n_0+k-2} a_{n_0+k-2} - \dots - u_1 a_{n_0} = u_0 a_{n_0-1}.$$

Таким чином, $a_{n_0+N-1} = a_{n_0-1}$, адже $u_0 \neq 0$. Аналогічно, $a_{n_0+N-2} = a_{n_0-2}$. Продовжуючи ці міркування та взявши до уваги нерівність $n_0 < N$, ми одержимо, що $a_n = a_{n+N}$ для всіх $n \geq 0$. □

Рівняння

$$x^k = u_{k-1}x^{k-1} + u_{k-2}x^{k-2} + \dots + u_1 x + u_0 \tag{3}$$

називається *характеристичним рівнянням* рекурентного співвідношення (1) [2, с. 22]. Якщо характеристичне рівняння (3) має k попарно різних коренів $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq k$, то загальний член послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має вигляд

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} A_i \lambda_i^n \tag{4}$$

для деяких чисел $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{C}$ [2, с. 25].

Для $n \in \mathbb{N}_0$ розглянемо матрицю Λ_n та вектор A

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \dots & \lambda_k^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \dots & \lambda_k^{n+k-1} \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_k \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що вектор A знаходиться з рівняння

$$\Lambda_0 \cdot A = x_0, \tag{5}$$

де x_0 – набір k заданих початкових значень послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Крім того, врахувавши (4), маємо співвідношення

$$x_n = \Lambda_n \cdot A \tag{6}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

Зауваження 1. *Очевидно, що при $A = 0$ ми отримуємо тривіальну періодичну послідовність $(0, 0, 0, \dots)$. Тому надалі вважатимемо, що $A \neq 0$.*

Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$I_n = \{1 \leq i \leq k : \lambda_i^n = 1\},$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – попарно різні корені рівняння (3).

Теорема 1. *Рекурентна послідовність k-го порядку $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ є періодичною з періодом $N \in \mathbb{N}$ тоді і тільки тоді, коли*

(i) $I_N \neq \varnothing$,

(ii) $A_i = 0$ *для всіх* $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_N$.

Доведення. Покажемо, що властивості (i) та (ii) в сукупності рівносильні умові (2) Твердження 1.

Згідно з (6) маємо

$$x_N = x_0 \ \Leftrightarrow\ \Lambda_N A = \Lambda_0 A,$$

звідки

$$x_N = x_0 \ \Leftrightarrow\ (\Lambda_N - \Lambda_0)A = 0.$$

Рівняння $(\Lambda_N - \Lambda_0)A = 0$ має ненульовий розв'язок $A \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\det(\Lambda_N - \Lambda_0) = 0.$$

Оскільки

$$\Lambda_N - \Lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & \lambda_2^N - 1 & \dots & \lambda_k^N - 1 \\ \lambda_1(\lambda_1^N - 1) & \lambda_2(\lambda_2^N - 1) & \dots & \lambda_k(\lambda_k^N - 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1}(\lambda_1^N - 1) & \lambda_2^{k-1}(\lambda_2^N - 1) & \dots & \lambda_k^{k-1}(\lambda_k^N - 1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^N - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \Lambda_0 \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^N - 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\det(\Lambda_N - \Lambda_0) = \det \Lambda_0 \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^N - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le k} (\lambda_j - \lambda_i) \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i^N - 1).$$

Нагадаємо, що всі значення λ_i попарно різні, тому

$$\det(\Lambda_N - \Lambda_0) = 0 \iff \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i^N - 1) = 0.$$

Рівність з правого боку рівносильна властивості (i).

Крім того,

$$(\Lambda_N - \Lambda_0)A = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^N - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_k \end{pmatrix} = 0.$$

Звідси маємо, що

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_i^N = 1, \\ A_i = 0 \end{array} \right.$$

для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$. Остання умова рівносильна властивості (ii). $\square$

Зауваження 2. *Теорема 1 дає необхідні та достатні умови періодичності тільки для випадку, коли числа λ_i попарно різні. У випадках, коли характеристичне рівняння має кратні корені, ми будемо досліджувати періодичність послідовності іншими способами.*

3 Рекурентні послідовності другого порядку

В цьому пункті ми з'ясуємо, за яких умов на коефіцієнти $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ рекурентна послідовність другого порядку з початковими значеннями $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, що задається співвідношенням

$$a_{n+2} = u_1 a_{n+1} + u_0 a_n \tag{7}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}_0$, є періодичною.

Матриця U та вектори x_n для другого порядку мають вигляд

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_0 & u_1 \end{pmatrix}, \ x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

3.1 Короткі періоди $N = 1$ і $N = 2$

Якщо шукати серед послідовностей вигляду (7) періодичні з періодом $N = 1$, тобто, сталі послідовності $a_n = a$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то вони повинні задовольняти рівність $a = u_1 a + u_0 a$. Звідси $a = 0$ або $u_1 + u_0 = 1$. Отже, стала послідовність забезпечується умовами

$$u_1 + u_0 = 1 \quad \text{і} \quad a_1 = a_0.$$

Наприклад, нехай $a_1 = a_0 = 7$, $u_0 = 3$ і $u_1 = -2$. Тоді отримуємо періодичну послідовність $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$ з періодом $N = 1$ вигляду $7, 7, 7, \ldots$.

Шукатимемо тепер періодичні послідовності з періодом $N = 2$. Для таких послідовностей маємо

$$\begin{cases} a_0 = u_1 a_1 + u_0 a_0 \\ a_1 = u_1 a_0 + u_0 a_1, \end{cases}$$

звідки після додавання рівнянь одержимо $(a_0 + a_1)(1 - u_0 - u_1) = 0$.

Якщо $a_1 = -a_0$, то з першого рівняння маємо $u_0 - u_1 = 1$. Отже, при виконанні умов

$$u_0 - u_1 = 1 \quad \text{і} \quad a_1 = -a_0$$

ми отримуємо періодичну послідовність з періодом $N = 2$. Наприклад, при $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ маємо послідовність $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 3a_n$, та почавши із значень $a_0 = 2$, $a_1 = -2$, ми отримаємо послідовність $2, -2, 2, -2, \ldots$.

Якщо ж $a_1 \neq -a_0$, то, як і у випадку з періодом $N = 1$ ми одержуємо умову $u_0 + u_1 = 1$. Підставивши у систему, маємо $(a_0 - a_1)(1 - u_0) = 0$. Випадок $a_0 = a_1$ відкидаємо, адже в такому разі послідовність має період $N = 1$. Отже,

$$u_0 = 1, u_1 = 0, a_0 \in \mathbb{R}$$

і послідовність має вигляд $a_{n+2} = a_n$ та є періодичною з періодом $N = 2$.

3.2 Періоди довільної довжини

Розглянемо характеристичне рівняння

$$x^2 - u_1 x - u_0 = 0 \tag{8}$$

та дослідимо періодичність рекурентної послідовності другого порядку в залежності від кількості розв'язків цього рівняння.

3.2.1 Характеристичне рівняння має два різні розв'язки

Вважатимемо, що
$$u_1^2 + 4u_0 \neq 0.$$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ – розв'язки рівняння (8), причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді послідовність $(a_n)_{n=0}$ має вигляд
$$a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n$$
для деяких дійсних $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. З початкових умов маємо
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = a_0, \\ A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = a_1, \end{cases}$$
звідки
$$A_1 = \frac{a_0\lambda_2 - a_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = \frac{a_1 - a_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \tag{9}$$
а загальний член послідовності $(a_n)_{n=0}^\infty$ має вигляд
$$a_n = a_1 \cdot \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} - a_0 \cdot \frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1})}{\lambda_2 - \lambda_1},$$
при $n = 0, 1, \ldots$. Крім того, за теоремою Вієта, $u_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ і $u_0 = -\lambda_1\lambda_2$. Таким чином, послідовність $(a_n)_{n=0}^\infty$ має рівносильний вигляд
$$a_{n+2} = (\lambda_1 + \lambda_2)a_{n+1} - \lambda_1\lambda_2 a_n. \tag{10}$$

За теоремою 1 послідовність $(a_n)_{n=0}^\infty$ буде періодичною з періодом N тоді і тільки тоді, коли $I_N \neq \varnothing$ і $A_i = 0$ для всіх $i \notin I_N$.

Розглянемо спочатку випадок $|I_N| = 1$. В силу симетричності можемо вважати, що $\lambda_1^N = 1$ і $A_2 = 0$. Підставивши $A_2 = 0$ в (9), одержимо, що $a_1 = \lambda a_0$ і $A_1 = a_0$. Звідси
$$a_n = a_0\lambda_1^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{11}$$
Оскільки
$$x_1 = Ux_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_0 \\ \lambda_1^2 a_0 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_0,$$
то λ_1 в цьому випадку є власним значенням матриці U, що відповідає власному вектору x_0.

Оскільки $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R}$ і $\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{R}$, то $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ або $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. В другому випадку λ_2 теж буде N-тим коренем з одиниці, що суперечить припущенню $|I_N| = 1$. Отже, рівняння (8) має два різні дійсні корені, причому $\lambda_1 = \pm 1$. Тоді з (11) випливає, що послідовність $(a_n)_{n=0}^\infty$ має вигляд
$$a_0, a_0, a_0, a_0, \ldots$$
або
$$a_0, -a_0, a_0, -a_0, \ldots,$$
а ці випадки були розглянуті в попередньому підпункті.

Тепер перейдемо до випадку $|I_N| = 2$.

Обидва корені $\lambda_{1,2}$ дійсні. Припустимо, що $u_1^2 + 4u_0 > 0$ і

$$\lambda_1 = \tfrac{u_1 - \sqrt{u_1^2+4u_0}}{2}, \lambda_2 = \tfrac{u_1 + \sqrt{u_1^2+4u_0}}{2}.$$

Врахувавши, що $\lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{u_1^2 + 4u_0}$, ми одержимо формулу для загального члена послідовності

$$a_n = \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_0u_1 - 2a_1}{2\sqrt{u_1^2+4u_0}}\right) \cdot \left(\frac{u_1 - \sqrt{u_1^2+4u_0}}{2}\right)^n + \\ + \left(\frac{a_0}{2} - \frac{a_0u_1 - 2a_1}{2\sqrt{u_1^2+4u_0}}\right) \cdot \left(\frac{u_1 + \sqrt{u_1^2+4u_0}}{2}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

яка при $u_0 = u_1 = 1$ та $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ дає формулу Біне для класичної послідовності Фібоначчі:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Оскільки $\lambda_1 < \lambda_2$, то $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ і N – парне. З (10) отримуємо, що

$$u_0 = -\lambda_1\lambda_2 = 1, \quad u_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

що дає вже згадувану раніше періодичну послідовність вигляду $a_{n+2} = a_n$ з періодом $N = 2$ для довільного початкового значення $a_0 \in \mathbb{R}$.

Обидва корені $\lambda_{1,2}$ комплексні. У випадку, коли $u_1^2 + 4u_0 < 0$, покладемо

$$\lambda_1 = \frac{u_1 - i\sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{u_1 + i\sqrt{D}}{2},$$

де

$$D = -(u_1^2 + 4u_0).$$

Формула для загального члена послідовності при $u_1^2 + 4u_0 < 0$ виглядає наступним чином:

$$a_n = \left(\frac{a_0}{2} - i \cdot \frac{a_0u_1 - 2a_1}{2\sqrt{D}}\right) \cdot \left(\frac{u_1 - i\sqrt{D}}{2}\right)^n + \\ + \left(\frac{a_0}{2} + i \cdot \frac{a_0u_1 - 2a_1}{2\sqrt{D}}\right) \cdot \left(\frac{u_1 + i \cdot \sqrt{D}}{2}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки λ_1 і λ_2 є N-тими коренями з одиниці, а також спряженими комплексними числами, то мають місце співвідношення

$$\begin{cases} \frac{u_1 - i\sqrt{D}}{2} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \\ \frac{u_1 + i\sqrt{D}}{2} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \end{cases}$$

де

$$\varphi = \frac{2\pi k}{N}$$

при $0 \leq k \leq N-1$. Виразивши послідовно з системи значення u_1 та u_0, отримаємо, що

$$u_1 = 2\cos\varphi, \quad u_0 = -1.$$

Нагадаємо, що $u_1^2 + 4u_0 < 0$, тому $4\cos^2\varphi - 4 < 0$, звідки $\cos\varphi \in (-1,1)$ і

$$u_1 \in (-2,2).$$

3.2.2 Випадок, коли характеристичне рівняння має єдиний розв'язок

Нехай $u_1^2 + 4u_0 = 0$. Тоді для $n \in \mathbb{N}_0$ виконується рекурентне співвідношення

$$a_{n+2} = u_1 a_{n+1} - \frac{u_1^2}{4} a_n.$$

Методом математичної індукції можна встановити, що загальний член цієї послідовності має вигляд

$$a_n = \frac{u_1^n}{2^{n+1}}(2na_0 - u_1(n-1)a_1),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_1}{2}\right)^n \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(2a_0 - u_1 a_1 \cdot \tfrac{n-1}{n}\right) = \infty$$

при $|u_1| \geq 2$, то послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ може бути періодичною тільки при $|u_1| < 2$.

Припустимо, що $|u_1| < 2$ і $u_1 \neq 0$. Перепишемо a_n у вигляді

$$a_n = \left(\frac{u_1}{2}\right)^{n+1} n \left(\frac{2a_0}{u_1} - a_1\right) + \left(\frac{u_1}{2}\right)^{n+1} a_1,$$

позначимо $c = u_1/2$ і розглянемо функцію $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(\frac{a_0}{c} - a_1\right) x c^{x+1} + a_1 c^{x+1},$$

вважаючи, що $c > 0$. Тоді

$$f'(x) = c^{x+1} \cdot \left(\left(\frac{a_0}{c} - a_1\right) \ln c \cdot x + a_1 \ln c + \frac{a_0}{c} - a_1\right).$$

З вигляду похідної зрозуміло, що існує таке $x_0 \in \mathbb{R}$, що функція $f(x)$ строго монотонна на деякому проміжку $(x', +\infty)$, а, отже, неперіодична. Єдина умова для періодичності функції $f(x)$ – це рівність нулеві похідної $f'(x) = 0$ на $[1,+\infty)$. В цьому випадку

$$\begin{cases} \frac{a_0}{c} - a_1 + a_1 \ln c = 0, \\ \ln c \left(\frac{a_0}{c} - a_1\right) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $c < 1$, то $\ln c \neq 0$. Тому з другого рівняння $a_0 = ca_1$. Підставивши в перше, одержимо, що $a_1 = 0$, а звідси й $a_0 = 0$. Отже, послідовність є нульовою $(0,0,0,\dots)$.

Якщо ж $u_1 < 0$, то, підставивши $v_1 = -u_1 > 0$, одержимо

$$a_n = (-1)^{n+1} \left(\left(\frac{v_1}{2}\right)^{n+1} a_1 - \left(\frac{v_1}{2}\right)^{n+1} n \left(\frac{2a_0}{v_1} + a_1\right)\right).$$

Позначимо $b = \frac{v_1}{2} \in (0,1)$ і розглянемо функцію $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = a_1 b^{x+1} - b^{x+1} x \left(\frac{a_0}{b} + a_1\right).$$

Оскільки

$$g'(x) = b^{x+1} \left(a_1 \ln b - \frac{a_0}{b} - a_1 - \left(\frac{a_0}{b} + a_1\right) \ln bx\right),$$

то, як і в попередньому випадку, функція $g(x)$ є строго монотонною на деякому проміжку $(x'', +\infty)$. А з рівності нулеві похідної $g'(x) = 0$ знову випливає, що $a_1 = a_0 = 0$. Таким чином, жодна з послідовностей $(a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ чи $(a_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ не є періодичною, окрім випадку, коли вони нульові. Припустимо, що послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ періодична і, наприклад, $(a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ нульова. Легко бачити, що тоді й $(a_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ періодична, а, отже, нульова.

Отже, при умові $u_1^2 + 4u_0 = 0$ послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ є періодичною тоді і тільки тоді, коли вона нульова.

3.3 Підсумкова теорема та її застосування

Підсумовуючи всі вищенаведені міркування, сформулюємо критерій періодичності послідовності другого порядку.

Теорема 2. *Рекурентна ненульова послідовність другого порядку $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, що визначається співвідношенням $a_{n+2} = u_1 a_{n+1} + u_0 a_n$ з дійсними коефіцієнтами $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$, є періодичною з періодом*

- $N = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + u_1 = 1, \\ a_1 = a_0; \end{cases}$

- $N = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 - u_1 = 1, \\ a_1 = -a_0; \end{cases}$ *або* $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0, \\ a_1 \neq \pm a_0; \end{cases}$

- $N > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = -1, \\ u_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), 0 < k < N, \ (k, N) = 1. \end{cases}$

Теорема 2 дає можливість легко конструювати періодичні послідовності як завгодно великої довжини $N \in \mathbb{N}$. Для цього слід вибрати довільний початковий вектор x_0, довільне натуральне $k \in (0, N)$ і послідовно обчислити $a_{n+2} = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) a_{n+1} - a_n$ для $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Приклад 1. *Побудуємо послідовність з періодом $N = 24$. Нехай $k = 1$,*

$$u_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

і початкові значення $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. *Тоді послідовність*

$$a_{n+2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} a_{n+1} - a_n, \ n = 0, 1, \ldots$$

є періодичною з періодом 24 *за теоремою* 2. *Наведемо значення цієї послідовності:*

a_0	0	a_{12}	0	a_{24}	0
a_1	1	a_{13}	-1	a_{25}	1
a_2	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{14}	$-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{26}	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$
a_3	$1+\sqrt{3}$	a_{15}	$-1-\sqrt{3}$	a_{27}	$1+\sqrt{3}$
a_4	$\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{16}	$-\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{28}	$\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$
a_5	$2+\sqrt{3}$	a_{17}	$-2-\sqrt{3}$	a_{29}	$2+\sqrt{3}$
a_6	$\sqrt{2}+\sqrt{6}$	a_{18}	$-\sqrt{2}-\sqrt{6}$	a_{30}	$\sqrt{2}+\sqrt{6}$
a_7	$2+\sqrt{3}$	a_{19}	$-2-\sqrt{3}$	a_{31}	$2+\sqrt{3}$
a_8	$\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{20}	$-\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{32}	$\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$
a_9	$1+\sqrt{3}$	a_{21}	$-1-\sqrt{3}$	a_{33}	$1+\sqrt{3}$
a_{10}	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{22}	$-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{34}	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$
a_{11}	1	a_{23}	-1	a_{35}	1

При цьому $a_{i+\frac{N}{2}} = -a_i$ *для кожного* $i \in \mathbb{N}_0$.

Розглянемо тепер обернену задачу: нехай послідовність задана рекурентним співвідношенням (7). Для того, щоб дізнатися, чи вона періодична і яка довжина періода (у випадках, коли не справджуються перші дві умови теореми 2 для коротких періодів), то в разі рівності $u_0 = -1$ необхідно перевірити, чи $\frac{1}{\pi}\mathrm{arccos}\frac{u_1}{2}$ є раціональним числом. Якщо так, то зобразити $\frac{1}{\pi}\mathrm{arccos}\frac{u_1}{2}$ у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, і при парному m матимемо період $N = n$, а при непарному m – період $N = 2n$.

Приклад 2. *Нехай послідовність* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *визначається співвідношеннями*

$$a_0 = 3, a_1 = -2,$$
$$a_{n+2} = \sqrt{2}a_{n+1} - a_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{arccos}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$$

і при цьому $m = 1$, *то послідовність* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *є періодичною з періодом* $N = 2n = 8$ *за теоремою* 2, *в чому можна переконатися й безпосередньо:*

$$3, -2, -2\sqrt{2}-3, -3\sqrt{2}-2, -3, 2, 2\sqrt{2}+3, 2+3\sqrt{2}, 3, -2, \ldots$$

У зв'язку із цим виникає питання

Питання 1. *Описати множину*

$$B = \{b \in [-1, 1] : \frac{1}{\pi}\arccos b \in \mathbb{Q}\}.$$

Зрозуміло, що $\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1\} = \{\pm\sqrt{r} : r = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\} \subseteq B$. Природно запитати наступне.

Питання 2. *Знайти всі раціональні числа $r \in \mathbb{Q}$, такі, що $\sqrt{r} \in B$.*

Як ми бачили в прикладах 1 і 2, коефіцієнт u_1 в кожній з наведених послідовностей є ірраціональним числом. Тому виникає питання, пов'язане з виглядом коефіцієнтів періодичної послідовності, і частково пов'язане з питаннями 1 і 2.

Питання 3. *Описати періодичні послідовності другого порядку з раціональними коефіцієнтами u_1 та u_0.*

Відповіді на друге і третє питання ми дамо в наступному підпункті.

3.4 Раціональність функцій $\cos x$ та $\arccos x$

З'ясуємо спочатку, за яких умов коефіцієнт $u_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ є раціональним числом.

Теорема 3. *Якщо $r \in \mathbb{Q}$ і $\cos(2\pi r) \in \mathbb{Q}$, то $\cos(2\pi r) \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$.*

Доведення. Нехай
$$\cos(2\pi r) = \frac{m_0}{n_0},$$
де m_0 – ціле, n_0 – натуральне, причому числа m_0 і n_0 взаємно прості, тобто, найбільший спільний дільник $(m_0, n_0) = 1$.

Припустимо, що $\cos(2\pi r) \notin \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$. Тоді $m_0 \neq 0$ і $n_0 > 2$. За формулою косинуса подвійного кута, маємо
$$\cos(4\pi r) = \frac{2m_0^2 - n_0^2}{n_0^2}.$$
Розглянемо випадок, коли чисельник та знаменник дробу в правій частині рівності не є взаємно простими числами. Нехай p – простий дільник чисел $2m_0^2 - n_0^2$ і n_0^2. Тоді $p|n_0$ і $p|2m_0^2$. Оскільки m_0 і n_0 взаємно прості, то $p|2$. Отже, $n_0 = 2k$ для деякого цілого числа k. Тоді
$$\cos(4\pi r) = \frac{m_0^2 - 2k^2}{2k^2}.$$
Якщо існує просте число q, таке, що $q|(m_0^2 - 2k^2)$ і $q|k^2$, то $q|k$ і $q|m_0^2$. Звідси $q|m_0$ і $q|n_0$, що суперечить припущенню про нескоротність дробу $\frac{m_0}{n_0}$. Крім того, оскільки $n_0 > 2$, то $n_0^2 > 2k_0^2 = \frac{n_0^2}{2} > n_0$. Таким чином,
$$\cos(4\pi r) = \frac{m_1}{n_1},$$
де $n_1 > n_0$ і $(m_1, n_1) = 1$. Аналогічно,
$$(\cos 8\pi r) = \frac{m_2}{n_2},$$

де $n_2 > n_1$ і $(m_2, n_2) = 1$. Продовжуючи ці міркування до нескінченності, ми отримаємо послідовність раціональних чисел $(\cos(2\pi \cdot 2^k r))_{k=0}^{\infty}$, таких, що

$$\cos(2\pi \cdot 2^k r) = \frac{m_k}{n_k},$$

$$(m_k, n_k) = 1, \tag{12}$$

і, крім того,

$$n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots. \tag{13}$$

Нехай раціональне число r має вигляд $r = \frac{a}{b}$. Врахувавши 2π-періодичність косинуса, ми отримаємо, що

$$|\{\cos(2\pi \cdot 2^k r) : k = 0, 1, \ldots\}| = b.$$

Але скінченність множини значень послідовності $(\cos(2\pi \cdot 2^k r))_{k=0}^{\infty}$ суперечить властивостям (12) і (13).

Отримана суперечність завершує доведення. □

Наслідок 1. *Нехай $a_{n+2} = u_1 a_{n+1} + u_0 a_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$, причому $u_0, u_1 \in \mathbb{Q}$. Наступні умови рівносильні*

(i) $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *періодична з періодом $N > 2$;*

(ii) $u_0 = -1$, $u_1 \in \{0, \pm 1\}$.

Доведення. **(i) ⇒ (ii).** З теореми 2 випливає, що $u_0 = -1$ і $u_1 = 2\cos(2\pi r)$, $r \in \mathbb{Q}$, причому $u_1 \neq \pm 2$. Тоді, застосувавши теорему 3, ми одержимо, що $u_1 \in \{0, \pm 1\}$.

(ii) ⇒ (i). При $u_1 = 0$ ми отримуємо послідовність $a_{n+2} = -a_n$ вигляду

$$a_0, a_1, -a_0, -a_1, a_0, a_1, \ldots,$$

періодичну з періодом $N = 4$.

При $u_1 = 1$ ми отримуємо послідовність $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ вигляду

$$a_0, a_1, a_1 - a_0, -a_0, -a_1, a_0 - a_1, a_0, a_1, \ldots,$$

періодичну з періодом $N = 6$.

При $u_1 = -1$ ми отримуємо послідовність $a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n$ вигляду

$$a_0, a_1, -a_1 - a_0, a_0, a_1, \ldots,$$

періодичну з періодом $N = 3$. □

Перейдемо тепер до вивчення питання, коли $\frac{1}{2\pi} \arccos b = \frac{m}{n}$ для $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ і $|m| < n$.

В теоремі 3 ми з'ясували, що $b \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow b \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Зауважимо, що

$$\left(\cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right)\right)^n = 1,$$

тому n-ий корінь з одиниці $w = \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right)$, будучи коренем многочлена $x^n - 1 = 0$, є алгебраїчним числом. Оскільки $b = \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) = \frac{w+\overline{w}}{2}$, то b також є числом алгебраїчним. Отже, природно дізнатися, чи є число b алгебраїчним цілим, а також, чи є воно алгебраїчним цілим числом невисоких степенів, наприклад, другого чи третього. Для цього нам буде корисною теорема Лемера [5, Theorem 1].

Теорема 4 (Лемер)**.** *Нехай $m, n \in \mathbb{N}$ – взаємно прості, $n > 2$. Тоді $2\cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right)$ є алгебраїчним цілим степеня $\frac{1}{2}\varphi(n)$, де $\varphi(n)$ – функція Ейлера.*

Розглянемо періодичну послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ з періодом $N > 2$, таку, що її коефіцієнти $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ є алгебраїчними цілими числами степеня $k > 1$. За теоремою 2, $u_0 = -1$ і $u_1 = 2\cos(\frac{2\pi m}{n})$, $|m| < n$ і числа m, n взаємно прості.

Згідно з теоремою Лемера, якщо u_1 є алгебраїчним цілим числом другого степеня, то $\varphi(n) = 4$. Розкладемо $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i} > 1$, тоді $\varphi(n) = \prod_{j=1}^{i} p_j^{\alpha_i - 1}(p_j - 1)$.

Нехай $n = 2^m s$, де $m \geq 1$ і s – непарне. Тоді

$$2^m s(p_2 - 1) \dots (p_i - 1) = 8p_2 \dots p_i, \tag{14}$$

де p_j при $2 \leq j \leq i$ – непарне прості числа.

- Якщо $m = 3$, то $i = 1$, інакше ліва частина рівності (14) буде кратна 16, а права – ні. В цьому випадку $n = 8$.

- Якщо $m = 2$, то $s > 1$ і, крім того, з (14) випливає рівність $s(p_2 - 1) \dots (p_i - 1) = 2p_2 \dots p_i$. Звідси маємо, що в розкладі числа n присутнє тільки одне просте число p_j, $j \geq 2$, в ненульовому степені. Нехай $p_j - 1 = 2q$, тоді $sq = p_j$, що можливо тільки у випадку $q = 1$. Отже, $p_j = 3$. В цьому випадку $n = 12$.

- Якщо $m = 1$, то $s > 1$ і $s(p_2 - 1) \dots (p_i - 1) = 4p_2 \dots p_i$. В цій ситуації можливі два варіанти – в розкладі числа n присутні рівно 2 числа $p_j < p_l$ в ненульових степенях, такі, що $p_j \equiv p_l \equiv 3 \mod 4$, або тільки одне число p_j в ненульовому степені, таке, що $p_j \equiv 1 \mod 4$. В першому випадку маємо $p_j^{\alpha_j - 1} p_l^{\alpha_l - 1}(p_j - 1)(p_l - 1) = 4$. Після скорочення на 4 обидвох частин рівності, ми одержимо, що $p_j = p_l = 3$, що суперечить припущенню $p_j < p_l$. В другому випадку маємо $p_j^{\alpha_j - 1}(p_j - 1) = 4$. Звідси $\alpha_j = 1$, $p_j = 5$. Отже, $n = 10$.

Нехай тепер n – непарне число. Тоді $\alpha_1 = 0$ і

$$p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_i^{\alpha_i - 1}(p_2 - 1) \dots (p_i - 1) = 4.$$

Аналогічно до попередніх міркувань для випадку $m = 1$, така рівність можлива тільки для $n = 5$.

Таким чином,

$$\varphi(n) = 4 \;\Leftrightarrow\; n \in \{5, 8, 10, 12\}.$$

Подібно можна встановити, що

$$\begin{aligned}
\varphi(n) = 6 \quad &\Leftrightarrow \quad n \in \{7, 9, 14, 18\}\\
\varphi(n) = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad n \in \{15, 16, 20, 24, 30\}\\
\varphi(n) = 10 \quad &\Leftrightarrow \quad n \in \{11, 22\}\\
\varphi(n) = 12 \quad &\Leftrightarrow \quad n \in \{13, 21, 26, 28, 36, 42\}\\
\varphi(n) = 14 \quad &\Leftrightarrow \quad n \in \varnothing.
\end{aligned}$$

Оскільки не існує натурального числа n, такого, що $\varphi(n) = 14$, то коефіцієнт u_1 періодичної послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ не може бути коренем зведеного многочлена 7-го степеня з цілими коефіцієнтами.

Знайдемо тепер всі можливі значення кутів $\varphi = 2\pi m/n$ та коефіцієнтів $u_1 = 2\cos\varphi$ у випадках, коли вони є алгебраїчними цілими числами степенів $k = 2, 3, 4, 5$.

k	поліном	u_1 (нулі полінома)	φ	l	N
2	$x^2 + x - 1$	$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{2\pi\cdot l}{5}$	$1, 2$	5
	$x^2 - 2$	$\pm\sqrt{2}$	$\frac{\pi\cdot l}{4}$	$1, 3$	8
	$x^2 - x - 1$	$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\pi\cdot l}{5}$	$1, 3$	10
	$x^2 - 3$	$\pm\sqrt{3}$	$\frac{\pi\cdot l}{6}$	$1, 5$	12
3	$x^3 + x^2 - 2x - 1$	$-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt[3]{49}}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}(1+3i\sqrt{3})}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + 3i\sqrt{3})}$	$\frac{2\pi\cdot l}{7}$	$1, 2, 3$	7
	$x^3 - 3x + 1$	$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}i(\sqrt{3}+i)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}i(\sqrt{3} + i)}$	$\frac{2\pi\cdot l}{9}$	$1, 2, 4$	9
	$x^2 - x^2 - 2x + 1$	$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt[3]{49}}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-1+3i\sqrt{3})}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-1 + 3i\sqrt{3})}$	$\frac{\pi\cdot l}{7}$	$1, 3, 5$	14
	$x^3 - 3x - 1$	$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})}$	$\frac{\pi\cdot l}{9}$	$1, 5, 7$	18
4	$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$	$\frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}\right)$	$\frac{2\pi\cdot l}{15}$	$1, 2, 4, 7$	15
		$\frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right)$			
		$\frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}\right)$			
		$\frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right)$			
	$x^4 - 4x^2 + 2$	$\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$	$\frac{\pi\cdot l}{8}$	$1, 3, 5, 7$	16
	$x^4 - 5x^2 + 5$	$\pm\sqrt{\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}}$	$\frac{\pi\cdot l}{10}$	$1, 3, 7, 9$	20
	$x^4 - 4x^2 + 1$	$\pm\frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{6})$	$\frac{\pi\cdot l}{12}$	$1, 5, 7, 11$	24
	$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1$	$\frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\pi\cdot l}{15}$	$1, 7, 11, 13$	30
		$\frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}\right)$			
		$\frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right)$			
		$\frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}\right)$			

5	$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$	$2\cos\varphi$	$\frac{2\pi\cdot l}{11}$	$1,2,3,4,5$	11
	$x^5-x^4-4x^3+3x^2+3x-1$	$2\cos\varphi$	$\frac{\pi\cdot l}{22}$	$1,3,5,7,9$	22

Опишемо знаходження незвідного полінома $P_q(x)=x^q+a_{q-1}x^{q-1}+\dots+a_1x+a_0$ з цілими коефіцієнтами, коренем якого є число u_1, наприклад, для $k=4$ і $u_1=2\cos\frac{2\pi}{15}$. Позначимо

$$w=\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right).$$

Тоді

$$u_1=2\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)=w+\overline{w}=w+\tfrac{1}{w}.$$

Зауважимо, що $w^{15}=1$ і, оскільки $w\neq 1$, то $w^{14}+w^{13}+\dots+w+1=0$. Поділимо останню рівність на $w^7\neq 0$ і отримаємо

$$\left(w^7+\frac{1}{w^7}\right)+\dots+\left(w+\frac{1}{w}\right)+1=0.$$

Оскільки

$$\begin{gathered}
x^2+y^2=(x+y)^2-2xy,\\
x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y),\\
x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2,\\
x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x+y)^3+5x^2y^2(x+y),\\
x^6+y^6=(x+y)^6-6xy(x+y)^4+9x^2y^2(x+y)^2-2x^3y^3,\\
x^7+y^7=(x+y)^7-7xy(x+y)^5+14x^2y^2(x+y)^3-7x^3y^3(x+y),
\end{gathered}$$

то, підставивши $x=w$, $y=\frac{1}{w}$ та зробивши заміну $t=w+\frac{1}{w}$, ми отримаємо рівняння

$$t^7+t^6-6t^5-5t^4+10t^3+6t^2-4t-1=0.$$

З допомогою WolframAlpha переконуємося, що многочлен в лівій частині рівності розкладається на множники

$$t^7+t^6-6t^5-5t^4+10t^3+6t^2-4t-1=(t+1)(t^2+t-1)(t^4-t^3-4t^2+4t+1).$$

Оскільки $u_1=2\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ не є коренем ані $(t+1)$, ані (t^2+t-1), то u_1 є коренем незвідного многочлена $t^4-t^3-4t^2+4t+1$ з цілими коефіцієнтами, а, отже, алгебраїчним цілим числом четвертого степеня.

4 Рекурентні послідовності третього порядку

Перейдемо до питання періодичності рекурентних послідовностей третього порядку, тобто, послідовностей $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$a_{n+3} = u_2 a_{n+2} + u_1 a_{n+1} + u_0 a_n, \tag{15}$$

для $n = 0, 1, \ldots$ із заданими початковими значеннями a_0, a_1, a_2.

Розглянемо матрицю U і вектори x_n при $n \in \mathbb{N}_0$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix}, \quad x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

та нагадаємо, що $x_{n+1} = U x_n$. Крім того, індукцією можна довести, що для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ має місце співвідношення

$$x_n = U^n x_0. \tag{16}$$

4.1 Короткі періоди $N = 1, 2, 3$

Коефіцієнти сталої послідовності вигляду (15) з початковим вектором $x_0 = (a, a, a)$ задовольняють рівність $a = (u_2 + u_1 + u_0)a$, звідки $u_2 + u_1 + u_0 = 1$ або $a = 0$.

Нехай послідовність (15) має період $N = 2$. Тоді початковий вектор має вигляд $x_0 = (a_0, a_1, a_0)$ і $a_3 = a_1$, $a_4 = a_0$. Підставивши значення a_3 і a_4 в (15), одержимо рівності

$$\begin{cases} a_1 = u_2 a_0 + u_1 a_1 + u_0 a_0, \\ a_0 = u_2 a_1 + u_1 a_0 + u_0 a_1. \end{cases}$$

Звідси маємо, що $(a_0 + a_1)(u_0 + u_1 + u_2 - 1) = 0$. Якщо $a_1 = -a_0$, то з першого рівняння системи $u_1 - u_0 - u_2 = 1$. В цьому випадку послідовність має вигляд $a_0, -a_0, a_0, -a_0, \ldots$. Якщо ж $a_1 \neq -a_0$, то підставивши $u_0 + u_1 + u_2 = 1$ в систему, одержимо $(a_0 - a_1)(1 - u_1) = 0$. У випадку $a_1 = a_0$ ми отримуємо сталу послідовність. Таким чином, $u_1 = 1$ і $u_0 + u_2 = 0$, а послідовність виглядатиме наступним чином: $a_0, a_1, a_0, a_1, \ldots$.

Знайдемо тепер умови на коефіцієнти для періоду $N = 3$. Оскільки $x_3 = x_0$, то з (15) випливають рівності

$$\begin{cases} a_0 = u_2 a_2 + u_1 a_1 + u_0 a_0, \\ a_1 = u_2 a_0 + u_1 a_2 + u_0 a_1, \\ a_2 = u_2 a_1 + u_1 a_0 + u_0 a_2. \end{cases}$$

Додавши ці рівності, маємо $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ або $u_0 + u_1 + u_2 = 1$. Якщо $a_0 + a_1 + a_2 = 0$, то, підставивши $a_2 = -a_1 - a_0$ в систему, після перетворень, отримаємо співвідношення $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ і $u_2 = u_1 = u_0 - 1$. Наприклад, при $x_0 = (1, 2, -3)$ і $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n$ маємо періодичну послідовність $1, 2, -3, 1, 2, -3, \ldots$ з періодом $N = 3$. У випадку, коли $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$, то $u_0 + u_1 + u_2 = 1$, звідки з системи маємо

$$\begin{cases} u_1(a_1 - a_2) = (a_0 - a_2)(1 - u_0) \\ u_1(a_2 - a_0) = (a_1 - a_0)(1 - u_0). \end{cases}$$

Відкинувши співвідношення, з яких випливають випадки періодів $N = 1$ та $N = 2$, одержимо, що $u_1 = u_2 = 0$, $u_0 = 1$ і вектор x_0 не сталий, тобто, $(a_1 - a_0)^2 + (a_2 - a_1)^2 + (a_2 - a_0)^2 > 0$. Послідовність має вигляд $a_{n+3} = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, і є періодичною з періодом $N = 3$.

4.2 Періоди довільної довжини

Розглянемо характеристичне рівняння

$$x^3 - u_2x^2 - u_1x - u_0 = 0 \tag{17}$$

співвідношення (15). Зробимо підстановку $x = y + \frac{u_2}{3}$ і після перетворень одержимо кубічне рівняння

$$y^3 + py + q = 0, \tag{18}$$

де

$$p = -\frac{u_2^2}{3} - u_1, \quad q = -\frac{2u_2^3}{27} - \frac{u_2u_1}{3} - u_0.$$

Згідно з [1, с. 235], корені рівняння (18) можуть бути знайдені за формулою Кардано

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

де з трьох різних коренів кубічних

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{19}$$

потрібно обирати той, що задовольняє рівність $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$, де

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{20}$$

Позначимо

$$D = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = -4u_2^3u_0 + u_2^2u_1^2 - 18u_2u_1u_0 + 4u_1^3 - 27u_0^2. \tag{21}$$

Згідно з [1, с. 236-237], у випадках $D \neq 0$ рівняння (17) має три попарно різні корені, а у випадку $D = 0$ – три корені, два з яких рівні між собою.

4.3 Характеристичне рівняння має три попарно різні корені

Розглянемо випадок $D \neq 0$ і нехай λ_1, λ_2 і λ_3 – попарно різні корені рівняння (17). Згідно з (4), загальний член послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, яка визначається співвідношенням (15), має вигляд

$$a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + A_3\lambda_3^n \tag{22}$$

для кожного $n = 0, 1, \ldots,$ де $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$. Знайдемо ці числа з матричного рівняння $\Lambda_0 A = x_0$, де

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},\ x_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\Lambda_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{-\lambda_2-\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} \\ \frac{\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} & \frac{-\lambda_1-\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} & \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} \\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} & \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} & \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = \frac{\lambda_2\lambda_3 a_0 - \lambda_2 a_1 - \lambda_3 a_1 + a_2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)},$$
$$A_2 = \frac{\lambda_1\lambda_3 a_0 - \lambda_1 a_1 - \lambda_3 a_1 + a_2}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)},$$
$$A_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2 a_0 - \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_1 + a_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}. \quad (23)$$

Слідуючи теоремі 1, необхідно дослідити умови на коефіцієнти u_0, u_1 та u_2, при виконанні яких $|I_N| \neq \varnothing$ та $A_i = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, 3\} \setminus I_N$. Отже, нехай спочатку $|I_N| = 1$. Без обмеження загальності вважатимемо, що

$$A_1 = A_2 = 0,\ \lambda_3^N = 1.$$

Тоді з рівностей (23) випливає, що

$$\begin{cases} \lambda_2\lambda_3 a_0 - (\lambda_2+\lambda_3)a_1 + a_2 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_3 a_0 - (\lambda_1+\lambda_3)a_1 + a_2 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_2 a_0 - (\lambda_1+\lambda_2)a_1 + a_2 &= A_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2). \end{cases}$$

Віднявши друге рівняння від першого та врахувавши, що $\lambda_2 \neq \lambda_1$, ми одержимо рівність $a_1 = \lambda_3 a_0$. Підставивши цей зв'язок у перше рівняння, отримаємо, що $a_2 = \lambda_3^2 a_0$. Тоді з третього рівняння $A_3 = a_0$, звідки отримуємо загальний вигляд послідовності

$$a_n = \lambda_3^n a_0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (24)$$

Оскільки

$$Ux_0 = x_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 a_0 \\ \lambda_3^2 a_0 \\ \lambda_3^3 a_0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} a_0 \\ \lambda_3 a_0 \\ \lambda_3^2 a_0 \end{pmatrix} = \lambda_3 x_0,$$

то x_0 є власним вектором матриці U із власним значенням λ_3.

При $D > 0$ всі корені рівняння (18), а значить, і рівняння (17) дійсні. Тому $\lambda_1 = \pm 1$. З (24) випливає, що послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має вигляд $a_0, a_0, \ldots$ або $a_0, -a_0, a_0, -a_0, \ldots$, а такі послідовності ми вже розглядали раніше.

У випадку $D < 0$ рівняння (18) матиме один дійсний корінь і два комплексні спряжені корені. Зрозуміло, що тоді й корені рівняння (17) матимуть таку ж властивість. Тоді $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, інакше λ_1 мало б спряжений корінь, який теж був би N-тим коренем з одиниці, що суперечить припущенню $|I_N| = 1$. Отже, $\lambda_1 = \pm 1$, що знову приводить до вищенаведених випадків.

Припустимо тепер, що $|I_N| = 2$ і, наприклад, $A_3 = 0$, а $\lambda_1^N = \lambda_2^N = 1$. Тоді, з (23) маємо

$$\begin{cases} \lambda_2\lambda_3 a_0 - (\lambda_2 + \lambda_3)a_1 + a_2 & = A_1(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2), \\ \lambda_1\lambda_3 a_0 - (\lambda_1 + \lambda_3)a_1 + a_2 & = A_2(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1), \\ \lambda_1\lambda_2 a_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)a_1 + a_2 & = 0. \end{cases}$$

З третього рівняння

$$a_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)a_1 - \lambda_1\lambda_2 a_0.$$

Підставивши значення a_2 в перше та друге рівняння, ми одержимо

$$A_1 = \frac{a_0\lambda_2 - a_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = \frac{a_1 - a_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

тобто, числа A_1 і A_2 задовольняють рівності (9). Звідси, використовуючи (22), індуктивно можна визначити рекурентний вигляд послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, а саме

$$a_{n+2} = (\lambda_1 + \lambda_2)a_{n+1} - \lambda_1\lambda_2 a_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{25}$$

Зауважимо, що $\lambda_1\lambda_2 = 1$ і $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ для деякого $0 < k < N$ згідно з теоремою 2. З теореми Вієта випливає, що $\lambda_1 + \lambda_2 = u_2 - u_0$. Отже,

$$u_2 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + u_0.$$

Дал, за теоремою Вієта $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = u_0$, звідки $\lambda_3 = u_0$. Крім того,

$$u_1 = -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) = -1 - \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) = -1 - 2u_0\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right).$$

Залишилося знайти вигляд коефіцієнтів u_0, u_1 та u_2 у випадку, коли $|I_N| = 3$.

4.3.1 Випадок $D < 0$

В цьому випадку α буде мати один дійсний корінь, позначимо його через α_1, і два комплексні спряжені корені. Позначимо через β_1 відповідний дійсний корінь β, такий, що

$$\alpha_1\beta_1 = -\tfrac{p}{3}. \tag{26}$$

Тоді рівняння (18) має один дійсний корінь

$$y_1 = \alpha_1 + \beta_1 \in \mathbb{R}$$

і два комплексні

$$y_{2,3} = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}.$$

При цьому розв'язками рівняння (17) будуть попарно різні числа $\lambda_i = y_i + \frac{u_2}{3}$, $i = 1, 2, 3$.

Оскільки кожне λ_i є N-тим коренем з одиниці, а $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + \frac{u_2}{3} = 1, \\ \alpha_1 + \beta_1 + \frac{u_2}{3} = -1 \text{ і } N - \text{ парне} \end{array} \right. \\ \frac{u_2}{3} - \frac{\alpha_1+\beta_1}{2} + i\sqrt{3}\frac{\alpha_1-\beta_1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right), \\ \frac{u_2}{3} - \frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - i\sqrt{3}\frac{\alpha_1-\beta_1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right) \end{cases}$$

для деяких $n, r \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Тоді з другого і третього рівнянь системи маємо, що $\cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right)$, а $\sin\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right)$. Позначимо $\varphi = \frac{2\pi \cdot n}{N}$.

Якщо $\alpha_1 + \beta_1 + \frac{u_2}{3} = \pm 1$, то $\frac{u_2}{3} - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1) = \frac{u_2}{2} \mp \frac{1}{2}$. Підставивши в друге рівняння системи, отримаємо можливі вирази для u_2:

$$u_2 = 2\cos\varphi + 1 \text{ або } u_2 = 2\cos\varphi - 1 \text{ при парному } N. \tag{27}$$

З другого та третього рівнянь системи маємо

$$\alpha_1 = \frac{u_2}{3} - \cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}, \ \beta_1 = \frac{u_2}{3} - \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}.$$

Тоді

$$\alpha_1\beta_1 = \left(\frac{u_2}{3} - \cos\varphi\right)^2 - \frac{\sin^2\varphi}{3} = \frac{{u_2}^2}{9} - \frac{2u_2}{3}\cos\varphi + \frac{4\cos^2\varphi - 1}{3},$$

а з іншого боку, з (26)

$$\alpha_1\beta_1 = \frac{{u_2}^2}{9} + \frac{u_1}{3}.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$u_1 = 4\cos^2\varphi - 2u_2\cos\varphi - 1.$$

Звідси, $u_1 = -2\cos\varphi - 1$ при $u_2 = 2\cos\varphi + 1$ і $u_1 = 2\cos\varphi - 1 = u_2$ при $u_2 = 2\cos\varphi - 1$. Далі, якщо $u_2 = 2\cos\varphi + 1$, то коренем рівняння (17) є $\lambda_1 = 1$, тому в цьому випадку $u_2 + u_1 + u_0 = 1$, а тоді $u_0 = 1$. Якщо ж $u_2 = 2\cos\varphi - 1$, то коренем рівняння (17) є $\lambda_1 = -1$, тому $u_1 - u_0 - u_2 = 1$, звідки $u_0 = -1$.

4.3.2 Випадок $D > 0$

В цій ситуації всі корені рівняння (17) дійсні та різні. З іншого боку, $|\lambda_i| = 1$ для кожного $i = 1, 2, 3$. Тому хоча б два значення λ_i повинні збігатися, отримуємо суперечність.

4.4 Характеристичне рівняння має кратні корені

Якщо $D = 0$, то рівняння (17) має три дійсні корені, два з яких між собою рівні.

Розглянемо спочатку випадок, коли характеристичне рівняння (17) має три корені, два з яких, скажімо, λ_2 і λ_3 рівні, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді згідно з [2, с. 39], загальний член послідовності (15) має вигляд

$$a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + A_3 n\lambda_2^n$$

для деяких $A_i \in \mathbb{R}$ і кожного $n = 0, 1, \ldots$. Для знаходження A_i розв'яжемо відповідне матричне рівняння $M_0 A = x_0$, де

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2^2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\det M = \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \neq 0$, тоді

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & -\frac{2\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\ \frac{\lambda_1(\lambda_1-2\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{2\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{-1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{-1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}, \end{pmatrix}$$

звідки

$$A_1 = \frac{\lambda_2^2 a_0 - 2\lambda_2 a_1 + a_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$
$$A_2 = \frac{\lambda_1^2 a_0 - 2\lambda_1\lambda_2 a_0 + 2\lambda_2 a_1 - a_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$
$$A_3 = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_1 - \lambda_1\lambda_2 a_0 - a_2}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (28)$$

Для $n \in \mathbb{N}_0$ позначимо

$$M_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & n\lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & (n+1)\lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & (n+2)\lambda_2^{n+2} \end{pmatrix}.$$

Тоді $x_n = M_n A$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$. Перевіримо умову періодичності $x_N = x_0$. Маємо

$$M_N A = M_0 A \;\Leftrightarrow\; (M_N - M_0)A = 0 \;\Leftrightarrow\; M_0 \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & N\lambda_2^N \\ 0 & 0 & \lambda_2^N - 1 \end{pmatrix} \cdot A = 0.$$

Остання рівність вірна тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & N\lambda_2^N \\ 0 & 0 & \lambda_2^N - 1 \end{pmatrix} \cdot A = 0,$$

що рівносильно умовам

$$\text{(I)} \begin{cases} \lambda_1^N = \lambda_2^N = 1, \\ A_3 = 0; \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} \lambda_1^N = 1, \\ A_2 = A_3 = 0; \end{cases} \qquad \text{(III)} \begin{cases} \lambda_2^N = 1, \\ A_1 = A_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки у всіх трьох випадках $A_3 = 0$, то $a_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)a_1 - \lambda_1\lambda_2 a_0$ з рівностей (28). Підставивши це значення у вирази для A_1 та A_2, ми одержимо рівності (9). Таким чином, випадки (I)–(III) рівносильні розглянутим вище випадкам $|I_N| = 1$ та $|I_N| = 2$.

Наприкінці розглянемо випадок, коли рівняння (17) має три однакові корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Тоді згідно з [2, с. 39] загальний член послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має вигляд

$$a_n = \lambda^n(A_1 + A_2 n + A_3 n^2)$$

для деяких $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$. Аналогічно як у підпункті 3.2.2, ми отримаємо, що така послідовність є періодичною тоді і тільки тоді, коли вона нульова.

4.5 Підсумкова теорема для послідовностей третього порядку

Теорема 5. *Рекурентна ненульова послідовність третього порядку $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, що визначається співвідношенням $a_{n+3} = u_2 a_{n+2} + u_1 a_{n+1} + u_0 a_n$ з дійсними коефіцієнтами $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, є періодичною з періодом*

- $N = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 1, \\ x_0 = (a_0, a_0, a_0); \end{cases}$

- $N = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_0 - u_2 = 1, \\ x_0 = (a_0, -a_0, a_0); \end{cases}$ *або* $\begin{cases} u_0 + u_2 = 0, u_1 = 1, \\ x_0 = (a_0, a_1, a_0), a_1 \neq \pm a_0; \end{cases}$

- $N = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 = u_0 - 1, \\ x_0 = (a_0, a_1, -a_0 - a_1); \end{cases}$ *або* $\begin{cases} u_1 = u_2 = 0, u_0 = 1, \\ x_0 - \text{довільний вектор}; \end{cases}$

- $N > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2u_0 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \ u_2 = u_0 + 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \\ x_0 = (a_0, a_1, 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) a_1 - a_0), \\ 0 < k < N, \ (k, N) = 1; \end{cases}$ *або*

$\begin{cases} u_2 = -u_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + 1, \ u_0 = 1, \\ 0 < k < N, \ (k, N) = 1; \end{cases}$ *або*

$\begin{cases} u_2 = u_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - 1, \ u_0 = -1, \\ N - \text{парне}. \end{cases}$

Приклад 3. Побудуємо послідовність третього порядку з періодом $N = 12$. Скористаємося другою умовою на коефіцієнти u_0, u_1, u_2 для випадку $N > 3$. Нехай $k = 1$, тоді $u_0 = 1$, $u_2 = -u_1 = 2\cos\frac{\pi}{6} + 1 = \sqrt{3} + 1$,

$$a_{n+3} = (\sqrt{3} + 1)a_{n+2} - (\sqrt{3} + 1)a_{n+1} + a_n$$

та нехай $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ і $a_2 = 2$. Тоді послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має вигляд

$$0, 1, 2, 1 + \sqrt{3}, 3, 1 + \sqrt{3}, 2, 1, 0, 1 - \sqrt{3}, -1, 1 - \sqrt{3}, 0, 1, 2, \ldots$$

причому $x_{12} = x_0$.

Приклад 4. Нехай $N = 10$ і $\varphi = 72^\circ = \frac{4\pi}{10}$. Скористаємося третьою умовою на коефіцієнти u_0, u_1, u_2 для випадку $N > 3$. Зауважимо, що $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Далі, $u_2 = u_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $u_0 = -1$ і

$$a_{n+3} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a_{n+2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a_{n+1} - a_n.$$

Покладемо $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$. Тоді отримуємо послідовність

$$1, 1, 0, \frac{\sqrt{5}-2}{2}, 1-\sqrt{5}, -1, -1, 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}-1, 1, 1, 0, \ldots.$$

Таким чином, $x_{10} = x_0$, і послідовність має період $N = 10$.

Список літератури

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, 1965
2. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности, 1950
3. Kalman D., Mena R. (2003) *The Fibonacci Numbers—Exposed*, Mathematics Magazine, 76:3, 167-181
4. Koshy T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, 2001.
5. Lehmer D.H. *A Note on Trigonometric Algebraic Numbers*, Amer. Math. Monthly **40** (3), 1933, 165-166.
6. Niven I. *Irrational numbers*, Mathematical Association of America; distributed by J. Wiley, New York, 1956.
7. The Fibonacci Quarterly: https://www.fq.math.ca/
8. International Fibonacci Conference: http://195.130.32.39/fibonacci20/index.php
9. Pisano period of Fibonacci sequence: https://en.wikipedia.org/wiki/Pisano_period

Список літератури

1. Kurosh A. *Higher algebra*, Mir publishers, 1965
2. Markushevich A. *Recursion sequences*, Mir publishers, 1950
3. Kalman D., Mena R. (2003) *The Fibonacci Numbers—Exposed*, Mathematics Magazine, 76:3, 167-181
4. Koshy T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, 2001.
5. Lehmer D.H. *A Note on Trigonometric Algebraic Numbers*, Amer. Math. Monthly **40** (3), 1933, 165-166.
6. Niven I. *Irrational numbers*, Mathematical Association of America; distributed by J. Wiley, New York, 1956.
7. The Fibonacci Quarterly: https://www.fq.math.ca/
8. International Fibonacci Conference: http://195.130.32.39/fibonacci20/index.php
9. Pisano period of Fibonacci sequence: https://en.wikipedia.org/wiki/Pisano_period

Надійшло 07.10.2022

Karlova O.O., Katyrynchuk K.M., Protsenko V.I. *On periodicity of recurrent sequences of the second and the third order*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 111–136.

Among other sequences of integers Fibonacci numbers and Lucas numbers are cituated in the central place. In spite of great amount of literature dedicated to Fibonacci and Lucas sequences, there are still a lot of intriguing questions and open problems in this direction, see, for instance, the "The Fibonacci Quarterly" journal or materials of the Biannual International Conference organized by Fibonacci Association.

We are motivated by the following simple observatoin. Consider the classical Fibonacci sequence defined by the rule

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

with the initial values $F_0 = 0$, $F_1 = 1$:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

If we consider a little bit another sequence

$$G_{n+2} = G_{n+1} - G_n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

then for $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ the sequence $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ is of the form

$$0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, \dots.$$

In other words, this sequence is periodic with period of the length 6.

Therefore, the next questions follow naturally from the previous observation: (i) under which conditions on its coefficients the reccurent sequence is periodic? (ii) How long may be a period of the reccurent sequence and how it depends on coefficients? (iii) Does the length of a period depends on initial values of the reccurent sequence?

In the given paper we answer to these questions for the reccurent sequences of the second and the third order. We obtain necessary and sufficient conditions on coefficients u_i for the periodicity of a recurrent sequence defined by the rule $a_{n+k} = u_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + u_0 a_0$ for $n = 0, 1, \dots$ and $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, k-1$, in the case of $k = 2, 3$.

Літвінчук Ю.А., Малик І.В.

Розширений алгоритм стратегії еволюції адаптації коваріаційної матриці

В роботі розглянуто розширення алгоритму CMA-ES з використанням сумішей розподілів для знаходження оптимальних гіперпараметрів нейронних мереж. Розроблений алгоритм побудовано згідно припущення багатопіковості щільності розподілу параметрів складних систем. На основі методу Монте Карло було встановлено, що новий алгоритм покращує пошук оптимальних гіперпараметрів в середньому на 12%.

Ключові слова і фрази: суміш розподілів, оптимізація гіперпараметрів, CMA-ES алгоритм, EM алгоритм.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *j.litvinchuk@chnu.edu.ua, i.malyk@chnu.edu.ua*

Вступ

Оптимізація гіперпараметрів складних систем, сформульована як оптимізація чорної скриньки, є необхідною для автоматизації та високої продуктивності підходів машинного навчання. Гіперпараметри нейронних мереж часто оптимізуються пошуком через сітку, випадковим пошуком [1] або Байєсівською оптимізацією [2]. З точки зору Байєсівського підходу [3] побудови параметрів на основі генетичних алгоритмів [4], важливою є еволюційна стратегія [5] оцінки параметрів. Поняття еволюційної стратегії безпосередньо пов'язане зі зміною розподілу гіперпараметрів між епохами еволюційного алгоритму. Одним із найбільш вдалих методів еволюційних стратегій є метод адаптації коваріаційної матриці (Covariance matrix adaptation, CMA-ES) [6]. Метод CMA-ES має деякі корисні властивості інваріантності та зручний підхід оптимізації чорної скриньки з високим рівнем паралелізму, він показав більш високу продуктивність порівняно з підходами переліченими вище.

Даний метод, як і у випадку Байєсівського алгоритму, полягає у перерахунку коваріаційної матриці розподілів гіперпараметрів між епохами еволюційного алгоритму з подальшим вибором параметрів та врахуванням даної матриці. Очевидним недоліком такого методу є те, що припускається однопіковість щільності розподілу гіперпараметрів (як у нормальному розподілі). Проте на практиці, цільова функція (точності чи

УДК 004.021, 004.032.26, 004.852
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30E10, 62F10, 65E05, 68T05.

функції втрат) не є однопіковою, що приводить до збільшення області пошуку за рахунок зміни однієї коваріаційної матриці та включення в область пошуку генетичного алгоритму область зі значеннями, що значно відрізняються від локальних екстремумів.

Насамперед CMA-ES – це стохастичний метод без похідних для чисельної оптимізації нелінійних чи неопуклих задач неперервної оптимізації. Ітераційний алгоритм CMA-ES часто використовує багатовимірний розподіл Гаусса $N(m, \Sigma)$, де $m \in R^d$, $\Sigma \in R^{d \times d}$ — додатно визначена симетрична матриця, d - число змінних. CMA-ES на кожній із своїх ітерацій вибирає λ кандидатів-рішень із багатовимірного нормального розподілу, оцінює ці рішення (послідовно або паралельно), а потім коригує розподіл вибірки, що використовується для наступної ітерації, щоб надати більшу ймовірність хорошим зразкам [7]. Вектор середніх m та коварійна матриця Σ оновлюються відповідно до ранжування рішень в останньому поколінні і CMA-ES навчається вибирати рішення з перспективної області.

CMA-ES, як правило, має тенденцію працювати найкраще для складних алгоритмів оцінки функцій; наприклад, у [8] показано, що CMA-ES дав найкращі результати серед більш ніж 100 класичних та сучасних оптимізаторів у широкому діапазоні функцій чорної скриньки. CMA-ES використовувався для налаштування гіперпараметрів і раніше, наприклад, у роботах [9] або автоматичного розпізнавання мови [10].

У зв'язку з цим пропонується використати деяке розширення CMA-ES алгоритму, використовуючи багатопікові моделі. Для цього буде використано поняття суміші (суміші розподілів), зокрема, на суміші нормальних розподілів, оскільки вибір цих розподілів є найбільш ілюстративний і легко може бути реалізований на практиці.

1 Оцінка параметрів щільностей сумішей

Надалі будемо припускати, що щільність суміші належить до одного сімейства розподілів [11], визначається як зважена сума k щільностей компонентів. Щільності компонентів обмежені деяким параметричним класом щільностей, який вважається придатним для наявних даних та обчислювальних цілей. Позначимо $p(x; \theta_s)$ - щільність s-го компонента, де θ_s - параметри компонента; π_s ваговий коефіцієнт s-го компонента суміші. Ваги повинні бути невід'ємними $\pi_s \geq 0$ та в сумі давати одиницю: $\sum_{s=1}^{k} \pi_s = 1$. Ваги π_s також відомі як «пропорції змішування» і їх можна розглядати як ймовірність $p(s)$ того, що вибірка даних буде вилучатися з компонентів суміші s. Тоді щільність суміші компонентів k визначається як:

$$p(x) = \sum_{s=1}^{k} \pi_s p(x; \theta_s), \tag{1}$$

де $\theta = \{\theta_1, ..., \theta_k, \pi_1, ..., \pi_k\}$ - параметри суміші.

Щільність суміші можна інтерпритувати як моделювання процесу, в якому спочатку вибирається «джерело» s відповідно до поліноміального розподілу $\pi_1, ..., \pi_k$, а потім береться вибірка з відповідної щільності компонентів $p(x; \theta_s)$. Таким чином, можливість вибору джерела s і даних x дорівнює $\pi_s p(x; \theta_s)$. Тоді гранична можливість вибору даних

x визначається формулою (1). Важливою похідною величиною є «апостеріорна ймовірність» компонента суміші, заданого вектором даних, яка використовується для оцінки параметрів суміші. Апостеріорна ймовірність компонентів суміші визначається за допомогою правила Байєса і має вигляд

$$p(s \mid x) := \frac{\pi_s p(x;\theta_s)}{p(x)} = \frac{\pi_s p(x;\theta_s)}{\sum_{\acute{s}} \pi_{\acute{s}} p(x;\theta_{\acute{s}})}. \tag{2}$$

Першим кроком під час використання моделі суміші є визначення її архітектури: відповідний клас щільностей компонентів і кількість щільностей компонентів у суміші. Після того, як ці варіанти дизайну зроблені, оцінюються вільні параметри в моделі суміші таким чином, щоб щільність (2) якомога точніше наближала щільність реальних даних.

Оцінка параметрів моделі для заданих даних стає пошуком параметрів максимальної правдоподібності для даних у наборі ймовірнісних моделей, визначених вибраною архітектурою. Логарифм правдоподібності для набору даних $X_N = \{x_1, ..., x_N\}$ можна записати як:

$$\mathcal{L}(X_N, \theta) = \log p(X_N;\theta) = \log \prod_{n=1}^{N} p(x_N;\theta) = \sum_{n=1}^{N} p(x_N;\theta). \tag{3}$$

Знайти параметри максимальної правдоподібності для щільності одного компонента легко і часто це можна зробити в аналітичному вигляді. Це стосується, наприклад, компонентів нормальної суміші. Однак, якщо ймовірнісна модель є сумішшю, оцінка часто стає значно складнішою, оскільки логарифмічна правдоподібність як функція параметрів може мати багато локальних екстремумів. Отже, для отримання оцінок параметрів необхідна деяка нетривіальна оптимізація, і тут добре спрацьовує ітераційний EM-алгоритм (expectation-maximization algorithm). EM-алгоритм знаходить параметри в локальних екстремумах логарифмічної функції правдоподібності, заданих деякими початковими значеннями параметрів.

2 Вибір базового розподілу суміші

Суміш розподілів - це суміш двох або більше ймовірнісних розподілів, зазвичай з одного сімейства. Випадкові змінні беруться з однієї батьківської популяції до створення нового розподілу. Батьківські популяції можуть бути одновимірними або багатовимірними і повинні мати однакову розмірність. Розподіли можуть складатися з різних розподілів (наприклад, нормальний розподіл та розподіл Стьюдента) або з одного й того ж розподілу з різними параметрами. Нові розподіли ймовірностей розглядаються як справжні функції щільності ймовірності і тому можуть використовуватися для знаходження очікуваних значень, оцінок максимальної правдоподібності та інших статистичних даних.

Суміш нормальних розподілів найчастіше використовуються для моделювання неперервних даних [12]. Перша причина такої популярності полягає в тому, що оцінка параметра максимальної правдоподібності може бути виконана в закритій формі і вимагає лише обчислення середнього значення даних і коваріації. Друга причина полягає в тому, що з усіх щільностей із певною дисперсією щільсть Гаусса має найбільшу ентропію [13].

Можна виділити основні сімейства суміші розподілів.

- Пуасонові суміші [14], [15]

$$P_g(x|\varphi) = \int_0^\infty \frac{e^{(-\theta)}\theta^x}{x!} dG(\theta|\varphi).$$

- Суміші експоненційних розподілів [16], [17]

$$F(t) = \int_0^\infty (1 - e^{-xt}) dH(x).$$

- Суміші Вейбулла [18]

$$S(x) = \sum_{i=1}^n a_i e^{(-b_i x^{c_i})}, x > 0,$$

  де $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ та $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

- Суміш нормальних розподілів [19]

$$p(x) = \sum_{s=1}^k \pi_s p(x|\mu_s; \theta_s), \tag{4}$$

  де $p(x|\mu_s; \theta_s)$ щільність багатовимірного нормального розподілу з $\mathbb{R}^d$ та параметрами $(\mu_s; \theta_s)$.

3 ЕМ-алгоритм

Оцінку параметрів розподілу суміші легко провести за допомогою ЕМ-алгоритму. Технічно ідея алгоритму полягає в ітераційному визначенні нижньої межі логарифмічної ймовірності та максимізації цієї нижньої межі. Алгоритм на прикладі суміші нормальних розподілів (4), виконує Е-крок, оцінюючи до якого компонента належить кожна точка даних, і М-крок переоцінює параметри на основі цієї оцінки.

Е-крок. Обчислення допоміжних величин:

$$r_{ij} = \frac{\pi_i p(x_i|\mu_j; \theta_i)}{\sum_{s=1}^k \pi_s p(x_j|\mu_s; \theta_j)}, \tag{5}$$

де r_{ij} – ймовірність того, що об'єкт x_i був отриманий з j-ї компоненти суміші при поточному наближенні параметрів π_i, θ_i.

М-крок. Переоцінка нового наближення параметрів суміші:

$$\pi_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{ij}, \tag{6}$$

$$\mu_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{ij} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} r_{ij}}, \tag{7}$$

$$\theta_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(x_i - \mu_i)^T (x_i - \mu_i)}{\sum_{i=1}^{n} r_{ij}}. \tag{8}$$

Критерій зупинки. Ітерації методу здійснюються до збіжності варіаційної нижньої оцінки на логарифмічну функцію правдоподібності моделі.

$$\mathcal{L}(\pi, \mu, \theta, r|X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} r_{ij}(\ln \pi_j + \ln p(x_i|\mu_i; \theta_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} r_{ij} \ln r_{ij}). \tag{9}$$

Під збіжністю можна розуміти, наприклад, змінення не більше ніж на заздалегідь задану точність $\varepsilon > 0$.

Оновлення середнього значення використовує нову вагу змішування, а оновлення коваріаційної матриці використовує нове середнє значення μ та ваги π.

4 Розширений алгоритм CMA-ES

Нехай $P(\theta; X_{1:k}, y_{1:k})$ – розподіл гіперпараметрів нейронної мережі на основі значень цільової функції, отриманої на основі k епох, де X_k – значення гіперпараметрів на k-му кроці, y_k – значення цільової функції на k-му кроці. Тоді алгоритм еволюційної стратегії на основі розширеного CMA можна описати наступними кроками:

1. Визначення області зміни гіперпараметрів (a_0), розмірності суміші (n), кількості генів в генетичному алгоритмі (N), точності методу (ε).

2. Задання випадковим чином ($\pi^{(0)}$, $\mu^{(0)}$, $\theta^{(0)}$).

3. Вибір N генів X_k згідно розподілу (4) та обчислень значень цільової функції y_k.

4. Перерахунок параметрів ($\pi^{(k+1)}$, $\mu^{(k+1)}$, $\theta^{(k+1)}$) на основі формул (6)-(8).

5. Якщо задовольняється умова виходу

$$|\mathcal{L}_{k+1} - \mathcal{L}_k| < \varepsilon$$

то перейти до виконання генетичного алгоритму на основі розподілу гіперпараметрів з розподілом

$$p(\theta) = P(\theta; X_{1:k}, y_{1:k}).$$

Якщо,

$$|\mathcal{L}_{k+1} - \mathcal{L}_k| < \varepsilon$$

то перейти до кроку 3.

Слід зауважити, що на кроці 3 виконується одна епоха генетичного алгоритму, тому поряд із оптимізацією параметрів π, μ, θ шукається і оптимальне значення гіперпараметрів.

5 Моделювання

Як було зазначено вище, розглянутий розширений CMA-ES алгоритм дозволяє уникати розгляду хромосом із невисокими значеннями цільової функції $\mathcal{L}$. Моделювання багатопікових цільових функцій оптимізації показало, що кількість епох для пошуку глобального мінімуму можна зменшити до 60% при вірній оцінці параметрів суміші. Слід зуважити, що серідній відсоток покращення для розширеного CMA-ES алгоритму складає близько 12%. При моделюванні даних та оцінки глобальних максимумів було використано метод Монте-Карло.

6 Висновки

У роботі розглянуто розширення CMA-ES алгоритму за припущення багатопіковості розподілу хромосом в генетичному алгоритмі. Використовуючи теорію сумішей та оцінку параметрів сумішей на основі EM-алгоритму, розроблено алгоритм для оцінки гіперпараметрів складних систем на основі розширеного CMA-ES алгоритму. Використовуюючи моделювання методом Монте-Карло встановлено, що розширений CMA-ES алгоритм покращує пошук оптимального розв'язку складної ситеми в середньому на 12%.

В подальших роботах цього напрямку плануться розглянути ефективність розробленого алгоритму на реальних даних.

Список літератури

[**1**] Bergstra J., Bengio Y. Random search for hyper-parameter optimization. JMLR, 13:281–305, 2012.

[**2**] Snoek J., Rippel O., Swersky K., Kiros R., Satish N., Sundaram N., Patwary M., Ali M., Adams R., et al. Scalable bayesian optimization using deep neural networks. arXiv preprint arXiv:1502.05700, 2015

[**3**] Eggensperger K., Feurer M., Hutter F., Bergstra J., Snoek J., Hoos H., and Leyton-Brown K. Towards an empirical foundation for assessing Bayesian optimization of hyperparameters. In NIPS workshop on Bayesian Optimization in Theory and Practice. - 2013.- 5p.

[**4**] Venkatesan D., Kannan K., Saravanan R. A genetic algorithm-based artificial neural network model for the optimization of machining processes. Neural Computing and Applications. -· February 2009.- 7p.

[**5**] Beyer H.-G. The Theory of Evolution Strategies. - Springer; 2001st edition (March 27, 2001).- 401p.

[**6**] Loshchilov I. , Hutter F. CMA-ES for Hyperparameter Optimization of Deep Neural Networks. arXiv:1604.07269v1 [cs.NE] 25 Apr 2016. – 9p.

[**7**] Hansen N. and Ostermeier A., Ostermeier A. Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies.Evolutionary computation, 9(2):159–195, 2001.

[**8**] Loshchilov I., Schoenauer M., and Sebag M. Bi-population CMA-ES agorithms with surrogate‘models and line searches. In Proc. of GECCO'13, pp. 1177–1184. ACM, 2013.

[**9**] Loshchilov I., Schoenauer M., and Sebag M. Self-adaptive Surrogate-Assisted Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy. In Proceedings of the 14th annual conference on Genetic and evolutionary computation, pp. 321–328. ACM, 2012.

[**10**] Watanabe Sh. and Le Roux J. Black box optimization for automatic speech recognition. In Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014 IEEE International Conference on, pp. 3256– 3260. IEEE, 2014.

[**11**] McLachlan G. and Peel J. Finite Mixture Models. Wiley, New-York, NY, USA. 42p., 2000.

[**12**] Lee G. and Scott C. Em algorithms for multivariate gaussian mixture models with truncated and censored data. Computational Statistics & Data Analysis, 56(9):2816–2829, 2012. – 13p.

[**13**] Peter W., Buchen and Michael K. The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices. The Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol. 31, No. 1 (Mar., 1996), pp. 143-159

[**14**] Dempster, A. P., Laird, N., and Rubin D. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 39(1):1–38. Pages: 12, 44, 89. 1977.

[**15**] Karlis D. EM Algorithm for Mixed Poisson and Other Discrete Distributions. https://doi.org/10.1017/S0515036100014033 Published online by Cambridge University Press.May 2005 , pp. 3 - 24

[**16**] KARLIS, D. Estimation and hypothesis testing problems in Poisson mixtures. Phd Thesis, Department of Statistics, Athens University of Economics. 1998.

[**17**] Anaya-Izquierdo K., Marriott P. Local mixture models of exponential families (Submitted).2006.

[**18**] Carta J., Ramirez P. Analysis of two-component mixture Weibull statistics for estimation of wind speed distributions. Renew Energy 32:518:531. 2007.

[**19**] Elmahdy E., Aboutahoun A. A new approach for parameter estimation of of finite Weibull mixture distributions for reliability modeling. Appl Math Model 37:1800:1810. 2013.

Надійшло 14.12.2022

Litvinchuk Yu.A., Malyk I.V. *The extended CMA-ES algorithm*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 137–143.

The paper considers the extension of the CMA-ES algorithm using mixtures of distributions for finding optimal hyperparameters of neural networks. Hyperparameter optimization, formulated as the optimization of the black box objective function, which is a necessary condition for automation and high performance of machine learning approaches. CMA-ES is an efficient optimization algorithm without derivatives, one of the alternatives in the combination of hyperparameter optimization methods. The developed algorithm is based on the assumption of a multi-peak density distribution of the parameters of complex systems. Compared to other optimization methods, CMA-ES is computationally inexpensive and supports parallel computations. Research results show that CMA-ES can be competitive, especially in the concurrent assessment mode. However, a much broader and more detailed comparison is still needed, which will include more test tasks and various modifications, such as adding constraints. Based on the Monte Carlo method, it was shown that the new algorithm will improve the search for optimal hyperparameters by an average of 12%.

Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 2, 144–155 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №2, 144–155

Літовченко В.А. Горбатенко М.Ю.

Неоднорідні диференціальні рівняння векторного порядку з дисипативною параболічністю й додатним родом

Параболічність у сенсі як Петроського, так і Шилова має скалярний характер, вона не спроможна враховувати специфіку неоднорідності середовища. У зв'язку з цим на початку 70-х років С.Д. Ейдельман запропонував так звану $2\vec{b}$-параболічність, яка є природним узагальненням параболічності за Петровським на випадок анізотропного середовища. Детальне дослідження задачі Коші для рівнянь з такою параболічністю проведено в працях С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, М.І. Матійчука та їх послідовників.

Розширенням параболічності за Шиловим на випадок анізотропних середовищ є $\{\vec{p},\vec{h}\}$-параболічність. Клас рівнянь з такою параболічністю досить широкий, він охоплює класи Ейдельмана, Петровського, Шилова та дозволяє уніфікувати класичну теорію задачі Коші для параболічних рівнянь.

У даній роботі для неоднорідних $\{\vec{p},\vec{h}\}$-параболічних рівнянь з векторним додатним родом досліджуються умови, за яких задача Коші в класі узагальнених початкових функцій типу розподілів Гельфанда і Шилова буде коректно розв'язною. При цьому, неоднорідності рівнянь є неперервними за сукупністю змінних функціями скінченної гладкості, які стосовно просторової змінної спадають, а за часовою змінною є необмеженими з інтегровною особливістю.

Ключові слова і фрази: неоднорідна задача Коші, об'ємний потенціал, параболічні рівняння векторного порядку, фундаментальний розв'язок.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *v.litovchenko@chnu.edu.ua* *m.gorbatenko@chnu.edu.ua*

Вступ

На відміну від $2\vec{b}$-параболічних за Ейдельманом рівнянь із частинними похідними [1], у $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічних рівняннях [2] векторний порядок $\vec{p}$ вже може не збігатися з векторним показником параболічності $\vec{h}$, що спричиняє ефект "дисипації параболічності", мірою якої слугує спеціальна характеристика рівняння – його векторний рід $\vec{\mu}$: $\vec{1}-(\vec{p}-\vec{h}) \leq \vec{\mu} \leq \vec{1}$. Тут і надалі, запис $\vec{\alpha}\mho\vec{\beta}$, де $\mho$ — деяке відношення, означатиме, що це відношення виконується для всіх відповідних координат векторів $\vec{\alpha}$ і $\vec{\beta}$. Параболічні рівняння, в яких $\vec{p} = \vec{h}$, це, зокрема, всі $2\vec{b}$-параболічні рівняння, мають рід $\vec{\mu} = \vec{1}$.

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 47D06, 47D62.

А для рівнянь з $\vec{p} \neq \vec{h}$, взагалі кажучи, рід $\vec{\mu} < \vec{1}$. І чим більше показник параболічності $\vec{h}$ відхиляється від порядку рівняння $\vec{p}$, тим більше його рід $\vec{\mu}$, зменшуючись, віддаляється від $\vec{1}$. Рівняння з такою дисипацією параболічно нестійкі до зміни своїх коефіцієнтів, навіть тих, які знаходяться при молодших похідних [3], що призводить до певних труднощів при побудові для них класичної теорії задачі Коші.

Теорія задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних рівнянь розвивалась у працях [4–10].

Дослідження задачі Коші для однорідних $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічних рівнянь проводилось у працях [2, 11, 12]. Тут для таких рівнянь розроблено методику дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК), установлено коректну розв'язність цієї задачі в просторах типу S' розподілів І.М. Гельфанда і Г.Є. Шилова, описано максимальні класи їх розв'язків у рамках просторів типу S. Однак неоднорідні $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічні рівняння та суміжні з ними питання ніким не досліджувались.

Дана робота присвячена дослідженню задачі Коші для неоднорідних $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічних рівнянь з узагальненими початковими даними типу розподілів Гельфанда і Шилова за умови, що неоднорідності рівнянь є неперервними за сукупністю змінних, спадними за просторовою змінною та необмеженими за часом з інтегровною особливістю функціями, які за просторовою змінною мають обмежений ступінь гладкості.

Структура роботи така. У першому пункті сформульована постановка задачі та наведено необхідні відомості. Другий пункт присвячений дослідженню об'ємного потенціала відповідної задачі Коші. Достатні умови коректної розв'язності неоднорідної задачі Коші з'ясовуються в третьому пункті. Останній четвертий пункт – висновки.

1 Допоміжні відомості. Постановка задачі

Нехай $\mathbb{R}^n$ — дійсний простір розмірності $n \geq 1$, $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$; $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$; i — уявна одиниця; $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^n$; $\|x\| := (x, x)^{1/2}$ для $x \in \mathbb{R}^n$; $|x + iy| := (x^2 + y^2)^{1/2}$, якщо $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$; $z^l := z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n}$, $|z|_+^l := |z_1|^{l_1} + \ldots + |z_n|^{l_n}$, якщо $z := (z_1; \ldots; z_n) \in \mathbb{R}^n$, $l := (l_1; \ldots; l_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; S – простір Л.Шварца нескінченно диференційовних швидкоспадних функцій, визначених на $\mathbb{R}^n$, а S' – відповідний топологічно спряжений з S простір [13].

Клас усіх неперервно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ до порядку $r \in \mathbb{Z}_+^n$ включно функцій, позначимо записом $\mathbb{C}^r(\mathbb{R}^n)$. І нехай $\mathbb{C}_l^r(\mathbb{R}^n)$, $l \in \mathbb{Z}_+^n$, – сукупність усіх елементів $\mathbb{C}^r(\mathbb{R}^n)$ таких, що

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+^n, k \leq r, \exists c_k > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : |\partial_x^k \varphi(x)| \leq c_k (1 + \|x\|)^{-|l+k|_+}.$$

Для $\vec{\alpha} > \vec{0}$ і $\vec{\beta} > \vec{0}$ покладемо:

$$S_{\vec{\alpha}} = \{\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n) | \ \exists A > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \exists c_k > 0 \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^q \partial_x^k \varphi(x)| \leq c_k A^{|q|_+} q^{\vec{\alpha} q}\};$$

$$S^{\vec{\beta}} = \{\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n) | \ \exists B > 0 \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \exists c_q > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^q \partial_x^k \varphi(x)| \leq c_q B^{|k|_+} k^{\vec{\beta} k}\}.$$

З відповідними топологіями сукупності $S_{\vec{\alpha}}$ і $S^{\vec{\beta}}$ – зліченно-нормовані повні досконалі простори, які разом із $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} := S_{\vec{\alpha}} \cap S^{\vec{\beta}}$ називають просторами типу S Гельфанда і Шилова [11, 13].

Простір $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ нетривіальний при $\vec{\alpha}+\vec{\beta}\geq\vec{1}$ і складається лише з тих функцій $\varphi\in\mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, що задовольняють нерівність

$$|\partial_x^k\varphi(x)|\leq cB^{|k|_+}k^{\vec{\beta}k}e^{-\delta|x|_+^{\vec{1}/\vec{\alpha}}},\quad k\in\mathbb{Z}_+^n, x\in\mathbb{R}^n,$$

з додатними сталими c, B і δ, залежними тільки від функції φ [11,13]. У просторах типу S визначені та неперервні операції додавання, множення та згортки, а також, оператор F перетворення Фур'є, причому виконуються наступні топологічні рівності: $F[S_{\vec{\alpha}}]=S^{\vec{\alpha}}$, $F[S^{\vec{\beta}}]=S_{\vec{\beta}}$, $F[S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}]=S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$.

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\partial_t u(t;x)=A(t;i\partial_x)u(t;x)+f(t;x),\quad (t;x)\in\Pi_{(0;T]}:=(0;T]\times\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в якому

$$A(t;i\partial_x)=\sum_{|k/\vec{p}|_+\leq 1}a_k(t)i^{|k|_+}\partial_x^k$$

– диференціальний вираз порядку $\vec{p}=(p_1;\ldots;p_n)>\vec{1}$ з комплексно значними неперервними коефіцієнтами $a_k(\cdot)$, який на множині $\Pi_{[0;T]}$ є рівномірно параболічним з векторним показником параболічності $\vec{h}$, $\vec{0}<\vec{h}\leq\vec{p}$, тобто таким, що

$$\exists\delta_1>0\,\exists\delta_2\geq 0\,\forall(t;\xi)\subset\Pi_{[0;T]}:\ \mathrm{Re}A(t;\xi)\leq-\delta_1|\xi|_+^{\vec{h}}+\delta_2.$$

Також вважатимемо, що векторний рід $\vec{\mu}$ рівняння (1) є додатним [11, 14]: $\vec{0}<\vec{\mu}\leq\vec{1}$.

Позначемо через Φ' топологічно спряжений простір з простором $\Phi\in\{S^{\vec{\alpha}_0};S_{\vec{\beta}_0}^{\vec{\alpha}_0}\}$, де $\vec{\alpha}_0=\vec{1}/\vec{h}$, а $\vec{\beta}_0\geq\vec{\beta}_*=\vec{1}-\vec{\mu}/\vec{p}$, і задамо для рівняння (1) початкову умову

$$u(t;\cdot)\underset{t\to+0}{\longrightarrow}g,\quad g\in\Phi'. \tag{2}$$

Означення. *Розв'язком задачі Коші* (1), (2) *на множині* $\Pi_{[0;T]}$ *називається функція* u, *яка на* $\Pi_{(0;T]}$ *задовольняє рівняння* (1) *у звичайному розумінні, а початкову умову* (2) *– у сенсі збіжності в просторі* Φ'.

ФРЗК для рівняння (1) є функція

$$G(t,\tau;\cdot)=F^{-1}[\theta_\tau^t(\xi)](t,\tau;\cdot),\quad 0\leq\tau<t\leq T,$$

де $\theta_\tau^t(\xi)=\exp\{\int\limits_\tau^t A(\varsigma;\xi)d\varsigma\}$.

З результатів, одержаних у [11] випливає, що при кожних фіксованих $t\in(\tau;T]$ і $\tau\in[0;T)$ функція $G(t,\tau;\cdot)$ належить до простору $S_{\vec{\beta}_*}^{\vec{\alpha}_0}$ у випадку, коли $\vec{0}<\vec{\mu}\leq\vec{1}$, при цьому правильні такі оцінки:

$$|\partial_x^k G(t,\tau;x)|\leq c\prod_{j=1}^n(t-\tau)^{-\frac{1+k_j}{h_j}}B^{k_j}k_j^{\frac{k_j}{h_j}}\begin{cases}e^{-\delta\left(\frac{|x_j|}{(t-\tau)^{\mu_j/p_j}}\right)^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}}, & \vec{0}<\vec{\mu}\leq\vec{1},\\ e^{-\delta\left(\frac{|x_j|}{(t-\tau)^{\mu_j/h_j}}\right)^{\frac{h_j}{h_j-\mu_j}}}, & \vec{\mu}\leq 0,\end{cases} \tag{3}$$

з додатними сталими c, B і δ.

Коректну розв'язність задачі Коші (1), (2) при $f=0$ характеризує наступне твердження [11].

Теорема 1. *Задача Коші (1), (2) при $f = 0$ на множині $\Pi_{[0;T]}$ має єдиний розв'язок $u(t;x)$. Цей розв'язок є диференційовною за змінною t та нескінченно диференційовною за змінною x функцією, який неперервно залежить від початкових даних, при цьому справджується рівність*

$$u(t;x) =< g(\xi), G(t,0;x-\xi) >, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

в якій кутові дужки $<,>$ позначають дію узагальненої функції на основну.

Надалі розв'язок задачі Коші (1), (2) при $f = 0$ будемо позначати u_0.

Зважаючи на лінійність рівняння (1), розв'язок задачі (1), (2) доцільно шукати у вигляді суми $u = u_0 + u_1$, де u_1 – розв'язок рівняння (1), який задовольняє початкову умову (2) при $g = 0$, тобто:

$$u_1(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} 0. \tag{4}$$

Наше завдання полягає у з'ясуванні умов на функцію f, за яких об'ємний потенціал

$$u_1(t;x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;x-\xi) f(\tau;\xi) d\xi$$

буде розв'язком задачі Коші (1), (4).

2 Об'ємний потенціал задачі Коші

Говоритимемо, що для функції f виконується умова (A), якщо ця функція неперервна на $\Pi_{(0;T]}$ за сукупністю змінних і $f(t;\cdot) \in \mathbb{C}_l^r(\mathbb{R}^n)$, $t \in (0;T]$, при цьому, для її похідних виконується оцінка

$$|\partial_x^k f(t;x)| \le \frac{c_k}{t^\alpha (1+\|x\|)^{|l+k|_+}}, \quad k \le r, \ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{5}$$

з деяким $\alpha \in [0;1)$ та додатною величиною c_k, незалежною від змінних t та x.

Теорема 2. *Нехай для функції f виконується умова (A) при $l = 0$, а порядок $\vec{p}$, показник параболічності $\vec{h}$ і рід $\vec{\mu}$ диференціального рівняння (1) такі, що*

$$\Big|\frac{\vec{1}}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\Big|_+ < 1, \tag{6}$$

тоді при кожному фіксованому $t \in (0;T]$ на множині $\mathbb{R}^n$ відповідний потенціал $u_1(t;\cdot)$ є диференційовною функцією до порядку r включно, для похідних якого правильна формула

$$\partial_x^k u_1(t;x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi) \partial_x^k f(\tau;x-\xi) d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}. \tag{7}$$

Для потенціалу $u_1(t;\cdot)$ існуватиме похідна вищого порядку $k > r$ у випадку, коли

$$\Big|\frac{\vec{1}+k-r}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\Big|_+ < 1, \tag{8}$$

при цьому, справджується рівність

$$\partial_x^k u_1(t;x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k-r} G(t,\tau;x-\xi)\partial_\xi^r f(\tau;\xi)d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}. \tag{9}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $k < r$. Формальним диференціювання під знаком інтеграла у зображенні

$$u_1(t;x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi)f(\tau;x-\xi)d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

одержуємо формулу (7).

Для обгрунтування правильності цієї формули, досить довести рівномірну збіжність стосовно змінної x на множині $\mathbb{R}^n$ інтеграла

$$\mathfrak{I}_k(t;x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(t,\tau;\xi)||\partial_x^k f(\tau;x-\xi)|d\xi.$$

Проте ця збіжність стає очевидною, якщо зважити на оцінку (3), умови (A) та (6), згідно з якими для всіх $(t;x) \in \Pi_{(0;T]}$ виконується нерівність

$$\mathfrak{I}_k(t;x) \leq \hat{c}_k \int\limits_0^t \left(\tau^{-\alpha}(t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}\right|_+} \prod_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\delta\left(\frac{|\xi_j|}{(t-\tau)^{\mu_j/p_j}}\right)^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}} d\xi_j \right) d\tau =$$

$$= \hat{c}_k \int\limits_0^t \tau^{-\alpha}(t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+} d\tau \prod_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\delta|\zeta_j|^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}} d\zeta_j \equiv \hat{c}_k EB\Big(1-\alpha, 1-\big|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\big|_+\Big) t^{1-\alpha-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+},$$

де $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функція,

$$E := \prod_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\delta|\zeta_j|^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}} d\zeta_j,$$

а додатна величина $\hat{c}_k$ залежить лише від k.

Нехай тепер $k > r$. У цьому випадку скористаємось рівністю

$$\partial_x^k G(t,\tau;x-\xi) = (-1)^{|r|_+} \partial_\xi^r \partial_x^{k-r} G(t,\tau;x-\xi),$$

згідно з якою, інтегруванням частинами приходимо до формального запису формули (9). Далі, як у попередньому випадку, обгрунтовуємо правомірність здійснених перетворень.

Теорема доведена. □

Наслідок 1. *Нехай функція f задовольняє умову (A) при $l = 0$ і $r \geq \vec{p}$, а також виконується співвідношення* (6), *тоді*

$$A(t;i\partial_x)u_1(t;x) = \sum_{|k/\vec{p}|_+ \leq 1} a_k(t) i^{|k|_+} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi)\partial_x^k f(\tau;x-\xi)d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Якщо ж $\vec{p} > r$, то за умови виконання співвідношення

$$\Big|\frac{\vec{1}+\vec{p}-r}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\Big|_+ < 1, \tag{10}$$

правильною буде рівність

$$A(t;i\partial_x)u_1(t;x) = \sum_{|k/\vec{p}|_+\le 1 \,\mathrm{and}\, k\le r} a_k(t)i^{|k|_+}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi)\partial_x^k f(\tau;x-\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{|k/\vec{p}|_+\le 1 \,\mathrm{and}\, r<k} a_k(t)i^{|k|_+}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k-r}G(t,\tau;x-\xi)\partial_\xi^r f(\tau;\xi)d\xi, \quad (t;x)\in\Pi_{(0;T]}.$$

Надалі нам знадобиться таке допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай $\varphi(\cdot)\in\mathbb{C}_l^r(\mathbb{R}^n)$, тоді при $|l|_+ > n$ і $|r|_+ > n$ виконується кожне з наступних граничних співвідношень:*

$$\big(G*\varphi\big)(t,\tau;x) \underset{t\to\tau+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} \varphi(x); \quad \big(G*\varphi\big)(t,\tau;x) \underset{\tau\to t-0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} \varphi(x) \tag{11}$$

(тут йдеться про рівномірну збіжність на кожній компактній множині $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n$).

Оцінки (3) ФРЗК G дозволяють доведення Леми 1 провести за схемою доведення аналогічної Леми 2 з [15].

Диференційовність функції u_1 за змінною t характеризує наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай для функції f виконується умова (A) при $|l|_+ > n$ та $|r|_+ > n$, тоді відповідний потенціал u_1 на множині $\Pi_{(0;T]}$ є диференційовною функцією за змінною t за умови, що:*
1) $r\ge\vec{p}$ і виконується співвідношення (6), при цьому правильною буде рівність

$$\partial_t u_1(t;x) = f(t;x) + \sum_{|k/\vec{p}|_+\le 1} a_k(t)i^{|k|_+}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi)\partial_x^k f(\tau;x-\xi)d\xi; \tag{12}$$

2) $\vec{p} > r$ і виконується співвідношення (10), при цьому правильною буде рівність

$$\partial_t u_1(t;x) = f(t;x) + \sum_{|k/\vec{p}|_+\le 1 \,\mathrm{and}\, k\le r} a_k(t)i^{|k|_+}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi)\partial_x^k f(\tau;x-\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{|k/\vec{p}|_+\le 1 \,\mathrm{and}\, r<k} a_k(t)i^{|k|_+}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k-r}G(t,\tau;x-\xi)\partial_\xi^r f(\tau;\xi)d\xi. \tag{13}$$

Доведення. Зафіксуємо довільно $t \in (0;T]$ і розглянемо допоміжну функцію

$$u_1^\varepsilon(t;x) = \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;x-\xi)f(\tau;\xi)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < \varepsilon < t/2.$$

Очевидно, що

$$\partial_t u_1^\varepsilon(t;x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,t-\varepsilon;x-\xi)f(t-\varepsilon;\xi)d\xi + \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,\tau;x-\xi)f(\tau;\xi)d\xi.$$

Знайдемо тепер границю $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \partial_t u_1^\varepsilon(t;x)$. Урахувавши властивості функції f, безпосередньо з твердження Леми 1 одержуємо, що

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,t-\varepsilon;x-\xi)f(t-\varepsilon;\xi)d\xi \underset{\varepsilon\to+0}{\to} f(t;x).$$

Оскільки G розв'язок рівняння (1) при $f=0$, то

$$\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,\tau;x-\xi)f(\tau;\xi)d\xi = \sum_{|k/\vec{p}|_+ \le 1} a_k(t) i^{|k|_+} \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x-\xi}^k G(t,\tau;x-\xi)f(\tau;\xi)d\xi.$$

Нехай $r > \vec{p}$ і виконується співвідношення (6). Здійснивши в останньому інтегралі правої частини попередньої рівності заміну змінної інтегрування за правилом $y = x-\xi$ та зінтегрувавши частинами k разів, прийдемо до такої рівності:

$$\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x-\xi}^k G(t,\tau;x-\xi)f(\tau;\xi)d\xi = \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;y)\partial_{x-y}^k f(\tau;x-y)dy.$$

Далі, скориставшись оцінкою (3) для функції G та врахувавши виконання умови (A) для f, знайдемо:

$$\Big| \int_{t-\varepsilon}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;y)\partial_{x-y}^k f(\tau;x-y)dy \Big| \le$$

$$\le \hat{c}_k \int_{t-\varepsilon}^{t} \left(\tau^{-\alpha}(t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}\right|_+} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\delta\left(\frac{|\xi_j|}{(t-\tau)^{\mu_j/p_j}}\right)^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}} d\xi_j \right) d\tau =$$

$$= \hat{c}_k E \int_{t-\varepsilon}^{t} \tau^{-\alpha}(t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+} d\tau \le \hat{c}_k E\Big(\frac{2}{t}\Big)^{\alpha} \int_{t-\varepsilon}^{t} (t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+} d\tau = b_{k,t}\varepsilon^{1-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+}$$

(тут величина $b_{k,t}$ не залежить від ε).

Одержана оцінка в цьому випадку забезпечує правильність граничного співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{t-\varepsilon}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^k_{x-\xi}G(t,\tau;x-\xi)f(\tau;\xi)d\xi=\int\limits_0^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,\tau;y)\partial^k_{x-y}f(\tau;x-y)dy,$$

а відтак, виконання рівності (15).

Випадок $\vec{p}>r$ разом з виконанням співвідношення (10) реалізується аналогічно.

Теорема доведена. □

Далі, з'ясуємо питання про існування граничного значення потенціалу u_1 на початковій гіперплощині $t=0$.

Якщо припустити виконання умови

$$\alpha+\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+<1, \tag{14}$$

а також те, що функція f задовольняє умову (A) при $l=0$, то згідно з оцінкою (3), для всіх $(t;x)\in\Pi_{(0;T]}$ маємо:

$$|u_1(t;x)|\leq\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big|G(t,\tau;x-\xi)\big||f(\tau;\xi)|d\xi\leq$$

$$\leq c\int\limits_0^t\left(\tau^{-\alpha}(t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}\right|_+}\prod_{j=1}^n\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\delta\left(\frac{|\xi_j|}{(t-\tau)^{\mu_j/p_j}}\right)^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}}d\xi_j\right)d\tau=$$

$$=cE\int\limits_0^t\tau^{-\alpha}(t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+}d\tau=bt^{1-\alpha-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+}.$$

Звідси одержуємо виконання граничного співвідношення (4), при цьому прямування u_1 до нуля відбувається рівномірно стосовно змінної x на $\mathbb{R}^n$.

Отже, правильне наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай для функції f виконуються умова (A) при $l=0$ і нерівність (14), тоді для відповідного потенціалу $u_1(t;\cdot)$ – правильне співвідношення*

$$u_1(t;x)\underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}}0.$$

У наступному пункті досліджується задача Коші для неоднорідного рівняння (1).

3 Задача Коші

Одержані раніше відомості про об'ємний потенціал u_1 дозволяють нам зробити певні висновки про коректну розв'язність неоднорідної задачі Коші для $\{\vec{p},\vec{h}\}$-параболічних рівнянь.

Теорема 5. *Нехай $g \in \Phi'$, а функція f задовольняє умову (A) при $|l|_+ > n$ та $|r|_+ > n$, тоді відповідна задача Коші (1), (2) на множині $\Pi_{(0;T]}$ буде коректно розв'язною та її розв'язок зображуватиметься формулою*

$$u(t;x) =< g(\xi), G(t,0;x-\xi) > + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;x-\xi)f(\tau;\xi)d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \qquad (15)$$

за умови, що виконується нерівність (14) при $r \geq \vec{p}$ або, нерівність

$$\alpha + \Big|\frac{\vec{1}+\vec{p}-r}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\Big|_+ < 1$$

при $\vec{p} > r$. При цьому, розв'язок u буде один раз диференційовний за змінною t, а за змінною x - до порядку $\max\{r,\vec{p}\}$ включно.

Доведення. Запишемо рівність (15) у компактній формі: $u = u_0 + u_1$. З тверджень Теорем 1–3, випливає зазначена у Теоремі 5 гладкість функції u.

Безпосередньо з Наслідку 1 і тверджень Теорем 3, 4, одержуємо, що u_1 – розв'язок задачі Коші (1), (3).

Отже, u – класичний розв'язок задачі Коші (1), (2) на множині $\Pi_{(0;T]}$.

Обгрунтуємо єдиність розв'язку цієї задачі. Припустимо, що існують два розв'язки $\hat{u}$ і $\breve{u}$ задачі Коші (1), (2). Їх різниця $u = \hat{u} - \breve{u}$ буде розв'язком однорідної задачі:

$$\partial_t u(t;x) = A(t;i\partial_x)u(t;x); \quad u(t;\cdot)_{|t=0} = 0.$$

Однак, згідно з Теоремою 1, ця задача має лише нульовий розв'язок: $u = 0$. Тоді $\hat{u} = \breve{u}$ і задача Коші (1), (2) на множині $\Pi_{(0;T]}$ має єдиний розв'язок (15). Цей розв'язок неперервно залежить від початкових даних, оскільки таким є розв'язок u_0 задачі Коші (1), (2) при $f = 0$.

Теорема доведена. □

Як уже зазначалося, початкова умова (2) розуміється в сенсі слабкої збіжності в просторі Φ' тому, що початкова функція g – функціонал з Φ'. Проте, якщо цей функціонал має "хороші" властивості, то може спостерігатися ефект посилення збіжності в умові (2). Зокрема, якщо g є регулярною узагальненою функцією, породженою звичайною функцією $g(\cdot)$ із класу $\mathbb{C}_l^r(\mathbb{R}^n)$, то

$$u_0(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,0;x-\xi)g(\xi)d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

і за умови, що $|l|_+ > n$ і $|r|_+ > n$, початкову умову (2) можна розглядати вже як рівномірну збіжність стосовно просторової змінної x на кожній компактній множині $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$:

$$u(t;x) \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} g(x).$$

Цей факт стає очевидним, якщо зважити на твердження Леми 1, Теореми 4 і на те, що $u = u_0 + u_1$.

Зауваження. *Одержані тут результати гармонічно доповнюють і розширюють результати досліджень, проведених у [10, 15].*

4 Висновки

Знайдено достатні умови на неоднорідності $\{\vec{p},\vec{h}\}$-параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, за яких задача Коші для таких рівнянь у класі узагальнених початкових даних типу розподілів Гельфанда і Шилова має єдиний класичний розв'язок, який неперервно залежить від початкових даних.

Список літератури

[**1**] Эйдельман С.Д. *Об одном классе параболических систем* Докл. АН СССР. 1960, **133** (1), 40–43.

[**2**] Литовченко В.А. *Задача Коши для $\{\vec{p},\vec{h}\}$-параболических уравнений с коэфициентами, зависящими от времени* Матем. заметки. 2005, **77** (3), 395–411. doi: 10.1007/s11006-005-0036-9

[**3**] У Хоу–синь *Об определении параболичности систем уравнений в частных производных* Успехи матем. наук. 1960, **15** (6), 157–161.

[**4**] Матийчук М.И., Эйдельман С.Д. *О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Динин* Труды семинара по функц. анализу. Воронеж. 1967, **9**, 54–83.

[**5**] Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. *$2\vec{b}$-параболические системы* Труды семинара по функц. анализу. Киев: Ин-т матем. АН УССР. 1968, **1**, 3–175.

[**6**] Ивасишен С.Д. *Об интегральных представления и свойстве Фату для решений параболических систем* Успехи матем. наук. 1986, **41** (4), 173–174.

[**7**] Ивасишен С.Д. *Интегральное представление и начальные значения решений $2\vec{b}$-параболических систем* Укр. матем. журн. 1990, **42** (4), 500–506.

[**8**] Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. *Про задачу Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами* Укр. матем. журн. 2000, **52** (11), 1484–1496.

[**9**] Городецкий В.В. *О локализации решений задачи Коши для $2\vec{b}$-параболических систем в классах обобщенных функций* Дифф. уравн. 1988, **24** (2), 348–350.

[**10**] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. Basel-Boston-Berlin: Birkhaser, 2004.

[**11**] Літовченко В.А. Коректна розв'язність задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних систем у просторах нескінченно диференційовних функцій. Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02. Київ, 2009.

[12] Літовченко В.А. *Фундаментальний розв'язок задачі Коші для $\{\vec{p},\vec{h}\}$-параболічних систем зі змінними коефіцієнтами* Нелін. колив. 2018, **21** (2), 189–196. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04537-x

[13] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.

[14] Гельфанд И.М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

[15] Dovzhytska I.M. *The Cauchy problem for inhomogeneous parabolic Shilov equations* Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 475–484. https://doi.org/10.15330/cmp.13.2.475-484

Список літератури

[1] Eidelman S.D. *About one class of parabolic systems* Dokl. AN SSSR. 1960, **133** (1), 40–43. (in Russian)

[2] V. Litovchenko *Cauchy problem for $\{\vec{p};\vec{h}\}$-parabolic equations with time-dependent coefficients* Math. Notes. 2005, **77** (3-4), 364–379. doi: 10.1007/s11006-005-0036-9

[3] U. Hou-Sin *On the definition of parabolicity of systems of equations with partial derivatives* Uspekhi Mat. Nauk. 1960, **15** (6), 157–161. (in Russian)

[4] Matyichuk M.I., Eidelman S.D. *On fundamental solutions and the Cauchy problem for parabolic systems whose coefficients satisfy the Dinin condition* Proceedings of the seminar on functional analysis. Voronezh. 1967, **9**, 54–83. (in Russian)

[5] Ivasishen S.D., Eidelman S.D. *$2\vec{b}$-parabolic systems* Proceedings of the seminar on functional analysis. Kyiv: Institute of Mathematics AN USSR. 1968, **1**, 3–175. (in Russian)

[6] Ivasishen S.D. *On integral representations and the Fatu property for solutions of parabolic systems* Uspekhi Mat. Nauk. 1986, **41** (4), 173–174. (in Russian)

[7] Ivasishen S.D. *Integral representation and initial values of solutions of $2\vec{b}$-parabolic systems* Ukr. Math. J. 1990, **42** (4), 500–506. (in Russian)

[8] Ivasishen S.D., Pasichnik G.S. *On the Cauchy problem for $2\vec{b}$-parabolic systems with increasing coefficients* Ukr. Math. J. 2000, **52** (11), 1484–1496. (in Ukrainian)

[9] Gorodetskii V.V. *On the localization of solutions of the Cauchy problem for $2\vec{b}$-parabolic systems in classes of generalized functions* Diff. Equat. 1988, **24** (2), 348–350. (in Russian)

[10] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. Basel-Boston-Berlin: Birkhaser, 2004.

[11] Litovchenko V.A. Correct solvability of the Cauchy problem for parabolic pseudodifferential systems in spaces of infinitely differentiable functions. Autoref. thesis ... Dr. physics and mathematics Sciences: 01.01.02. Kyiv, 2009. (in Ukrainian)

[12] Litovchenko V.A. *Fundamental Solution of the Cauchy Problem for $\{\vec{p};\vec{h}\}$-parabolic systems with variable coefficients* J. Math. Sci. 2019, **243**, 230–239. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04537-x

[13] I. Gel'fand and G. Shilov Generalized Functions. Vol. 3. Theory of Differential Equations. Boston, MA: Academic Press, 1967.

[14] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov Spaces of Basic and Generalized Functions. Moscow: Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit., 1958. (in Russian)

[15] Dovzhytska I.M. *The Cauchy problem for inhomogeneous parabolic Shilov equations* Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 475–484. https://doi.org/10.15330/cmp.13.2.475-484

Надійшло 04.11.2022

Litovchenko V.A.   Gorbatenko M.Y. *Inhomogeneous differential equations of vector order with dissipative parabolicity and positive genus*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 144–155.

Parabolicity in the sense of both Petrosky and Shilov has a scalar character. It is not able to take into account the specificity of the heterogeneity of the environment. In this regard, in the early 70-s, S.D. Eidelman proposed the so-called $2\vec{b}$-parabolicity, which is a natural generalization of the Petrovsky parabolicity for the case of an anisotropic medium. A detailed study of the Cauchy problem for equations with such parabolicity was carried out in the works of S.D. Eidelman, S.D. Ivasishena, M.I. Matiichuk and their students.

An extension of parabolicity according to Shilov for the case of anisotropic media is $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-parabolicity. The class of equations with such parabolicity is quite broad, it includes the classes of Eidelman, Petrovskii, and Shilov and allows unifying the classical theory of the Cauchy problem for parabolic equations.

In this work, for inhomogeneous $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-parabolic equations with vector positive genus, the conditions under which the Cauchy problem in the class of generalized initial functions of the type of Gelfand and Shilov distributions will be correctly solvable are investigated. At the same time, the inhomogeneities of the equations are continuous functions of finite smoothness with respect to the set of variables, which decrease with respect to the spatial variable, and are unbounded with the integrable feature with respect to the time variable.

Лопушанська Г. П.

Обернена задача з невідомою правою частиною у півлінійному дифузійно-хвильовому рівнянні з дробовою похідною при інтегральній за часом умові

Вивчаємо обернену крайову задачу визначення залежної від просторових змінних компоненти правої частини півлінійного дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною за часом. Знаходимо достатні умови локальної за часом єдиності розв'язку при інтегральній за часом додатковій умові

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

де u – невідомий розв'язок першої крайової задачі для такого рівняння, η_1 і Φ_1 – задані функції. Використовуємо метод функції Гріна.

Ключові слова і фрази: півлінійне рівняння дифузії, похідна дробового порядку, обернена задача, інтегральна за часом умова.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: *lhp@ukr.net*

Вступ

Обернені задачі для рівнянь із дробовими похідними виникають у різних галузях науки і техніки. Найбільше робіт по обернених задачах для рівнянь із дробовими похідними за часом, як і для рівнянь із частинними похідними цілих порядків присвячено задачам із невідомими правими частинами у рівняннях (див., наприклад, [1,4,6,15,16,19–21] і бібліографію). Використовують різні додаткові умови (умови перевизначення). У цій праці, використовуючи інтегральну за часом умову перевизначення, вивчаємо обернену задачу знаходження залежної від просторових змінних функції у правій частині півлінійного дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною Капуто-Джрбашяна-Нерсесяна (регуляризованою похідною дробового порядку).

Зауважимо, що з використанням інтегральної за часом умови перевизначення у різних функційних просторах одержані достатні умови однозначної розв'язності деяких

УДК 517.95
2010 *Mathematics Subject Classification:* 80A23,35S10.

обернених задач для лінійного рівняння дробової дифузії: у [8, 9] з невідомим, залежним від часу, множником у правій частині рівняння, у [3] – з невідомим молодшим коефіцієнтом, у [10] – з невідомими початковими даними розв'язку.

Достатні умови єдиності розв'язку оберненої крайової задачі для півлінійного рівняння дробової дифузії з невідомим множником, що залежить від часу, знайдено в [11] при інтегральній за просторовими змінними умові перевизначення. Також при такого вигляду додатковій умові в [12] одержано достатні умови однозначної розв'язності оберненої задачі з невідомим молодшим, залежним від часу, коефіцієнтом для півлінійного телеграфного рівняння.

У цій праці знаходимо достатні умови єдиності розв'язку (u, g) оберненої задачі

$$D_t^\alpha u - \Delta u = g(x)F_0(x,t,u), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T] := Q, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] := \partial Q, \tag{2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \;\; u_t(x,0) = F_2(x), \; x \in \bar{\Omega}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \bar{\Omega} \tag{4}$$

де $D_t^\alpha u$ – регуляризована похідна порядку $\alpha \in (1,2)$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ з межею $\partial\Omega$ класу $C^{1+\gamma}$, $\gamma \in (0,1)$, F_0, F_1, F_2, Φ_1, η_1 – задані функції.

Використовуємо метод функції Гріна [2, 13, 17, 18, 20].

1 Основні позначення, означення і допоміжні результати

Через $f * g$ позначаємо згортку функцій f і g, використовуємо функцію

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \lambda > 0 \\ f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \le 0 \end{cases},$$

де $\Gamma(t)$ – гама-функція, $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда. Зауважимо, що

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu},$$

похідна Рімана-Ліувіля $v^{(\alpha)}(t)$ порядку $\alpha > 0$ визначається формулою

$$v^{(\alpha)}(t) = f_{-\alpha}(t) * v(t),$$

регуляризована похідна дробового порядку α при $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$ визначається формулою

$$D^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} v^{(m)}(\tau)d\tau,$$

і тоді

$$D^\alpha v(t) = v^{(\alpha)}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} f_{j+1-\alpha}(t)v^{(j)}(0).$$

Нехай $C^{m+\gamma}(\Omega)$ $(C^{m+\gamma}(Q), C^{m+\gamma}(Q\times\mathbb{R}))$ – простір функцій із $C^m(\Omega)$ (відповідно з $C^m(Q), C^m(Q\times\mathbb{R})$), похідні порядків m яких задовольняють умову Гельдера з показником $\gamma\in(0,1)$ (відповідно, за просторовими змінними для кожного $t\in(0,T]$),

$C_{2,\alpha}(Q)=\{v\in C(Q):\ \Delta u,\ D_t^\alpha v\in C(Q)\}$, $C_{2,\alpha}(\bar Q)=C_{2,\alpha}(Q)\cap C(\bar Q)$.

Означення 1. *Пара функцій $(u,g)\in C_{2,\alpha}(\bar Q)\times C(\bar\Omega)$, що задовольняє рівняння (1) в Q і умови (2)-(4), називається класичним розв'язком задачі (1)-(4).*

З означення одержуємо необхідність умов погодження даних задачі

$$F_j|_{\partial\Omega}=0,\ j=1,2,\ \ \Phi_1|_{\partial\Omega}=0.$$

Позначаємо $\quad (L^{reg}v)(x,t)=D_t^\alpha v(x,t)-\Delta v(x,t),\quad (x,t)\in Q,\, v\in C_{2,\alpha}(Q).$

Означення 2. *Вектор-функція $(G_0(x,t,y,\tau),G_1(x,t,y),G_2(x,t,y))$ називається вектор-функцією Гріна задачі*

$$(L^{reg}u)(x,t)=g_0(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{5}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0,\quad u(x,0)=g_1(x),\ u_t(x,0)=g_2(x),\ \ x\in\Omega, \tag{6}$$

якщо при достатньо регулярних g_0, g_1, g_2 функція

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy+\sum_{j=1}^2\int\limits_\Omega G_j(x,t,y)g_j(y)dy,\quad (x,t)\in\overline{Q} \tag{7}$$

є класичним (із $C_{2,\alpha}(\bar Q)$) розв'язком задачі (5), (6).

Відомо (наприклад [7, 13, 14, 17, 18]), що вектор-функція Гріна задачі (5)–(6) існує. Згідно з [7],

$$|D_x^\kappa G_0(x,t,y,\tau)|\le Ct^{-\alpha\frac{n+|\kappa|}{2}+\alpha-1}e^{-c(|x|t^{-\frac{\alpha}{2}})^{\frac{2}{2-\alpha}}}\Psi_{n+|\kappa|-2}(|x|t^{-\frac{\alpha}{2}}),$$

де $\Psi_k(z)=\begin{cases}1, & k<0\\ 1+|ln|z||, & k=0\\ |z|^{-k}, & k>0\end{cases}$ при $|z|<1$, $\quad\Psi_k(z)=\Psi_k(1)$ при $|z|>1$, і подібні оцінки правильні для інших компонент вектор-функції Гріна.

Тут і далі c_0, C_i $(i\in\mathbb{Z}_+)$ – додатні сталі.

Також згідно з [2, 7], функції G_j задовольняють умову Гельдера

$$|G_0(x+\Delta x,t+\Delta t,y,\tau)-G_0(x,t,y,\tau)|\le A_0(x,t,y,\tau)[|\Delta x|+|\Delta t|^{\alpha/2}]^\gamma,$$
$$|G_j(x+\Delta x,t+\Delta t,y)-G_j(x,t,y,\tau)|\le A_j(x,t,y)[|\Delta x|+|\Delta t|^{\alpha/2}]^\gamma,\ \ j=1,2$$

$$\forall (x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\bar Q,(y,\tau)\in\bar Q,$$

де невід'ємні функції A_j мають такого ж вигляду оцінки, як G_j, $j=0,1,2$. Подібні оцінки правильні і для похідних вектор-функції Гріна.

З результатів [2, 7, 13] випливає, що при обмежених $g_0 \in C^\gamma(Q)$, $g_j \in C^\gamma(\Omega)$, $j = 1, 2$ існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q})$ задачі (5)–(6). Він визначений формулою (7).

У [5] при $n = 2$ та $n = 3$ знайдено достатні умови розв'язності першої крайової задачі для півлінійного рівняння дробової дифузії з правою частиною $f(u)$ при $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ і $|f'(u)| \leq C|u|^{b-1}$ для деяких $b > 1$.

Переходимо до оберненої задачі (1)–(4).

2 Єдиність розв'язку оберненої задачі

Теорема 1. *Нехай $\alpha \in (1, 2)$, $\eta_1 \in C^2[0, T]$, $\eta_1(T) = \eta_1'(T) = 0$, $F_0 \in C^{1+\gamma}(Q \times \mathbb{R})$ і обмежена,*

$$P_v(x,T) := \frac{1}{T}\int_0^T F_0(x,t,v)\eta_1(t)dt \neq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega},\ T > 0,\ v \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$|\frac{F_0(x,t,v)}{P_v(x,T)}| \leq B(T) \ \ \forall (x,t) \in Q,\ v \in \mathbb{R} \tag{9}$$

і $B(T)$ обмежена або функція $T^\alpha B(T)$ монотонно неспадна. Тоді розв'язок $(u, g) \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}) \times C(\bar{\Omega})$ задачі (1)-(4) єдиний при деякому $T > 0$.

Доведення. Нехай $(u_1, g_1), (u_2, g_2) \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}) \times C(\bar{\Omega})$ – два розв'язки задачі (1)-(4). Позначаючи $u = u_1 - u_2$, $g = g_1 - g_2$, одержимо рівняння

$$D_t^\alpha u - \Delta u = g_1(x)F_0(x,t,u_1) - g_2(x)F_0(x,t,u_2).$$

За лемою Адамара

$$F_0(x,t,u_1) - F_0(x,t,u_2) = F_{01}(x,t)u$$

з відомою, залежною від u_1, u_2, функцією $F_{01} \in C^\gamma(Q)$ і обмеженою.

Попереднє рівняння набуває вигляду

$$D_t^\alpha u - \Delta u = g_2(x)F_{01}(x,t)u + g(x)F_0(x,t,u_1(x,t)), \quad (x,t) \in Q. \tag{10}$$

З умов (2) і (3) одержуємо

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \ \ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0 \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{11}$$

а з умови (4)

$$\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = 0, \ x \in \bar{\Omega}. \tag{12}$$

Зауважимо, що за умови (12)

$$\int_0^T \Delta u(x,t)\eta_1(t)dt = \Delta \int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = 0,$$

а за припущень щодо η_1, враховуючи (11), для всіх $x \in \bar{\Omega}$ матимемо

$$\int\limits_0^T D_t^\alpha u(x,t)\eta_1(t)dt = \int\limits_0^T [f_{2-\alpha}(t) * u_{tt}(x,t)]\eta_1(t)dt = \int\limits_0^T \Big(\int\limits_0^t f_{2-\alpha}(t-s)u_{ss}(x,s)ds\Big)\eta_1(t)dt$$

$$= \int\limits_0^T u_{ss}(x,s)\Big(\int\limits_s^T f_{2-\alpha}(t-s)\eta_1(t)dt\Big)ds = \int\limits_0^T u_{ss}(x,s)\Big(\int\limits_0^{T-s} f_{2-\alpha}(\tau)\eta_1(\tau+s)d\tau\Big)ds$$

$$= -\int\limits_0^T u_s(x,s)\Big(\int\limits_0^{T-s} f_{2-\alpha}(\tau)\eta_1'(\tau+s)d\tau\Big)ds = -\int\limits_0^T u_s(x,s)\Big(\int\limits_s^T f_{2-\alpha}(t-s)\eta_1'(t)dt\Big)ds$$

$$= \int\limits_0^T u(x,t)(f_{2-\alpha}\widehat{*}\eta_1'')(t)dt.$$

Тут позначено $\quad (f_{2-\alpha}\widehat{*}\eta_1'')(t) = \int\limits_t^T f_{2-\alpha}(s-t)\eta_1''(s)ds.$

За припущень теореми, враховуючи властивості функції G_0 і результати [2], одержуємо, що u є розв'язком крайової задачі (10), (11) тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє у $C(\bar{Q})$ інтегральне рівняння

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x,t,y,\tau)\big[g_2(y)F_{01}(y,\tau)u(y,\tau) + g(y)F_0(y,\tau,u_1(y,\tau))\big]dy, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}. \tag{13}$$

Застосовуючи до обох частин рівняння (10) умову перевизначення (12), одержуємо

$$\int\limits_0^T u(x,t)(f_{2-\alpha}\widehat{*}\eta_1'')(t)dt$$
$$= g(x)\int\limits_0^T F_0(x,t,u_1(x,t))\eta_1(t)dt + g_2(x)\int\limits_0^T F_{01}(x,t)u(x,t)\eta_1(t)dt, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Звідси, враховуючи припущення (8) і позначаючи $P_{u_1}(x,T) = P_1(x,T)$, знаходимо невідому функцію

$$g(x) = \frac{1}{TP_1(x,T)}\int\limits_0^T u(x,t)\big[f_{2-\alpha}(t)\widehat{*}\eta_1''(t) - g_2(x)F_{01}(x,t)\eta_1(t)\big]dt, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{14}$$

Підставляючи знайдений вираз для $g(x)$ (через u) в (13), одержуємо

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x,t,y,\tau) g_2(y) F_{01}(y,\tau) u(y,\tau) dy$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x,t,y,\tau) \frac{F_0(y,\tau,u_1(y,\tau))}{TP_1(y,T)} dy \int\limits_0^T \big[(f_{2-\alpha} \widehat{*} \eta_1^{''})(s)$$
$$- g_2(y) F_{01}(y,s) \eta_1(s) \big] u(y,s) ds, \quad (x,t) \in \bar{Q},$$

що еквівалентно рівнянню

$$u(x,t) = \int\limits_0^T ds \int\limits_\Omega \Big\{ \theta(t-s) G_0(x,t,y,s) g_2(y) F_{01}(y,s)$$
$$+ \int\limits_0^t G_0(x,t,y,\tau) \big[(f_{2-\alpha} \widehat{*} \eta_1^{''})(s)$$
$$- g_2(y) F_{01}(y,s) \eta_1(s) \big] \frac{F_0(y,\tau,u_1(y,\tau))}{TP_1(y,T)} d\tau \Big\} u(y,s) dy, \ \ (x,t) \in Q.$$

Це лінійне однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x,t) = \int\limits_0^T ds \int\limits_\Omega K_1(x,t,y,s) u(y,s) dy, \quad (x,t) \in \bar{Q} \tag{15}$$

з ядром

$$K_1(x,t,y,s) = \theta(t-s) G_0(x,t,y,s) g_2(y) F_{01}(y,s)$$
$$+ \int\limits_0^t G_0(x,t,y,\tau) \big[(f_{2-\alpha} \widehat{*} \eta_1^{''})(s) - g_2(y) F_{01}(y,s) \eta_1(s) \big] \frac{F_0(y,\tau,u_1(y,\tau))}{TP_1(y,T)} d\tau.$$

Тут $g_2(y)F_{01}(y,s)$ і $(f_{2-\alpha} \widehat{*} \eta_1^{''})(s) - g_2(y)F_{01}(y,s)\eta_1(s)$ – відомі неперервні й обмежені в $\bar{Q}$ певною сталою $M > 0$ функції.

Знайдемо оцінку ядра $K_1(x,t,y,s)$, використовуючи наведені вище оцінки функції

$G_0(x,t,y,\tau)$. При $n\ge 3$ маємо

$$|K_1(x,t,y,s)|\le M\ \Big[|G_0(x,t,y,s)|+\frac{B(T)}{T}\int\limits_0^t|G_0(x,t,y,\tau)|d\tau\Big],$$

$$\int\limits_\Omega|K_1(x,t,y,s)|dy\le MC_0\Big\{\theta(t-s)\Big[\int\limits_{y\in\Omega:\ |y-x|^2<(t-s)^\alpha}\frac{|x-y|^{2-n}}{t-s}e^{-c_0\left(\frac{|x-y|^2}{(t-s)^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dy$$

$$+\int\limits_{y\in\Omega:\ |y-x|^2>(t-s)^\alpha}(t-\tau)^{\frac{\alpha(2-n)}{2}-1}e^{-c_0\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dy\Big]$$

$$+\frac{B(T)}{T}\int\limits_0^t\Big[\int\limits_{y\in\Omega:\ |y-x|^2<(t-\tau)^\alpha}\frac{|x-y|^{2-n}}{t-\tau}e^{-c_0\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dy$$

$$+\int\limits_{y\in\Omega:\ |y-x|^2>(t-\tau)^\alpha}(t-\tau)^{\frac{\alpha(2-n)}{2}-1}e^{-c_0\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dy\Big]d\tau\Big\}$$

$$\le C_1\ \Big\{\theta(t-s)\Big[(t-s)^{\alpha-1}\int\limits_0^1 ze^{-c_0z^{\frac{2}{2-\alpha}}}dz+(t-s)^{\alpha-1}\int\limits_1^\infty z^{n-1}e^{-c_0z^{\frac{2}{2-\alpha}}}dz\Big]$$

$$+\frac{B(T)}{T}\int\limits_0^t\Big[(t-\tau)^{\alpha-1}\int\limits_0^1 ze^{-c_0z^{\frac{2}{2-\alpha}}}dz+(t-\tau)^{\alpha-1}\int\limits_1^\infty z^{n-1}e^{-c_0z^{\frac{2}{2-\alpha}}}dz\Big]\frac{d\tau}{T}\Big\}$$

$$\le C_2\big[\theta(t-s)(t-s)^{\alpha-1}+B(T)\frac{t^\alpha}{T}\big],$$

$$\int\limits_0^T ds\int\limits_\Omega|K_1(x,t,y,s)|dy\le C_3\Big[\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds+B(T)t^\alpha\Big]\le C_3\max\{\frac{1}{\alpha},B(T)\}T^\alpha,$$

і подібно у випадку $n=1,2$.

Отож, ядро $K_1(x,t,y,s)$ лінійного однорідного інтегрального рівняння Фредгольма (15) інтегровне, і при достатньо малих $T>0$ існує єдиний його розв'язок $u(x,t)=0$, $(x,t)\in\bar{Q}$ у просторі $C(\bar{Q})$. Тоді з (14) одержуємо $g(t)=0$, $t\in[0,T]$.

Також

$$|K_1(x+\Delta x,t+\Delta t,y,\tau)-K_1(x,t,y,\tau)|\le M\ |G_0(x+\Delta x,t+\Delta t,y,\tau)-G_0(x,t,y,\tau)|$$

$$+\frac{MB(T)}{T}\int\limits_0^t|G_0(x+\Delta x,t+\Delta t,y,\tau)-G_0(x,t,y,\tau)|d\tau$$

$$\le MA_0(x,t,y,\tau)[|\Delta x|+|\Delta t|^{\alpha/2}]^\gamma+\frac{MB(T)}{T}\int\limits_0^t A_0(x,t,y,\tau)d\tau[|\Delta x|+|\Delta t|^{\alpha/2}]^\gamma$$

$$\le MA_{01}(x,t,y,\tau)[|\Delta x|+|\Delta t|^{\alpha/2}]^\gamma,$$

де $A_{01}(x,t,y,\tau) = A_0(x,t,y,\tau) + \frac{B(T)}{T}\int\limits_0^t A_0(x,t,y,\tau)d\tau$, а тому має такого ж вигляду оцінки, як $G_0(x,t,y,\tau)$. Подібно одержуємо, що й похідні ядра $K_1(x,t,y,\tau)$ задовольняють умову Гельдера.

Враховуючи результати [2], одержуємо, що кожний неперервний в $\bar{Q}$ розв'язок інтегрального рівняння (15) (у нашому випадку тривіальний) є розв'язком із $C_{2,\alpha}(\bar{Q})$ задачі (10), (11). Очевидно, він задовольняє умову перевизначення (12).

□

Висновки

Знайдено достатні умови локальної за часом єдиності класичного розв'язку оберненої крайової задачі відновлення залежного від просторових змінних неперервного множника у правій частині півлінійного дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною за часом при інтегральній за часом умові перевизначення.

Одержаний результат поширюється на випадок загальнішого рівняння з еліптичним диференціальним виразом, що має достатньо гладкі, залежні від просторових змінних коефіцієнти.

Список літератури

[**1**] Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. *Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determination condition.* EJDE. 2013, **2013** (270), 1-16.

[**2**] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.

[**3**] Janno J., Kasemets K. *Uniqueness for an inverse problem for a semilinear time-fractional diffusion equation.* Inverse Probl. Imaging. 2017, **11** (1), 125-149. doi: 10.3934/ipi.2017007

[**4**] Jin B., Rundell W. *A turorial on inverse problems for anomalous diffusion processes.* Inverse Problems. 2015, **31**, 035003. –doi:10.1088/0266-5611/31/3/035003.

[**5**] Kian Y., Yamamoto M. *On existence and uniqueness of solutions for semilinear fractional wave equations.* Fract. Calculus Appl. Anal. 2017. **20** 117-138.

[**6**] Kinash N., Janno Ja. *An Inverse Problem for a Generalized Fractional Derivative with an Application in Reconstruction of Time- and Space-Dependent Sources in Fractional Diffusion and Wave Equations.* Mathematics. 2019, **7** (19). ARTN 1138.10.3390/math7121138.

[**7**] Kochubei A.N. *Fractional Hyperbolic Systems.* Fract. Calc. Appl. Anal. 2013. **16** (4) 860-873. DOI: 10.2478/s13540-013-0053-4

[**8**] Lopushanska H., Lopushansky A. *Inverse problem with a time-integral condition for a fractional diffusion equation.* Math. Meth. Appl. Sci. 2019, **42** (6), 3327-3340. https://doi.org/10.1002/mma.5587

[**9**] Lopushansky A., Lopushanska H., Myaus O. *An inverse fractional source problem in a space of periodic spatial distributions.* Fractional differ. calc. 2016, **6** (2), 267-274. http://dx.doi.org/10.7153/fdc-06-17.

[**10**] Lopushanska H., Lopushansky A., Myaus O. *Inverse problem in a space of periodic spatial distributions for a time fractional diffusion equation.* EJDE. 2016, **2016** (14), 1-9. http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu

[**11**] Lopushanska H., Rapita V. *Inverse problem to fractional diffusion equation with unknown young coefficient.* Visnyk Lviv. Un-ty. – Ser. Mech.-Mat. – 2015, Issue 80.–P. 88-99.

[**12**] Lopushanska H., Rapita V. *Inverse coefficient problem for semi-linear fractional telegraph equation.* EJDE. – 2015. – V. 2015, №153. – P. 1-13. http://ejde.math.txstate.edu/2015/153.

[**13**] Mainardi F. *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation.* Appl. Math. Lett. 1996, **9** (6), 23-28.

[**14**] Povstenko Y. Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engeneers. Birkhauser, New-York, 2015. ISBN: 978-3-319-17953-7.

[**15**] Prilepko A.I., Kostin A.B. *On some inverse problems for parabolic equations with finite and integral observation.* Mat. Sb. 1992, **183** (4), 49-68.

[**16**] Sakamoto K., Yamamoto M. *Initial value/boundary-value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems.* J. Math. Anal. Appl. 2011, **382** (1), 426-447.

[**17**] Schneider W.R., and Wyss W. *Fractional diffusion and wave equations.* J. Math. Phys. 1989, **30**, 134-144.

[**18**] Voroshylov A.A., Kilbas A.A. *Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative.* Dokl. Ak. Nauk. 2007, **414** (4), 1-4.

[**19**] Wang Jun-Gang, Ran Yu-Hong. *An iterative method for an inverse source problem of time-fractional diffusion equation.* Inverse Problems in Science and Engineering. 2018, **26** (10).

[**20**] Wen J., Cheng J.-F. *The method of fundamental solution for the inverse source problem for the space-fractional diffusion equation.* Inverse Problems in Science and Engineering. 2018, **26** (7), 925-941.

[**21**] Zhang Y. and Xu X. *Inverse source problem for a fractional diffusion equation.* Inverse Problems. 2011, **27**, P. 1-12.

Надійшло 07.11.2022

Lopushanska H.P. *Inverse source problem for a semilinear fractional diffusion-wave equation under a time-integral condition*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 156–164.

We study the inverse boundary value problem on determining a space-dependent component in the right-hand side of semilinear time fractional diffusion-wave equation. We find sufficient conditions for a time-local uniqueness of the solution under the time-integral additional condition

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

where u is the unknown solution of the first boundary value problem for such equation, η_1 and Φ_1 are the given functions. We use the method of the Green's function.

Маценко В.Г.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБОРУ УРОЖАЮ ДЛЯ ПОПУЛЯЦІЙ ІЗ НЕПЕРЕКРИВНИМИ ПОКОЛІННЯМИ

Розглянуто дискретну логістичну модель та модель Рікера зі збором урожаю. Для них знайдено стаціонарні та періодичні розв'язки, досліджено їх стійкості. З моделями проведено ряд числових експериментів.

Ключові слова і фрази: моделі збору врожаю, дискретна логістична модель, модель Рікера.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: *v.matsenko@chnu.edu.ua*

Вступ

Сучасні досягнення в екології стали можливими завдяки використанню методів математичного моделювання. Математичні моделі слугують основним інструментом розв'язання екологічних, еколого-економічних проблем. Вони дають можливість більш глибоко зрозуміти суть екологічних процесів, оцінити їх стійкість та здійснити прогноз розвитку екосистеми при різних зовнішніх впливах і способах управління. Найбільше математичні методи проникли в дослідження динаміки чисельності біологічних популяцій [1].

Більшість математичних моделей екологічних систем формулюється у вигляді диференціальних та різницевих рівнянь, які дозволяють вивчати динаміку процесів у режимі реального часу.

Підхід, що базується на апараті диференціальних рівнянь, застосовується для моделювання динаміки популяцій із перекривними поколіннями. Однак для багатьох біологічних популяцій послідовні покоління не перекриваються і ріст чисельності популяцій відбувається в дискретні моменти часу. Ця ситуація має місце для популяцій без довгих діапауз у життєвому циклі. До таких популяцій можна віднести багато видів комах. Їх дорослі особини живуть недовго, відкладають яйця і до моменту появи на світ нового покоління припиняють своє існування.

УДК 519.87:574.3
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 34K06, 34K20.

Тому такі моделі пов'язують чисельність N_{t+1} у момент часу $t+1$ із чисельністю в попередні моменти часу. Це приводить до розгляду різницевих рівнянь, які в простішому випадку мають вигляд

$$N_{t+1} = F(N_t),\ N_t \in R^+,\ F : R^+ \to R^+,\ R^+ = [0, \infty), \tag{1}$$

де F – гладка дійсна функція дійсного аргументу.

Математична задача полягає в побудові відображення і знаходженні траєкторії нелінійних відображень при заданому $N_0 > 0$. З практичної точки зору, якщо відомий вигляд функції $F(N_t)$, то визначення чисельності наступних поколінь полягає в послідовному використанні формули (1), тобто шляхом ітерування.

В аналітичному вигляді, як правило, рівняння (1) не вдається розв'язати, проте можна знайти стаціонарні та періодичні розв'язки і дослідити їх на стійкість.

Стаціонарні розв'язки $N^* = const$ є нерухомими точками відображення F і знаходяться з рівняння

$$N^* = F(N^*). \tag{2}$$

Лінеаризація рівняння (1) в околі рівноваги N^* має вигляд

$$x_{t+1} = \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*} x_t.$$

Величину $\lambda = \left.\dfrac{dF}{dN}\right|_{N^*}$ називають мультиплікатором нерухомої точки динамічної системи з дискретним часом. Він визначає характер стійкості розв'язку N^*. Якщо $|\lambda| < 1$, то N^* стійкий (асимптотично), якщо $|\lambda| > 1$, то – нестійкий. Окрім стаціонарних розв'язків, важливі ще періодичні розв'язки рівняння (1).

Означення 1. *Розв'язок N_t називається періодичним із періодом T (із довжиною T або T-циклом), якщо $N_{t+T} = N_t$ для всіх $t = 0, 1, 2, \dots$ і $N_{t+j} \neq N_t$ для $j = 1, 2, \dots, T-1$.*

Особливу роль серед періодичних розв'зків відіграють розв'язки з періодами $T = 2$ та $T = 3$, оскільки, за теоремою Шарковського, з їх існування можна одержати інформацію про існування періодичних розв'язків інших періодів [7]

Цикли довжиною $T = 2$ існують, якщо система

$$N_2 = F(N_1), \quad N_1 = F(N_2),$$

має два різних додатних розв'язки: N_1^* і N_2^*.

Умова стійкості періодичного розв'язку з періодом $T = 2$ має вигляд

$$\left| \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} \right| < 1.$$

Для знаходження циклів довжиною 3 (для них виконується умова $N_{t+3} = N_t$) маємо систему

$$N_3 = F(N_2), \quad N_2 = F(N_1), \quad N_1 = F(N_3).$$

Стійкість періодичного розв'язку N_1^*, N_2^*, N_3^* з періодом 3 визначається умовою

$$\left| \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_1^*} \cdot \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_2^*} \cdot \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_3^*} \right| < 1.$$

У цій роботі розглядаються дискретні моделі популяцій зі збором урожаю, оскільки у своїй діяльності людина використовує різні природні ресурси. При цьому важливо не знищити біологічну популяцію. Тому надзвичайно важливий екологічно обґрунтований підхід до раціонального використання відновлювального ресурсу.

Нехай з деякої популяції відловлюється певна кількість особин, при цьому вважатимемо, що інтенсивність промислу не залежить від часу. В цьому випадку рівняння, яке описує зміну чисельності популяції, має вигляд

$$N_{t+1} = F(N_t) - C(N_t, \alpha),$$

де $C(N_t, \alpha)$ – інтенсивність відлову особин із популяції, параметр α характеризує цю інтенсивність.

Задача моделювання полягає в тому, щоб установити таку швидкість збору урожаю, яка буде підтримувати популяцію в стані приросту.

Розглянемо моделі збору урожаю в популяціях, динаміка чисельності яких описується дискретним логістичним рівнянням та рівнянням Рікера. Ці два приклади динамічних систем найчастіше використовуються на практиці [1].

Модель логістичного росту демонструє складну динаміку чисельності популяції і дозволяє добре апроксимувати динаміку багатьох біологічних процесів. Дослідженню дискретної логістичної моделі присвячено багато праць, наприклад, [2], [3], [4]. В них вивчаються питання існування стаціонарних станів, періодичних розв'язків та їх стійкість, а також виникнення хаотичних поведінок розв'язку.

Модель Рікера (представлена в 1954 році) вивчалась, зокрема, в працях [5], [6].

1 Аналіз логістичної моделі зі збором урожаю

Дискретне логістичне рівняння постійного збору врожаю має вигляд

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t) - c. \tag{3}$$

Для (3) точка рівноваги $N = N^* = const$ шукається з рівняння

$$N = rN(1 - N) - c,$$

або

$$rN^2 - (r - 1)N + c = 0.$$

Звідки знаходимо

$$N_{1,2}^* = \frac{r - 1 \pm \sqrt{(r-1)^2 - 4rc}}{2r}.$$

Для існування додатних точок спокою ставимо умови $r > 1$ і $(r-1)^2 - 4rc > 0$. Це те саме, що $c < (r-1)^2/4r$.

Зі співвідношення $\left|\left.\dfrac{dF}{dN}\right|_{N^*_{1,2}}\right| < 1$ знаходимо умови стійкості стаціонарних станів.

Маємо
$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} = r(1-2N_1^*) = 1 + \sqrt{(r-1)^2 - 4rc} > 1,$$
тобто розв'язок $N = N_1^*$ – нестійкий.

Для $N = N_2^*$
$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} = r(1-2N_2^*) = 1 - \sqrt{(r-1)^2 - 4rc}.$$
З умови стійкості $\left|1 - \sqrt{(r-1)^2 - 4rc}\right| < 1$ одержуємо співвідношення $r^2 - 2r - 4rc < 3$.

Знайдемо значення N_1^*, N_2^*, що складають цикл довжиною 2. Вони визначаються з умови $N_{t+2} = N_t$, тобто з рівняння
$$N = r\left[(rN - rN^2 - c) - (rN - rN^2 - c)^2\right] - c,$$
або те саме, що з рівняння
$$r^3N^4 - 2r^3N^3 + (r^3 + r^2 + 2r^2c)N^2 + (1 - r^2 - 2r^2c)N + rc + rc^2 + c = 0. \qquad (4)$$

Оскільки знайдені значення для стаціонарних ров'язків задовольняють рівняння (4), вираз $rN^2 - (r-1)N + c$ є дільником лівої частини (4). Виконавши це ділення, одержуємо рівняння для знаходження N_1^*, N_2^*. що складають цикл довжиною 2.

Маємо
$$r^2N^2 - r(r+1)N + (r + rc + 1) = 0.$$
Звідси
$$N^*_{1,2} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r+1)^2 - 4(r + rc + 1)}}{2r}.$$
Додатні $N^*_{1,2}$ існують, якщо
$$(r+1)^2 - 4(r + rc + 1) > 0,$$
або
$$r > 1 + 2c + \sqrt{(1+2c)^2 + 3}.$$

Стійкість періодичного розв'язку при $T = 2$ досліджуємо шляхом перевірки нерівності
$$\left|\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*}\right| = r^2\left|(1-2N_1^*)(1-2N_2^*)\right| < 1,$$
звідки одержуємо умову стійкості в параметрах r, c у вигляді
$$|4 + 2r + 4rc - r^2| < 1$$

або

$$1 + 2c + \sqrt{(1 + 2c)^2 + 3} < r < 1 + 2c + \sqrt{(1 + 2c)^2 + 5}.$$

При $c = 0$ маємо $3 < r < 1+\sqrt{6}$, що збігається з умовою стійкості періодичного розв'язку моделі без збору врожаю.

Для знаходження циклів довжиною 3 (умова $N_{t+3} = N_t$) необхідно знайти розв'язки системи

$$N_t = rN_{t+2}(1 - N_{t+2}) - c,$$

$$N_{t+2} = rN_{t+1}(1 - N_{t+1}) - c,$$

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t) - c.$$

Це аналогічне обчисленню коренів рівняння

$$N = r\left(-r(c + r(N-1)N)(c + r(N-1)N + 1) - c\right) \times$$

$$\times \left(r(c + r(N-1)N)(c + r(N-1)N + 1) + c + 1\right) - c.$$

Два корені цього рівняння

$$N_1^* = \frac{r - 1 + \sqrt{r^2 - 2r + 1 - 4rc}}{2r},$$

$$N_2^* = \frac{r - 1 - \sqrt{r^2 - 2r + 1 - 4rc}}{2r}$$

відомі і задають два стаціонарні стани рівняння (3).

Інші корені вдається знайти лише на комп'ютері.

З моделлю (3) були проведені числові експерименти.

При $r = 2$, $c = 0,1$ одержуються стаціонарні значення $N_1^* = 0,361803$, $N_2^* = 0,138197$, причому N_1^* стійкий, N_2^* нестійкий (рис. 1).

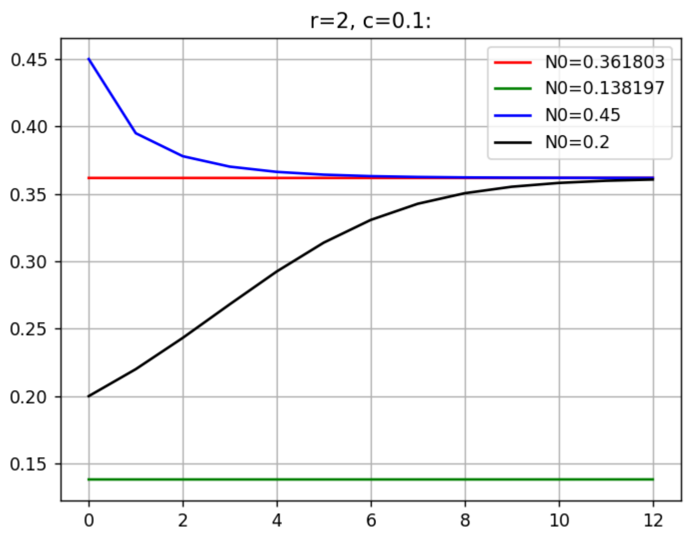

Рис. 1. Графіки стаціонарних станів при $r = 2$, $c = 0,1$, $N^* = 0,361803$

При $r = 3,4$, $c = 0,1$ існують два нестійких стаціонарних стани $N_1^* = 0,661414$, $N_2^* = 0,044468$ і з'являється періодичний розв'язок із періодом 2 (рис. 2). Його складають числа $N_1^* = 0,740067$ та $N_2^* = 0,5540501$. Причому цей розв'язок стійкий, оскільки $r^2 \left|(1-2N_1^*)(1-2N_2^*)\right| = 0,6 < 1$.

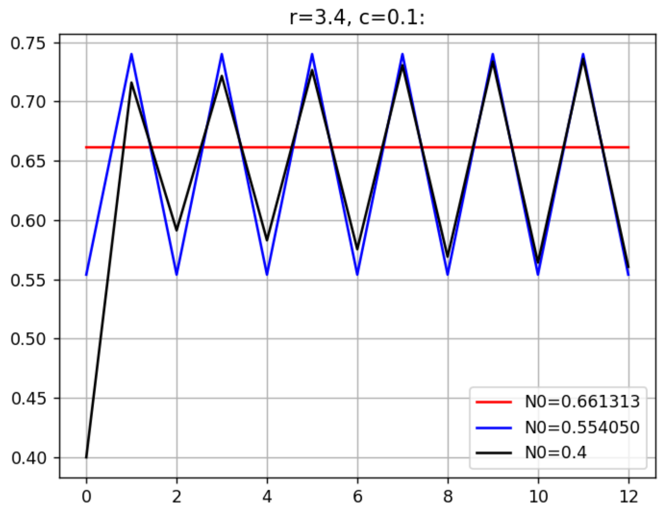

Рис. 2. Графік стійкого періодичного розв'язку з періодом $T = 2$ при $r = 3,4$, $c = 0,1$

При $r = 4$, $c = 0,0625$ існують два стаціонарних розв'язки: $N_1^* = 0,0214466$, $N_2^* = 0,728554$, причому і N_1^*, і N_2^* нестійкі. У цьому випадку, крім стаціонарних станів, існує ще періодичний розв'язок із періодом $T = 3$. Його складають три числа: $N_1^* = 0,174516$, $N_2^* = 0,51374$, $N_3^* = 0,936744$.

Цей розв'язок нестійкий (рис. 3), оскільки

$$\left| \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_1^*} \cdot \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_2^*} \cdot \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_3^*} \right| = 1,00003 > 1.$$

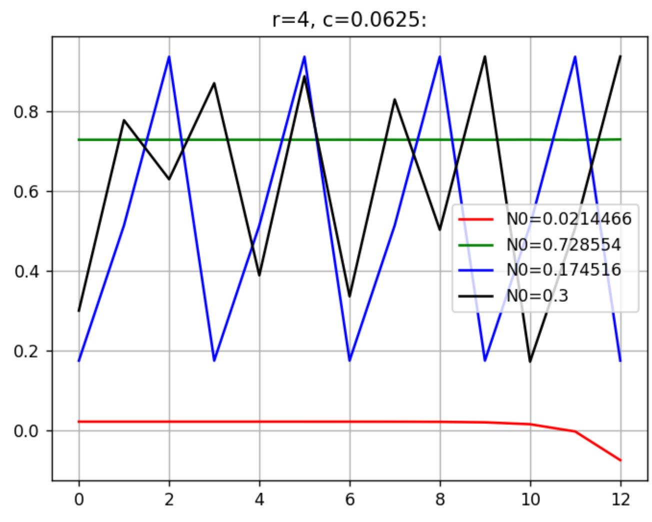

Рис. 3. Графік нестійкого періодичного розв'язку із періодом $T = 3$ при $r = 4$, $c = 0,0625$

За теоремою Шарковського [7], для рівняння (3) з умови існування T-циклів при $T = 3$ випливає існування періодичних розв'язків будь-якого періоду.

Зокрема, при $r = 3,8$, $c = 0,1$ знаходимо два нестійких стаціонарних стани $N_1^* = 0,0376367$, $N_2^* = 0,6992059$, один нестійкий періодичний розв'язок із періодом 2 ($N_1^* = 0,431164$, $N_2^* = 0,831994$) і періодичний розв'язок з періодом $T = 4$, що визначається числами $N_1^* = 0,385182$, $N_2^* = 0,799904$, $N_3^* = 0,508219$, $N_4^* = 0,849745$ (рис. 4).

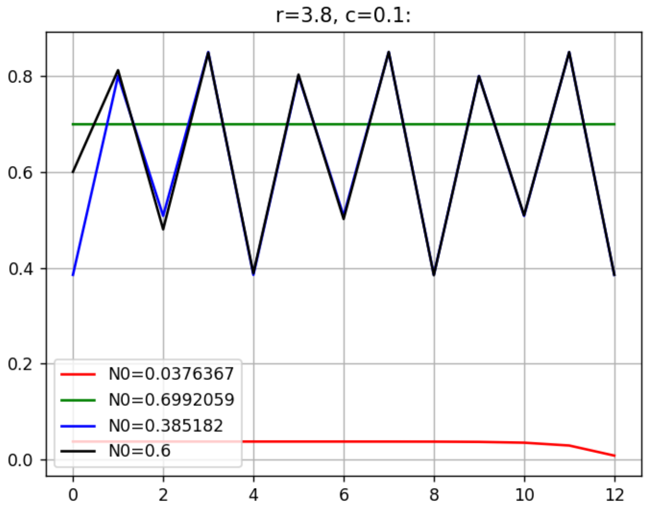

Рис. 4. Графік стійкого періодичного розв'язку з періодом $T = 4$ при $r = 3,8$, $c = 0,1$

Цей розв'язок стійкий, оскільки

$$\left| \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_3^*} \cdot \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_4^*} \right| = 0,3302 < 1.$$

А при $r = 4$, $c = 0,1$, крім двох нестійких стаціонарних розв'язків, одного нестійкого розв'язку з періодом $T = 2$, одержуємо ще нестійкий розв'язок із періодом $T = 4$. Його задають такі числові значення: $N_1^* = 0,330399$, $N_2^* = 0,784942$, $N_3^* = 0,575233$, $N_4^* = 0,87736$.

2 Модель Рікера зі збором урожаю

Модель Рікера зі збором постійного врожаю має вигляд

$$N_{t+1} = N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right) - c, \tag{5}$$

де N_t – чисельність особин у момент часу t; r – коефіцієнт природного приросту; K – параметр ємності середовища; c – інтенсивність збору врожаю.

Стани рівноваги чисельності N^* в моделі (5) знаходяться з рівняння

$$\exp\left(r\left(1 - \frac{N^*}{K}\right)\right) = 1 + \frac{c}{N^*},$$

яке можна розв'язати лише чисельно. Зокрема, при $K = 10$, $r = 1$ і різних значеннях c знайдено корені, наведені в табл. 1.

Таблиця 1

c	0,1	0,2	0,3	0,4
N_1^*	9,89949	9,79793	9,69526	9,59142
N_2^*	0,058742	0,118608	0,179653	0,24194

Причому стаціонарний розв'язок N_1^* – стійкий, а N_2^* – нестійкий, оскільки

$$\left| \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_1^*} \right| < 1, \quad \text{а} \quad \left| \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_2^*} \right| > 1,$$

де $F(N) = N \exp\left(r\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)\right) - c.$

Графіки розв'язків N_t рівняння (5) при $K = 10$, $r = 1$, $c = 0,3$ подані на рис. 5.

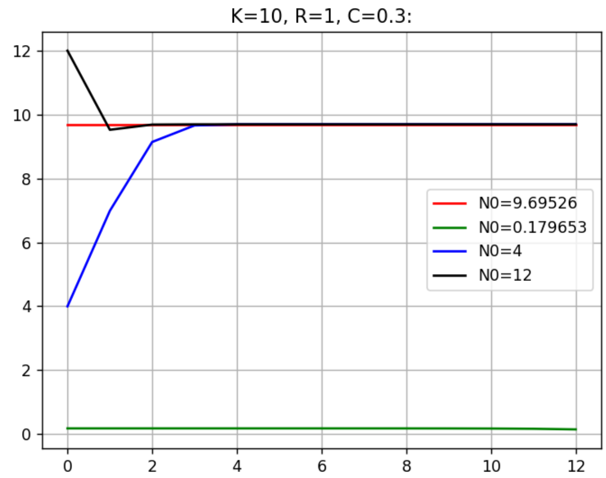

Рис. 5. Графіки стійкого та нестійкого стаціонарних станів рівняння (5)

Знайдемо періодичні розв'язки рівняння (5) із періодом $T = 2$.

З умови $N_{t+2} = N_t$ і (5) маємо

$$N_t = N_t \exp\left[r\left(2 - \frac{N_t}{K}\left(1 + \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right) + \frac{c}{K}\right)\right)\right] -$$
$$-c \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right) - c}{K}\right)\right) - c. \tag{6}$$

Якщо це рівняння допускає два різних розв'язки N_1^* і N_2^*, відмінні від стаціонарних значень, то існує стаціонарний розв'язок із періодом 2.

Комп'ютерний аналіз рівняння (6) при $K = 10$, $r = 2,2$, $c = 0,5$ показав існування такого періодичного розв'язку: $N_1^* = 4,838006$, $N_2^* = 14,561492$.

Цей періодичний розв'язок стійкий, оскільки

$$\left| \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_1^*} \cdot \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_2^*} \right| < 1.$$

Крім періодичного розв'язку з $T = 2$ існують і два стаціонарних стани $N^* = 0,0632894$, $N^* = 9,77321$, але обидва вони нестійкі.

Графіки розв'язків (5) при $K = 10$, $r = 2,2$, $c = 0,5$ зображені на рис. 6.

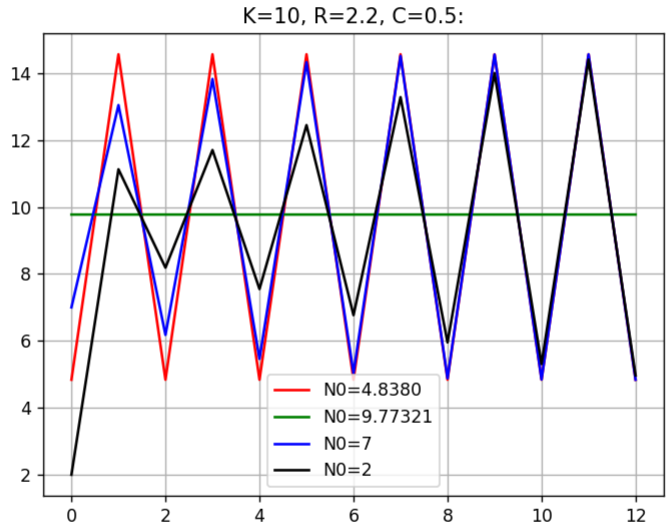

Рис. 6. Графік стійкого періодичного розв'язку з періодом $T = 2$ для рівняння (5)

Натомість при $r = 3$, $K = 10$, $c = 0,5$ існуючий періодичний розв'язок з періодом $T = 2$ ($N_1^* = 1,34045$, $N_2^* = 17,50897$) нестійкий, оскільки

$$\left| \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_1^*} \cdot \frac{dF}{dN}\bigg|_{N_2^*} \right| = 3,59 > 1.$$

Так же само нестійкі й стаціонарні розв'язки $N^* = 0,0264173$ і $N^* = 9,8346$.

Періодичні розв'язки з періодом $T = 3$ знаходяться із системи

$$\begin{aligned} N_t &= N_{t+2} \exp\left(r\left(1 - \frac{N_{t+2}}{K}\right)\right) - c, \\ N_{t+2} &= N_{t+1} \exp\left(r\left(1 - \frac{N_{t+1}}{K}\right)\right) - c, \\ N_{t+1} &= N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right) - c. \end{aligned} \tag{7}$$

Якщо система допускає три різні розв'язки $N_1^* = N_t$, $N_2^* = N_{t+1}$, $N_3^* = N_{t+2}$, відмінні від стаціонарних станів, то існує періодичний розв'язок із періодом $T = 3$.

Числовий аналіз системи (7) при $K = 10$, $r = 3,2$, $c = 0,4$ показав, що рівняння (5) має два періодичних розв'язки з періодом $T = 3$. Ці розв'язки задаються числами: $N_1^* = 6,177487$, $N_2^* = 20,591458$, $N_3^* = 0,294620$ і $N_1^* = 1,449938$, $N_2^* = 21,965970$, $N_3^* = 0,0773078$.

Знаходячи добуток похідних правої частини (5) в цих точках, встановлюємо, що ці розв'язки з періодом 3 нестійкі.

При існуванні періодичних розв'язків з періодом $T = 3$ згідно з теоремою Li Yorke [8] існують хаотичні розв'язки.

Стаціонарні розв'язки, які існують при цьому, теж нестійкі. Графіки розв'язків рівняння (5) при $K = 10$, $r = 3,2$, $c = 0,4$ наведені на рис. 7, а хаотичний розв'язок при $r = 3$ – на рис. 8.

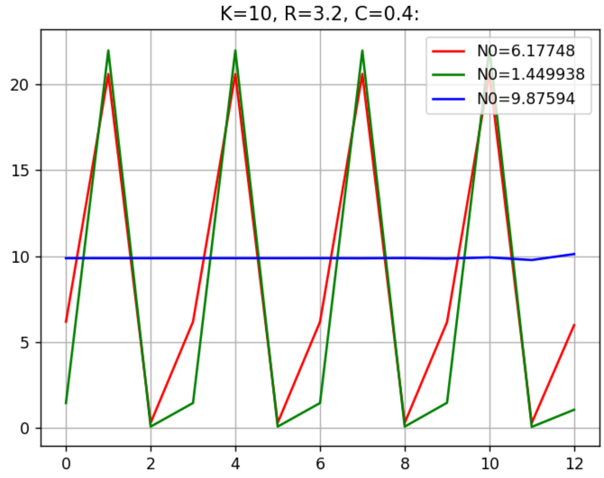

Рис. 7. Періодичні розв'язки рівняння (5) з періодом $T = 3$ і стаціонарний розв'язок

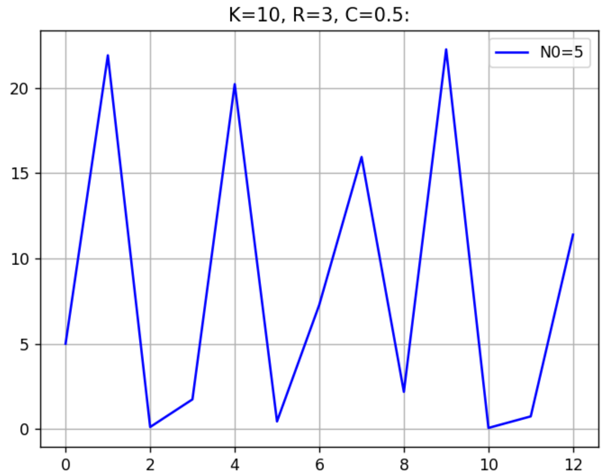

Рис. 8. Хаотичний розв'язок рівняння (5)

Список літератури

[**1**] Маценко В. Г. Математичне моделювання екологічних процесів : навч. посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т імені Юрія Федьковича, 2019. 376 с.

[**2**] Шарковський А. Н., Майстренко Ю. Н., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их применения. Киев : Наук. думка, 1986. 280 с.

[**3**] Ben G. Yu., Sleeman B.D. *On the discrete logistic model in biology.* Applicate Analysic, 1989. **33** (3-4). Pp. 215-231.

[**4**] Radwan G. R. *On some generalized discrete logistic maps.* Journal of Advanced Research, 2013. **4**. Pp. 163-171.

[**5**] Greenwell R. *The Ricker salmon model.* UMAP J. 1984. **5**. Pp. 337-359.

[**6**] Sacker R. G. *A note on periodic Ricker maps.* J. Difference equation Appl. 2007. **13**. Pp. 89-92.

[**7**] Шарковський А. Н. *Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя.* Украинский математический журнал, 1964. **XVI** (1). С. 61-71.

[**8**] Li T., Yorke I. *Period three implies chaos.* The American Mathematical Monthly, 1975. **82** (10). Pp. 985-992.

Список літератури

[1] Matsenko V. G. Mathematical modeling of ecological processes : study guide. Chernivtsi : Yury Fedkovich Chernivtsi National University, 2019. 376 p. (in Ukrainian)

[2] Sharkovskii A. N., Maistrenko Y. N., Romanenko E. Yu. Difference equations and their applications. Kyiv : Nauk. dumka, 1986. 280 p. (in Russian)

[3] Ben G. Yu., Sleeman B.D. *On the discrete logistic model in biology.* Applicate Analysic, 1989. **33** (3-4). Pp. 215-231.

[4] Radwan G. R. *On some generalized discrete logistic maps.* Journal of Advanced Research, 2013. **4**. Pp. 163-171.

[5] Greenwell R. *The Ricker salmon model.* UMAP J. 1984. **5**. Pp. 337-359.

[6] Sacker R. G. *A note on periodic Ricker maps.* J. Difference equation Appl. 2007. **13**. Pp. 89-92.

[7] Sharkovskii A. N. *Coexistence of cycles of continuous transformation straight into itself.* Ukrainian Mathematical Journal, 1964. **XVI** (1). P. 61-71. (in Russian)

[8] Li T., Yorke I. *Period three implies chaos.* The American Mathematical Monthly, 1975. **82** (10). Pp. 985-992.

Надійшло 15.11.2022

Matsenko V.G. *Modeling harvesting processes for populations with non-overlapping generations*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 165–175.

Difference equations are used in order to model the dynamics of populations with non-overlapping generations, since the growth of such populations occurs only at discrete points in time.

In the simplest case such equations have the form $N_{t+1} = F(N_t)$, where $N_t > 0$ is the population size at a moment of time t, and F is a smooth function.

Among such equations the discrete logistic equation and Ricker's equation are most often used in practice.

In the given paper, these equations are considered width taking into account an effect of harvesting, that is, the equations of the form below are studied $N_{t+1} = rN_t(1 - N_t) - c$ and $N_{t+1} = N_t \exp(r(1-N_t/K))-c$, where the parameters r, $K > 0$, $c > 0$ are harvesting intensity.

Positive equilibrium points and conditions for their stability for these equations were found. These kinds of states are often realized in nature.

For practice, periodic solutions are also important, especially with periods $T = 2(N_{t+2} = N_t)$ and $T = 3(N_{t+3} = N_t)$, since, with their existence, by Sharkovskii's theorem, one can do conclusions about the existence of periodic solutions of other periods.

For the discrete logistic equation in analytical form, the values that make up the periodic solution with period $T = 2$ were found. We used numerical methods in order to find solutions with period $T = 3$. For Ricker's model, the question of the existence of periodic solutions can be investigated by computer analysis only.

In the paper, a number of computer experiments were conducted in which periodic solutions were found and their stability was studied. For Ricker's model with harvesting, chaotic solutions were also found.

As we can see, the study of difference equations gives many unexpected results.

Мельничук Л.М.

Фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами та з операторами Бесселя різних порядків

Знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь другого порядку з коефіцієнтами при молодших похідних, які зростають на нескінченості за однією групою змінних, та з операторами Бесселя різних порядків за іншою групою змінних. Вивчено деякі властивості фундаментального розв'язку.

Ключові слова і фрази: параболічні рівняння, задача Коші, фундаментальний розв'язок, оператор Бесселя.

Україна, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *l.melnuchuk@chnu.edu.ua*

Теорія задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь другого порядку з обмеженими коефіцієнтами достатньо повно досліджена [1, 2], на відміну від таких рівнянь з необмеженими коефіцієнтами. Одним з напрямків досліджень професора С.Д. Івасишена та учнів його наукової школи є знаходження фундаментальних розв'язків та дослідження коректності задачі Коші для класів вироджених рівнянь, які є узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова і містять за основними змінними диференціальні вирази, параболічні за І.Г. Петровським та за С.Д. Ейдельманом (С.Д. Івасишен, Л.М. Андросова, І.П. Мединський, О.Г. Возняк, В.С. Дронь, В.В. Лаюк, Г.С. Пасічник та інші). Також досліджувалися параболічні за І.Г. Петровським рівняння і системи з оператором Бесселя (С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Т.М. Балабушенко, Л.М. Мельничук). Деякі результати цих досліджень наведені в [3–6, 8].

Зокрема, у статті [5] знайдено явний вигляд та встановлено властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку відносно функції $u = u(t, x, y)$

$$\partial_t u = \sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_l}(a_{jl}u) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u) + B_y u, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y > 0,$$

УДК 517.5, 519.21, 511.72
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A46, 26A21, 26A30.

де всі a_{jl} сталі, а матриця $(a_{jl})_{j,l=1}^n$ симетрична і додатно визначена; $B_y \equiv \partial_y^2 + \dfrac{2\nu+1}{y}\partial y$ – оператор Бесселя порядку $\nu \geq 0$. У статті [6] рівняння містить суму операторів Бесселя по змінних y_j однакового порядку ν.

У даній статті деякі вказані результати поширюються на клас рівнянь із зростаючими коефіцієнтами у молодших доданках, які містять оператори Бесселя по кальках змінних y_j різних порядків ν_j.

Нехай n, k, m – задані натуральні числа, $k \leq m$; $x' \equiv (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $x'' \equiv (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$, $x \equiv (x', x'')$, $y \equiv (y_1, \ldots, y_m) \subset \mathbb{R}_+^m$, де $\mathbb{R}_+^m := \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, y_j > 0, j \in \{1, \ldots, m\}\}$; $\mathbb{R}_+^{n+m} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$.

Розглянемо задачу Коші

$$\partial_t u(t,x,y) = a^2 \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u + b \sum_{j=1}^k \partial_{x_j}(x_j u) + p \sum_{j=1}^m B_{y_j} u,$$

$$t > 0, (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}, \tag{1}$$

$$u(t,x,y)\Big|_{t=0} = \varphi(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}, \tag{2}$$

$$\partial_{y_j} u(t,x,y)\Big|_{y_j=0} = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y_l > 0 (l \neq j), j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{3}$$

де a, b, p $(p > 0)$ – задані дійсні числа, $B_{y_j} \equiv \partial_{y_j}^2 + \dfrac{2\nu_j + 1}{y_j}\partial_{y_j}$ – оператори Бесселя за змінними y_j порядків $\nu_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Нехай рівняння (1) є параболічним. Воно має необмежені при $|x| \to \infty$ коефіцієнти біля перших похідних $\partial_{x_j} u$ та необмежені в околі точки $y = 0$ коефіцієнти при похідних $\partial_{y_j} u$.

Позначимо $|\nu| := \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m$. Визначимо обернене перетворення Фур'є-Бесселя функції w: $\mathbb{R}_+^{n+m} \to \mathbb{R}$ рівністю

$$F_{\sigma \to x}^{-1} F_{B,\eta \to y}^{-1}[w(\sigma,\eta)] \equiv F_{\sigma \to x}^{-1}[F_{B,\eta \to y}^{-1}[w(\sigma,\eta)]],$$

де

$$F_{\sigma \to x}^{-1}[f(\sigma)] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)} f(\sigma) d\sigma, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$F_{B,\eta \to y}^{-1}[f(\eta)] = \frac{1}{2^{2|\nu|} \prod_{l=1}^m \Gamma^2(\nu_l + 1)} \int_{\mathbb{R}_+^m} f(\eta) J_\eta^y d\eta, y \in \mathbb{R}_+^m,$$

де i – уявна одиниця; $(x,\sigma) = \sum_{j=1}^n x_j \sigma_j$; $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ – гама-функція Ейлера; $J_\eta^y := \prod_{l=1}^m j_{\nu_l}(\eta_l y_l) \eta_l^{2\nu_l+1}$; $j_{\nu_l}(z) \equiv 2^{\nu_l} \Gamma(\nu_l + 1) z^{-\nu_l} J_{\nu_l}(z)$ – нормована функція Бесселя, а $J_{\nu_l}(z)$ – функція Бесселя першого роду порядку ν_l [7].

Пряме перетворення Фур'є-Бесселя функції w таке:

$$F_{x\to\sigma}F_{B,y\to\eta}[w(x,y)] \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{-i(x,\sigma)}w(x,y)J_y^\eta dxdy.$$

Розв'язок задачі Коші (1) – (3) шукаємо у вигляді оберненого перетворення Фур'є-Бесселя деякої функції v

$$u(t,x,y) = F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[v(t,\sigma,\eta)] = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y d\sigma d\eta,$$

$$t>0, (x,y)\in\mathbb{R}_+^{n+n}, \tag{4}$$

де $A(n,\nu) := \dfrac{1}{(2\pi)^n 2^{2|\nu|}}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma^2(\nu_l+1)$.

Вважаючи, що всі операції законні, знайдемо похідні:

$$\partial_t u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}\partial_t v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y d\sigma d\eta; \tag{5}$$

$$\partial^2_{x_j} u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} (-\sigma_j^2)e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y d\sigma d\eta; \tag{6}$$

$$\partial_{x_j}(x_j u) = u + x_j\partial_{x_j}u = u + A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} ix_j\sigma_j e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y d\sigma d\eta =$$

$$= u + A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} \sigma_j\partial_{\sigma_j}(e^{i(x,\sigma)})v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y d\sigma d\eta.$$

Інтегруючи частинами інтеграл по σ_j і вважаючи v такою, що $\lim\limits_{\sigma_j\to\infty} e^{i(x,\sigma)}\sigma_j v = 0$ (наприклад, фінітною), одержимо

$$\partial_{x_j}(x_j u) = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}(-\sigma_j)\partial_{\sigma_j}vJ_\eta^y d\sigma d\eta. \tag{7}$$

$$B_{y_j}u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)B_{y_j}[J_\eta^y]d\sigma d\eta = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)\times$$

$$\times\Big(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m} j_{\nu_l}(\eta_l y_l)\eta_l^{2\nu_l+1}\Big)B_{y_j}[j_{\nu_j}(\eta_j y_j)]\eta_j^{2\nu_j+1}d\sigma d\eta.$$

Оскільки за [7] $B_y[j_\nu(\eta y)] = -\eta^2 j_\nu(\eta y)$, то

$$B_{y_j}u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y(-\eta_j^2)d\sigma d\eta. \tag{8}$$

Підставивши (5)–(8) в (1) і прирівнявши підінтегральні функції, одержимо рівняння для v

$$\partial_t v(t,\sigma,\eta) + b\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\partial_{\sigma_j}v(t,\sigma,\eta) = (-a^2|\sigma|^2 - p|\eta|^2)v(t,\sigma,\eta), t>0, (\sigma,\eta)\in\mathbb{R}_+^{n+m}, \qquad (9)$$

де $|\sigma|^2 = \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2$, $|\eta|^2 = \sum_{j=1}^{m}\eta_j^2$.

Підставимо (4) в початкову умову (2):

$$u(t,x,y)|_{t=0} = F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[v(0,\sigma,\eta)] = \varphi(x,y), (x,y)\in\mathbb{R}_+^{n+m}.$$

Нехай початкова функція φ така, що для неї існує перетворення Фур'є-Бесселя Ψ. Тоді маємо

$$v(t,\sigma,\eta)|_{t=0} = F_{x\to\sigma}F_{B,y\to\eta}[\varphi(x,y)] \equiv \Psi(\sigma,\eta), (\sigma,\eta)\in\mathbb{R}_+^{n+m}. \qquad (10)$$

Умови (3) виконуються, бо за властивістю нормованої функції Бесселя з [7]: $\partial_{y_l}j_{\nu_l}(\eta_l y_l) = 0$, $l\in\{1,\dots,m\}$.

Задачу (9), (10) для рівняння з частинними похідними першого порядку розв'яжемо методом характеристик. Відповідна система характеристичних рівнянь така:

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\sigma_1}{b\sigma_1} = \dots = \frac{d\sigma_k}{b\sigma_k} = \frac{d\sigma_{k+1}}{0} = \dots =$$

$$= \frac{d\sigma_n}{0} = \frac{d\eta_1}{0} = \dots = \frac{d\eta_m}{0} = \frac{dv}{(-a^2|\sigma|^2 - p|\eta|^2)v}. \qquad (11)$$

Розв'яжемо цю систему. Рівняння $bdt = \dfrac{d\sigma_j}{\sigma_j}$ мають розв'язки $\sigma_j = C_j e^{bt}$, $j\in\{1,\cdots k\}$; рівняння $d\sigma_j = 0$ та $d\eta_j = 0$ мають розв'язки відповідно $\sigma_j = C_j$, $j\in\{k+1,\dots,n\}$, та $\eta_j = \hat{C}_j$, $j\in\{1,\dots,m\}$, всі сталі C_j, $\hat{C}_j$ – довільні. Щоб розв'язати останнє рівняння системи (11), тобто рівняння

$$(-a^2|\sigma|^2 - p|\eta|^2)dt = \frac{dv}{v},$$

підставимо знайдені вище значення змінних σ_j та η_j:

$$(-a^2(C_1^2+\dots+C_k^2)e^{2bt} - a^2(C_{k+1}^2+\dots+C_n^2) - p(\hat{C}_1^2+\dots+\hat{C}_m^2))dt = \frac{dv}{v}.$$

Зінтегрувавши це рівняння, одержимо

$$-\frac{a^2}{2b}(C_1^2+\dots+C_k^2)e^{2bt} - a^2(C_{k+1}^2+\dots+C_n^2)t - p(\hat{C}_1^2+\dots+\hat{C}_m^2)t = \ln\left|\frac{v}{C_{n+1}}\right|.$$

Підставляючи сюди $C_j = \sigma_j e^{-bt}$, $j\in\{1,\dots,k\}$, $C_j = \sigma_j$, $j\in\{k+1,\dots,n\}$, $\hat{C}_j = \eta_j$, $j\in\{1,\dots,m\}$, одержимо

$$v = C_{n+1}\exp\Big\{-\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2 - a^2|\sigma''|^2 t - p|\eta|^2 t\Big\},$$

де $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, $\sigma'' = (\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$.

Отже, перші інтеграли системи (11) такі:

$$\begin{cases} C_j = \sigma_j e^{-bt}, \ \ j \in \{1, \dots, k\}, \\ C_j = \sigma_j, \ \ j \in \{k+1, \dots, n\}, \\ \hat{C}_j = \eta_j, \ \ j \in \{1, \dots, m\}, \\ C_{n+1} = v \exp\Big\{ \dfrac{a^2}{2b} |\sigma'|^2 + a^2 |\sigma''|^2 t + p|\eta|^2 t \Big\}. \end{cases} \tag{12}$$

Задовольнимо умову (10):

$$v|_{t=0} = C_{n+1} \exp\Big\{ -\frac{a^2}{2b} |\sigma'|^2 \Big\} = \Psi(\sigma, \eta).$$

Оскільки з (12) при $t = 0$ маємо, що $\sigma_j = C_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\eta_j = \hat{C}_j$, $j \in \{1, \dots, m\}$, то з останньої рівності одержимо

$$\Psi(C_1, \dots, C_n, \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_m) = C_{n+1} \exp\Big\{ -\frac{a^2}{2b} (C_1^2 + \dots + C_k^2) \Big\}.$$

Підставивши тут замість сталих вирази з (12), одержимо

$$v(t, \sigma, \eta) = \exp\Big\{ -\frac{a^2}{2b} |\sigma'|^2 (1 - e^{-2bt}) - a^2 |\sigma''|^2 t - p|\eta|^2 t \Big\} \Psi(\sigma' e^{-bt}, \sigma'', \eta) \equiv$$

$$\equiv W(t, \sigma, \eta) \Psi(\sigma' e^{-bt}, \sigma'', \eta), t > 0, (\sigma, \eta) \in \mathbb{R}_+^{n+m}, \tag{13}$$

– розв'язок задачі (9), (10).

Далі будемо використовувати таку властивість оберненого перетворення Фур'є-Бесселя:

$$F^{-1}_{\sigma \to x} F^{-1}_{B, \eta \to y} [f_1 \cdot f_2] = F^{-1}_{\sigma \to x} F^{-1}_{B, \eta \to y} [f_1] \otimes F^{-1}_{\sigma \to x} F^{-1}_{B, \eta \to y} [f_2], \tag{14}$$

де згортка $\otimes$ визначається рівністю

$$(g_1 \otimes g_2)(x, y) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} T_y^{\eta} [g_1(x - \sigma, y)] g_2(\sigma, \eta) \prod_{j=1}^{m} \eta_j^{2\nu_j + 1} d\sigma d\eta, \tag{15}$$

а оператор узагальненого зсуву визначимо як суперпозицію таких операторів по кожній компоненті змінної y, тобто

$$T_y^{\eta} [f(y)] \equiv T_{y_1}^{\eta_1} [T_{y_2}^{\eta_2} [\dots [T_{y_m}^{\eta_m} [f(y)]] \dots]], \{y, \eta\} \subset \mathbb{R}_+^m,$$

тут

$$T_{y_j}^{\eta_j} [f_j(y_j)] \equiv \frac{\Gamma(\nu_j + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu_j + \frac{1}{2})} \int\limits_0^{\pi} f_j\Big(\sqrt{y_j^2 + \eta_j^2 - 2 y_j \eta_j \cos\varphi}\Big) \sin^{2\nu_j} \varphi d\varphi.$$

Зокрема, якщо $f(y) = \prod\limits_{j=1}^{m} f_j(y_j)$, то $T_y^{\eta}[f(y)] = \prod\limits_{j=1}^{m} T_{y_j}^{\eta_j} [f_j(y_j)]$.

Щоб знайти розв'язок u задачі (1)– (3), підставимо (13) у (4). На підставі (15) одержимо

$$u(t,x,y) = F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[W(t,\sigma,\eta)] \otimes F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[\Psi(\sigma' e^{-bt},\sigma'',\eta)]. \tag{16}$$

Позначимо

$$F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[W(t,\sigma,\eta)] = F^{-1}_{\sigma\to x}\Big[\exp\Big\{-\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2(1-e^{-2bt}) - a^2|\sigma''|^2 t\Big\}\Big]\times$$

$$\times F^{-1}_{B,\eta\to y}[\exp\{-p|\eta|^2 t\}] \equiv W_1(t,x)W_2(t,y). \tag{17}$$

Для обчислення W_1 використаємо інтеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$. Маємо

$$W_1(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{i(x,\sigma) - \frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2(1-e^{-2bt}) - a^2|\sigma''|^2 t\Big\}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\Big(\prod_{j=1}^{k}\exp\Big\{-\frac{bx_j^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\Big(\frac{a\sqrt{1-e^{-2bt}}}{\sqrt{2b}}\sigma_j - i\frac{\sqrt{2b}x_j}{2a\sqrt{1-e^{-2bt}}}\Big)^2\Big\}d\sigma_j\Big)\times$$

$$\times\Big(\prod_{j=k+1}^{n}\exp\Big\{-\frac{x_j^2}{4a^2 t}\Big\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\Big(a\sqrt{t}\sigma_j - \frac{ix_j}{2a\sqrt{t}}\Big)^2\Big\}d\sigma_j\Big) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\exp\Big\{-\frac{b|x'|^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}\Big(\frac{\sqrt{2b\pi}}{a\sqrt{1-e^{-2bt}}}\Big)^k\exp\Big\{-\frac{|x''|^2}{4a^2t}\Big\}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\Big)^{n-k} =$$

$$= \frac{(\sqrt{b})^k}{(a\sqrt{2\pi})^k(\sqrt{1-e^{-2bt}})^k}\exp\Big\{-\frac{b|x'|^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^{n-k}}\exp\Big\{-\frac{|x''|^2}{4a^2t}\Big\}. \tag{18}$$

Обчислимо W_2, використавши відомий інтеграл Вебера з [7], записаний для нормованої функції Бесселя:

$$\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-\eta^2 t\}j_\nu(\eta y)\eta^{2\nu+1}d\eta = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2t^{\nu+1}}\exp\Big\{-\frac{y^2}{4t}\Big\}.$$

Тоді одержимо

$$W_2(t,y) = \frac{1}{2^{2|\nu|}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma^2(\nu_l+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}\exp\{-p|\eta|^2t\}\prod_{l=1}^{m}j_{\nu_l}(\eta_l y_l)\eta_l^{2\nu_l+1}d\eta =$$

$$= \frac{1}{2^{2|\nu|}}\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{\Gamma^2(\nu_l+1)}\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-p\eta_l^2 t\}j_{\nu_l}(\eta_l y_l)\eta_l^{2\nu_l+1}d\eta_l =$$

$$= \frac{1}{2^{2|\nu|}}\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{\Gamma^2(\nu_l+1)}\frac{\Gamma(\nu_l+1)}{2(pt)^{\nu_l+1}}\exp\Big\{-\frac{y_l^2}{4pt}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2^{2|\nu|+m}(pt)^{|\nu|+m}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma(\nu_l+1)}\exp\Big\{-\frac{|y|^2}{4pt}\Big\}. \tag{19}$$

Тепер обчислимо другий елемент у згортці (16), здійснивши в інтегралі по σ заміну $\beta' = \sigma' e^{-bt}$, $\beta'' = \sigma''$:

$$F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[\Psi(\sigma' e^{-bt},\sigma'',\eta)] = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x',\beta' e^{bt})+i(x'',\beta'')\}\Psi(\beta,\eta)e^{kbt}d\beta\Big)J^\eta_y d\eta =$$

$$= e^{kbt}\varphi(x' e^{bt},x'',y), t>0, (x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}_+. \tag{20}$$

Підставивши (17) – (20) у (16) і урахувавши означення згортки (15), одержимо

$$u(t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} W_1(t,x-\sigma)T^\eta_y[W_2(t,y)]e^{kbt}\varphi(\sigma' e^{bt},\sigma'',\eta)\prod_{l=1}^{m}\eta_l^{2\nu_l+1}d\sigma d\eta.$$

Здійснимо в інтегралах по σ заміну $\xi' = \sigma' e^{bt}$, $\xi'' = \sigma''$, тоді $d\sigma = e^{-kbt}d\xi$, тому маємо розв'язок задачі (1) – (3):

$$u(t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} W_1(t,x'-\xi' e^{-bt},x''-\xi'')T^\eta_y[W_2(t,y)]\varphi(\xi,\eta)\prod_{l=1}^{m}\eta_l^{2\nu_l+1}d\xi d\eta \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} G(t,x,y;0,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\prod_{l=1}^{m}\eta_l^{2\nu_l+1}d\xi d\eta, t>0, (x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}_+, \tag{21}$$

де

$$G(t,x,y;0,\xi,\eta) \equiv G_1(t,x',\xi')G_2(t,x'',\xi'')G_3(t,y,\eta), \tag{22}$$

$$G_1(t,x',\xi') \equiv \frac{\sqrt{b^k}}{(a\sqrt{2\pi})^k(\sqrt{1-e^{-2bt}})^k}\exp\Big\{-\frac{b|x'-\xi' e^{-bt}|^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}, t>0, \{x',\xi'\}\subset\mathbb{R}^k, \tag{23}$$

$$G_2(t,x'',\xi'') \equiv \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^{n-k}}\exp\Big\{-\frac{|x''-\xi''|^2}{4a^2 t}\Big\}, t>0, \{x'',\xi''\}\subset\mathbb{R}^{n-k}, \tag{24}$$

$$G_3(t,y,\eta) \equiv \frac{1}{2^{2|\nu|+m}(pt)^{|\nu|+m}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma(\nu_l+1)}T^\eta_y\Big[\exp\Big\{-\frac{|y|^2}{4pt}\Big\}\Big], t>0, \{y,\eta\}\subset\mathbb{R}^m_+. \tag{25}$$

Обчисливши, як у [8], оператор узагальненого зсуву

$$T^\eta_y\Big[\exp\Big\{-\frac{|y|^2}{4pt}\Big\}\Big] = \prod_{l=1}^{m}T^{\eta_l}_{y_l}\Big[\exp\Big\{-\frac{y_l^2}{4pt}\Big\}\Big] = \prod_{l=1}^{m}\exp\Big\{-\frac{y_l^2+\eta_l^2}{4pt}\Big\}j_{\nu_l}\Big(-i\frac{\eta_l y_l}{2pt}\Big) =$$

$$= \exp\Big\{-\frac{|y|^2+|\eta|^2}{4pt}\Big\}\prod_{l=1}^{m}j_{\nu_l}\Big(-i\frac{\eta_l y_l}{2pt}\Big),$$

одержимо інше зображення для G_3:

$$G_3(t,y,\eta) = \frac{1}{2^{2|\nu|+m}(pt)^{|\nu|+m}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma(\nu_l+1)}\exp\Big\{-\frac{|y|^2+|\eta|^2}{4pt}\Big\}\prod_{l=1}^{m} j_{\nu_l}\Big(-i\frac{\eta_l y_l}{2pt}\Big).$$

Припускаючи, що початкова функція φ – неперервна і обмежена на $\mathbb{R}_+^{n+m}$, можна переконатися, що (21) справді є розв'язком задачі Коші (1) – (3), тобто що G є фундаментальним розв'язком цієї задачі. Це також випливає з того, що G_1, G_2, G_3 є фундаментальним розв'язком задач Коші відповідно для рівнянь

$$\partial_t u(t,x') = a^2\sum_{j=1}^{k}\partial_{x_j}^2 u(t,x') + b\sum_{j=1}^{k}\partial_{x_j}(x_j u(t,x')), t>0, x'\in\mathbb{R}^k,$$

$$\partial_t u(t,x'') = a^2\sum_{j=k+1}^{n}\partial_{x_j}^2 u(t,x''), t>0, x''\in\mathbb{R}^{n-k},$$

$$\partial_t u(t,y) = p\sum_{j=1}^{m} B_{y_j}u(t,y), t>0, y\in\mathbb{R}_+^m.$$

Із зображень (22) – (25) випливають такі оцінки похідних фундаментального розв'язку G:

$$|\partial_x^s G(t,x,y;0,\xi,\eta)| \le C_s(1-e^{-2bt})^{-\frac{k+|s'|}{2}}t^{-\frac{n-k+|s''|}{2}-|\nu|-m}\times$$
$$\times\exp\Big\{-c_1\frac{|x'-\xi' e^{-bt}|^2}{1-e^{-2bt}} - c_2\frac{|x''-\xi''|^2}{t} - c_3\frac{|y-\eta|^2}{t}\Big\}T_y^\eta\Big[\exp\Big\{-\Big(\frac{1}{4}-c_3\Big)\frac{y^2}{pt}\Big\}\Big],$$

де $s=(s',s'')$, $s'=(s_1,\dots,s_k)$, $s''=(s_{k+1},\dots,s_n)$, $|s'|=s_1+\dots+s_k$, $|s''|=s_{k+1}+\dots+s_n$, C_s, c_1, c_2, c_3 – додатні сталі, $c_3<1/4$.

Безпосередньо обчислюючи інтеграли за допомогою (22) – (25), одержуємо властивість

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} G(t,x,y;0,\xi,\eta)\prod_{l=1}^{m}\eta_l^{2\nu_l+1}d\xi d\eta = e^{kbt}.$$

Список літератури

[**1**] Eidelman S.D. *The parabolic systems.* - M.: Nauka, 1964. – 443 p. (in Ukrainian)

[**2**] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differentsal and pseudo-differentsal equations of parabolic type.* – Basel: Birkhaüser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152).

[**3**] Ivasyshen S.D., Medynsky I.P. *Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I* // J. Math. Sci. – 2020. – 246, №2. – P. 121–151.

[**4**] Babych O.O., Ivasyshen S.D., Pasichnyk G.S. *The fundamental solution of the Cauchy problem for degenerate parabolic equation with increasing coefficients of the group of younger members* // Nauk. visn. Chernivetskogo natsional'nogo un-tu imeni Yuriya Fed'kovycha. Ser. matematyka: Zb. nauk. pr. – 1, No. 1-2. – Chernivtsi: Chernivetskiy nats. un, 2011 – P. 13-24. (in Ukrainian)

[**5**] Balabushenko T.M., Ivasyshen S.D., Lavrenvhuk V.P., Melnychuk L.M. *The fundamental solution of the Cauchy problem for some parabolic equations with Bessel operator and increasing coefficients* // Nauk. visn. Chernivetskogo natsional'nogo un-tu: Zb. nauk. pr. Vyp. 288. Matematyka. – Chernivtsi: Ruta, 2006. – P. 5–11. (in Ukrainian)

[**6**] Melnychuk L.M. *Structure and properties of the fundamental solution of the Cauchy problem for parabolic equation with Bessel operator.* Bukivynskyy matematychnyy zhurnal. 2016. – T. 4, No. 3–4. – Chernivtsi, 2016. – 109–112. (in Ukrainian)

[**7**] Korenev B.G. *Introduction to the Bessel function theory.* – M.: Nauka, 1971. – 287 c. (in Russian)

[**8**] Ivasyshyn L.M. *Integral representation and sets of initial values of solutions of parabolic equations with Bessel operator and increasing coefficients.* – Chernovits. un-t, Chernovtsy, 1992. – 62 p. – Dep. v UkINTEI 26.10.92, No 1731 – Uk92. (in Russian)

Надійшло 19.12.2022

Melnychuk L.M. *Fundamental solution of the Cauchy problem for parabolic equation of the second order with increasing coefficients and with Bessel operators of different orders*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 176–184.

The theory of the Cauchy problem for uniformly parabolic equations of the second order with limited coefficients is sufficiently fully investigated, for example, in the works of S.D. Eidelman and S.D. Ivasyshen, in contrast to such equations with unlimited coefficients. One of the areas of research of Professor S.D. Ivasyshen and students of his scientific school are finding fundamental solutions and investigating the correctness of the Cauchy problem for classes of degenerate equations, which are generalizations of the classical Kolmogorov equation of diffusion with inertia and contain for the main variables differential expressions, parabolic according to I.G. Petrovskyi and according to S.D. Eidelman (S.D. Ivasyshen, L.M. Androsova, I.P. Medynskyi, O.G. Wozniak, V.S. Dron, V.V. Layuk, G.S. Pasichnyk and others). Parabolic Petrovskii equations with the Bessel operator were also studied (S.D. Ivasyshen, V.P. Lavrenchuk, T.M. Balabushenko, L.M. Melnychuk).

The article considers a parabolic equation of the second order with increasing coefficients and Bessel operators. In this equation, the some of coefficients for the lower derivatives of one group of spatial variables $x \in \mathbb{R}^n$ are components of these variables, therefore, grow to infinity. In addition, the equation contains Bessel operators of different orders in another group of spatial variables $y \in \mathbb{R}^m_+$, due to which the coefficients in the first derivatives of these variables are unbounded around the point $y = 0$.

The paper defines a modified Fourier-Bessel transform that takes into account different orders of Bessel operators on different variables. With the help of this transformation and the method of characteristics, the solution of the Cauchy problem of the specified equation is found in the form of the Poisson integral, and its kernel, which is the fundamental solution of the Cauchy problem, is written out in an explicit form. Some properties of the found fundamental solution, in particular, estimates of its derivatives, have been established. They will be used to establish the correctness of the Cauchy problem.

Михайлюк В.В. [1,2]

Залежність від зліченної кількості координат нарізно неперервних функцій трьох компактних змінних

Одержано необхідні і достатні умови залежності від зліченної кількості координат для функцій трьох змінних, кожна з яких є добутком компактних просторів Кемпістого.

Ключові слова і фрази: нарізно неперервні функції, залежність від зліченної кількості координат, простори Кемпістого, компактні простори.

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
[2] Університет Яна Кохановського в Кельцах, Польща
e-mail: *v.mykhaylyuk@chnu.edu.ua*

1 Вступ

Залежність неперервних відображень на добутках від певної кількості координат інтенсивно вивчались математиками середини XX століття (І. Мібу, С. Мазур, Г. Корсон і Дж. Ізбелл, К. Росс і А. Стоун, Р. Енґелькінґ, А. Міщенко, Н. Нобл і М. Ульмер) і стала зручним інструментом для досліджень властивостей неперервних відображень. Найбільш загальні результати у цьому напрямку були отримані у роботі [5], де, зокрема, були одержані необхідні і достатні умови залежності нарізно неперервних функцій на добутках від певної кількості координат.

Аналогічні питання залежності для нарізно неперервних відображень впродовж кількох десятиліть залишались поза увагою дослідників питань теорії нарізно неперервних відображень. Починаючи з роботи [8] залежність нарізно неперервних функцій від певної кількості координат стала предметом досліджень у Чернівецькому університеті і для функцій двох змінних найзагальніші результати були одержані в [10]. Слід зауважити, що, зазвичай у багатьох задачах теорії нарізно неперервних відображень перехід від двох змінних до трьох змінних містить значні труднощі. Залежність від певної кількості координат нарізно неперервних функцій трьох і більше змінних вивчалась в роботі [7], де були отримані необхідні і достатні умови лише у випадку метризовності всіх множників, що залишає великий простір для подальших досліджень.

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08, 54C30, 54D30.

У даній роботі ми вивчатимемо залежність від зліченної кількості координат нарізно неперервних функцій багатьох змінних, які є добутками компактних просторів, і одержимо необхідні і достатні умови такої залежності для функцій трьох змінних, кожна з яких є добутком компактних просторів Кемпістого.

2 Необхідні умови залежності

Спочатку означимо деякі поняття і введемо позначення.

Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, Y – множина і $f : X \to Y$ – відображення. Казатимемо, що відображення f *зосереджене на множині* $T \subseteq S$, якщо $f(x') = f(x'')$, як тільки $x', x'' \in X$ і $x'|_T = x''|_T$. Якщо множина T – не більш, ніж зліченна, то кажуть, що f *залежить від зліченної кількості координат*.

Нехай $X_1, \dots, X_{n-1}, Y$ – множини, $(P_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X_n = \prod\limits_{s\in S} P_s$ і $f : X_1 \times \dots \times X_n \to Y$ – відображення. Кажемо, що відображення f *зосереджене на множині* $T \subseteq S$ *відносно n-тої змінної*, якщо

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x''_n)$$

для довільних $x_1 \in X_1, \dots, x_{n-1} \in X_{n-1}$ і $x'_n, x''_n \in X_n$ з $x'_n|_T = x''_n|_T$. Якщо множина T – не більш, ніж зліченна, то кажемо, що f *залежить від зліченної кількості координат відносно n-тої змінної*. Аналогічно вводиться поняття залежності від зліченної кількості координат відносно i-тої змінної, де $1 \le i \le n-1$.

Сім'ю множин $(A_s : s \in S)$ називатимемо *скінченною*, якщо множина

$$\{s \in S : A_s \neq \varnothing\}$$

є скінченною.

Для довільних підмножини A добутку $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$, індекса $i \in \{1, \dots, n\}$ і точки

$$p = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^{i-1} X_k \times \prod_{k=i+1}^{n} X_k$$

покладемо

$$A_p^{(i)} = \{x \in X_i : (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A\}.$$

Сім'ю множин $(A_s : s \in S)$ в добутку $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ топологічних просторів X_k називатимемо *(локально) скінченною відносно i-тої змінної*, якщо для довільної точки

$$p = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^{i-1} X_k \times \prod_{k=i+1}^{n} X_k$$

сім'я $(B_s : s \in S)$ множин $B_s = (A_s)_p^{(i)}$ є (локально) скінченною в просторі X_i. Сім'ю $(A_s : s \in S)$ в добутку $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$, яка є (локально) скінченною відносно кожної змінної називатимемо *нарізно (локально) скінченною*. Зрозуміло, що кожна нарізно скінченна сім'я множин є нарізно локально скінченною.

Для топологічного простору X і функції $f : X \to \mathbb{R}$ через $\operatorname{supp} f$ ми позначаємо множину

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\},$$

яка називається *носієм* функції f.

Для базисної відкритої множини $U = \prod\limits_{s\in S} U_s$ в топологічному добутку $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ через $R(U)$ ми позначаємо скінченну множину $\{s \in S : U_s \neq X_s\}$. Далі, якщо $B \subseteq S$, то через $U|_B$ позначатимемо множину $\prod\limits_{s\in B} U_s$ в добутку $\prod\limits_{s\in B} X_s$.

Топологічний простір X називатимемо *нетривіальним*, якщо $|X| \geq 2$.

Твердження 1. *Нехай X – добуток сім'ї $(X_s : s \in S)$ цілком регулярних просторів X_s, $t \in S$, простір X_t – нетривіальний і U – непорожня базисна відкрита множина в просторі X. Тоді і снує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що* $\operatorname{supp} f \subseteq U$, *функція f зосереджена на множині $R(U) \cup \{t\}$ і f не зосереджена на множині $S \setminus \{t\}$.*

Доведення. Візьмемо довільну неперервну функцію $g : X \to \mathbb{R}$ таку, що $\varnothing \neq \operatorname{supp} g \subseteq U$ і f зосереджена на множині $R(U)$. Якщо g не зосереджена на множині $S \setminus \{t\}$, то покладемо $f = g$.

Нехай функція g зосереджена на множині $S \setminus \{t\}$. Візьмемо довільну неперервну несталу функцію $\varphi : X_t \to \mathbb{R}$ і розглянемо неперервну функцію $f : X \to \mathbb{R}$,

$$f((x_s)_{s\in S}) = g((x_s)_{s\in S}) \cdot \varphi(x_t).$$

Зрозуміло, що f зосереджена на множині $R(U) \cup \{t\}$. Покажемо, що f не зосереджена на множині $S \setminus \{t\}$. Візьмемо довільну точку $x = (x_s)_{s\in S} \in X$ таку, що $g(x) \neq 0$, а також виберемо точки $a, b \in X_t$ такі, що $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Розглянемо точки $y, z \in X$, які означаються наступним чином:

$$y(s) = \begin{cases} x(s), \text{ якщо } & s \neq t; \\ a, \text{ якщо } & s = t, \end{cases} \qquad \text{і} \qquad z(s) = \begin{cases} x(s), \text{ якщо } & s \neq t; \\ b, \text{ якщо } & s = t. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $y|_{S\setminus\{t\}} = x|_{S\setminus\{t\}} = z|_{S\setminus\{t\}}$ і, зокрема, $g(y) = g(z) = g(x) \neq 0$. Крім того,

$$f(y) - f(z) = g(x)(\varphi(a) - \varphi(b)) \neq 0.$$

□

На завершальному етапі побудов ми будемо використовувати наступний допоміжний факт.

Твердження 2. *Нехай $(X_k)_{k=1}^n$ – сім'я топологічних просторів X_k,*

$$(f_{1,s} : s \in S), \ \ldots \ , (f_{n,s} : s \in S)$$

– сім'ї неперервних функцій $f_{k,s}: X_k \to \mathbb{R}$ такі, що сім'я $(U_s : s \in S)$ множин

$$U_s = \operatorname{supp} f_{1,s} \times \cdots \times \operatorname{supp} f_{n,s}$$

є нарізно локально скінченною в просторі $X = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$. Тоді функція $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$, означена формулою

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s \in S} \prod_{k=1}^{n} f_{k,s}(x_k),$$

є нарізно неперервною.

Доведення. Зафіксуємо індекс $i \in \{1, \ldots, n\}$ і точку

$$p = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \prod_{k=1}^{i-1} X_k \times \prod_{k=i+1}^{n} X_k.$$

Оскільки сім'я $(V_s : s \in S)$ множин $V_s = (U_s)_p^{(i)}$ є локально скінченною в просторі X_i, то функція $g : X_i \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

є непереорвною. Отже, функція f є неперервною відносно i-тої змінної. □

Нам буде потрібний наступний допоміжний результат, який традиційно використовується при дослідженні залежності відображень від зліченної кількості координат (дивись [1, с. 185], [2, лема VII] і [8, лема 10]).

Твердження 3 (Лема Шаніна)**.** *Нехай I – незліченна множина і $(A_i : i \in I)$ – сім'я скінченних множин. Тоді існують скінченна множина B і незліченна множина $J \subseteq I$ такі, що $A_i \cap A_j = B$ для довільних різних $i, j \in J$.*

Необхідні умови залежності нарізно неперервних функцій від зліченної кількості координат дає наступний результат.

Теорема 1. *Нехай $X_1, \ldots, X_{n-1}$ – цілком регулярні простори, X_n – добуток сім'ї $(Y_t : t \in T)$ цілком регулярних нетривіальних просторів Y_t, множина T – незліченна і $(G_i : i \in I)$ – незліченна нарізно локально скінченна сім'я відкритих непорожніх множин $G_i \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$, яка не залежить від зліченної кількості координат відносно n-тої змінної.*

Доведення. Для кожного $i \in I$ виберемо функціонально відкриті непорожні множини $U_{1,i}, \ldots, U_{n-1,i}$ в цілком регулярних просторах $X_1, \ldots, X_{n-1}$ відповідно, а також базисну відкриту множину $U_{n,i}$ в просторі X_n так, що

$$U_{1,i} \times \cdots \times U_{n,i} \subseteq G_i.$$

До сім'ї $(A_i : i \in I)$ скінченних множин $A_i = R(U_{n,i})$ застосуємо твердження 3 і знайдемо номер $n \in \mathbb{N}$, скінченну множину $B \subseteq T$ і множину $J \subseteq I$ потужності $\aleph_1$ такі, що всі множини A_i є n-елементними і $A_i \cap A_j = B$ для довільних різних $i, j \in J$.

Зауважимо, що існує сім'я $(t_j : j \in J)$ різних індексів $t_j \in T \setminus B$ така, що

$$(A_i \cup \{t_i\}) \cap (A_j \cup \{t_j\}) = B$$

для довільних різних $i, j \in J$. Справді, якщо $|B| < n$, то $A_j \setminus B \neq \varnothing$ і достатньо взяти довільну точку $t_j \in A_j \setminus B$ для кожного $j \in J$. Якщо ж $|B| = n$, тобто $A_j = B$ для кожного $j \in J$, то достатньо вибрати довільну сім'ю $(t_j : j \in J)$ різних індексів $t_j \in T \setminus B$.

Покладемо $S = \{t_j : j \in J\}$. Крім того, для кожного $s \in S$ позначимо через j_s індекс $j \in J$ такий, що $s = t_j$, і покладемо $B_s = A_{j_s} \cup \{s\}$ і $V_{k,s} = U_{k,j_s}$ для всіх $k = 1, \dots, n$.

Нехай

$$(f_{1,s} : s \in S), \ \dots \ , (f_{n-1,s} : s \in S)$$

– сім'ї неперервних функцій $f_{k,s} : X_k \to \mathbb{R}$ такі, що $\operatorname{supp} f_{k,s} = V_{k,s}$ для довільних $k \leq n-1$ і $s \in S$. Крім того, з допомогою твердження 1 виберемо сім'ю $(f_{n,s} : s \in S)$ неперервних функцій $f_{n,s} : X_n \to \mathbb{R}$ такі, що $\operatorname{supp} f_{n,s} = V_{n,s}$, функція $f_{n,s}$ зосереджена на множині B_s і не зосереджена на множині $T \setminus \{s\}$ для кожного $s \in S$.

Розглянемо функцію $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{s \in S} \prod_{k=1}^{n} f_{k,s}(x_k),$$

яка за твердженням 2 є нарізно неперервною.

Залишилось довести, що функція f не залежить від зліченної кількості координат відносно n-тої змінної. Нехай $\tilde{T}$ – довільна множина, на якій зосереджена функція f відносно n-тої змінної. Достатньо показати, що $S \subseteq \tilde{T}$. Зафіксуємо $s \in S$ і візьмемо довільні точки

$$x_1 \in V_{1,s}, \ \dots \ , x_{n-1} \in V_{n-1,s}.$$

Крім того, виберемо точки $y, z \in X_n$ такі, що $y|_{T \setminus \{s\}} = z|_{T \setminus \{s\}}$ і $f_{n,s}(y) \neq f_{n,s}(z)$. Зауважимо, що $f_{n,t}(y) = f_{n,t}(z)$ для кожного $t \in S \setminus \{s\}$, адже кожна функція $f_{n,t}$ зосереджена на множині B_t, яка не містить s. Тепер маємо

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, z) = \sum_{t \in S} \left(\prod_{k=1}^{n-1} f_{k,t}(x_k) \times (f_{n,t}(y) - f_{n,t}(z)) \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} f_{k,s}(x_k) \times (f_{n,s}(y) - f_{n,s}(z)) \neq 0.$$

Отже, $\tilde{T} \not\subseteq S \setminus \{s\}$, тобто $s \in \tilde{T}$. $\square$

3 Достатні умови залежності

Наступний факт легко випливає з теореми Тихонова про компактність добутку компактних просторів.

Твердження 4. *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я компактних просторів, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $f : X \to \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує скінченна множина $T \subseteq S$ така, що $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для довільних $x, y \in X$ з $x|_T = y|_T$.*

Наступне твердження відіграє важливу роль при переході від відображень трьох змінних до відображень двох змінних.

Твердження 5. *Нехай X, Y – компактні простори, $A \subseteq X\times Y$ – всюди щільна множина, Z – добуток сім'ї $(Z_t : t \in T)$ топологічних просторів Z_t і $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція така, що звуження $g = f|_{A\times Z}$ зосереджене на множині $S \subseteq T$ відносно змінної z. Тоді функція f також зосереджена на множині S відносно змінної z.*

Доведення. Нехай $u, v \in Z$ – такі, що $u|_S = v|_S$. Оскільки функція g зосереджена на множині S, то $g(a, u) = g(a, v)$ для кожного $a \in A$, тобто нарізно неперервні функції $f_u : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f_u(x, y) = f(x, y, u)$, і $f_v : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f_v(x, y) = f(x, y, v)$, збігаються на всюди щільній множині A. Тому згідно з [6, наслідок 4], $f_u = f_v$, тобто $f(x, y, u) = f(x, y, v)$ для всіх $x \in X$ і $y \in Y$. □

Топологічний простір Y називається *простором Кемпістого*, якщо для довільного берівського простору X і кожної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка квазінеперервна відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної, існує всюди щільна G_δ-множина A в просторі X така, що функція f сукупно неперервна в кожній точці множини $A \times Y$. Зауважимо, в [3] було показано, що довільний компакт Валдівіа є простором Кемпістого, і що добуток довільної сім'ї компактних просторів Кемпістого також є простором Кемпістого.

Наступна теорема займає центральне місце у даному пункті і дає достатні умови залежності для нарізно неперервних функцій трьох змінних.

Теорема 2. *Нехай X, Y – компактні простори, Z – добуток сім'ї $(Z_t : t \in T)$ компактних просторів Кемпістого Z_t такі, що кожна нарізно скінченна сім'я відкритих непорожніх множин в добутку $X \times Y \times Z$ є не більш, ніж зліченною. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат відносно змінної z.*

Доведення. Нехай $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Зауважимо, що з теореми Наміоки [4] випливає, що кожна нарізно неперервна функція на добутку $X\times Y$ є квазінеперервною на $P = X\times Y$. Тому функція $g : P\times Z \to \mathbb{R}$, $g((x, y), z) = f(x, y, z)$, є квазінеперервною відносно першої змінної і неперервною відносно другої змінної. Крім того, згідно з [3, теорема 4.6], простір Z є простором Кемпістого. Тому існує всюди щільна G_δ-множина A в просторі P така, що функція g, а отже, і функція f, є сукупно неперервними в кожній точці множини $A \times Z$. Тепер з твердження 5 випливає, що достатньо показати, що функція $h = g|_{A\times Z}$ залежить від зліченної кількості координат відносно змінної z.

Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що неперервна функція h не залежить від зліченної кількості координат відносно змінної z. Тоді згідно з [9, наслідок], множина

$$\tilde{T} = \{t \in T : (\exists a_t \in A)(\exists u_t, v_t \in Z)(u_t|_{T\setminus\{t\}} = v_t|_{T\setminus\{t\}} \text{ і } h(a_t, u_t) \neq h(a_t, v_t)\}$$

є незліченною. Тому існує $\varepsilon > 0$ таке, що множина

$$S = \{t \in \tilde{T} : |h(a_t, u_t) - (a_t, v_t)| > 4\varepsilon\}$$

є незліченною. Для кожного $s \in S$, використовуючи сукупну неперервність функції f в точках (x_s, y_s, u_s) і (x_s, y_s, v_s), де $(x_s, y_s) = a_s$, виберемо відкриті околи G_s і H_s точок x_s і y_s в просторах X і Y відповідно, а також базисні відкриті околи

$$U_s = \prod_{t \in T} U_t^{(s)} \qquad \text{і} \qquad V_s = \prod_{t \in T} V_t^{(s)}$$

точок u_s і v_s відповідно такі, що

$$R(U_s) = R(V_s), \qquad U_t^{(s)} = V_t^{(s)}$$

для кожного $t \neq s$,

$$|f(x, y, u) - f(x, y, v)| > 2\varepsilon$$

для довільних $x \in G_s$, $y \in H_s$, $u \in U_s$ і $v \in V_s$.

До сім'ї $(R_s : s \in S)$ скінченних множин $R_s = R(U_s)$ застосуємо твердження 3 і знайдемо скінченну множину $B \subseteq T$ і незліченну множину $S_0 \subseteq S$ такі, що $R_s \cap R_t = B$ для довільних різних $s, t \in S_0$. Для одержання потрібної нам суперечності залишилось показати, що сім'я $(W_s : s \in S_0)$ відкритих непорожніх множин $W_s = G_s \times H_s \times U_s$ є нарізно скінченною в $X \times Y \times Z$.

Спочатку покажемо, що сім'я $(W_s : s \in S_0)$ є скінченною відносно змінної z. Зафіксуємо точку $p = (x, y) \in X \times Y$ і покладемо

$$S_p = \{s \in S_0 : p \in G_s \times H_s\}.$$

До неперервної функції $f_p : Z \to \mathbb{R}$, $f_p(z) = f(x, y, z)$, застосуємо твердження 4 і знайдемо скінченну множину $T_p \subseteq T$ таку, що

$$|f_p(u) - f_p(v)| < \varepsilon$$

для довільних $u, v \in Z$ з $u|_{T_p} = v|_{T_p}$. Оскільки

$$|f(x, y, u_s) - f(x, y, v_s)| > 2\varepsilon$$

і $u_s|_{T\setminus\{s\}} = v_s|_{T\setminus\{s\}}$ для кожного $s \in S_p$, то $S_p \subseteq T_p$, і тому, множина S_p – скінченна.

Тепер покажемо, що сім'я $(W_s : s \in S_0)$ є скінченною відносно змінної x. Зафіксуємо точку $q = (y, u) \in Y \times Z$ і покладемо

$$S_q = \{s \in S_0 : q \in H_s \times U_s\}.$$

Припустимо, що множина S_q нескінченна. Тоді сім'я $(x_s : s \in S_q)$ у компактному просторі X має хоча б одну точку накопичення $\tilde{x}$, тобто точку, кожний окіл якої, містить нескінченну кількість елементів цієї сім'ї. Покладемо $\tilde{p} = (\tilde{x}, y)$ і до неперервної функції $f_{\tilde{p}} : Z \to \mathbb{R}$, $f_{\tilde{p}}(z) = f(\tilde{x}, y, z)$, застосуємо твердження 4 і знайдемо скінченну множину $T_{\tilde{p}} \subseteq T$ таку, що

$$|f_{\tilde{p}}(u) - f_{\tilde{p}}(v)| < \varepsilon$$

для довільного $v \in Z$ з $u|_{T_{\tilde{p}}} = v|_{T_{\tilde{p}}}$. Позначимо $T_0 = S_q \setminus (B \cup T_{\tilde{p}})$ і зауважимо, що $\tilde{x}$ є точкою накопичення сім'ї $(x_s : s \in T_0)$, адже множина $B \cup T_{\tilde{p}}$ – скінченна.

Розглянемо точку $\tilde{v} \in Z$, яка означається наступним чином:

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v_t(t), \text{ якщо } & t \in T_0; \\ u(t), \text{ якщо } & t \in T \setminus T_0. \end{cases}$$

Зауважимо, що $u|_{T_{\tilde{p}}} = \tilde{v}|_{T_{\tilde{p}}}$ і тому,

$$|f(\tilde{x}, y, u) - f(\tilde{x}, y, \tilde{v})| = |f_{\tilde{p}}(u) - f_{\tilde{p}}(\tilde{v})| < \varepsilon.$$

Зафіксуємо $s \in T_0$ і переконаймося, що $\tilde{v} \in V_s$. Для цього достатньо перевірити, що $\tilde{v}(t) \in V_t^{(s)}$ для кожного $t \in R(V_s) = R(U_s) = R_s$. Нехай $t \in R(V_s) \setminus T_0$. Оскільки $u \in U_s$ і $U_t^{(s)} = V_t^{(s)}$, адже $t \neq s$, то

$$\tilde{v}(t) = u(t) \in U_t^{(s)} = V_t^{(s)}.$$

Тепер нехай $t \in R(V_s) \cap T_0$. Зауважимо, що $U_t^{(t)} \neq V_t^{(t)}$ і тому, $t \in R(V_t)$. Отже,

$$t \in R(V_s) \cap R(V_t) \cap T_0.$$

Тоді $t = s$, адже інакше при $t \neq s$ маємо, що

$$R(V_s) \cap R(V_t) \cap T_0 = B \cap T_0 = \varnothing.$$

Таким чином,

$$\tilde{v}(t) = \tilde{v}(s) = v_s(s) \in V_s^{(s)} = V_t^{(s)}.$$

Отже, $\tilde{v} \in V_s$ для кожного $s \in T_0$. Крім того, $y \in H_s$ і $u \in U_s$, і тому,

$$|f(x_s, y, u) - f(x_s, y, \tilde{v})| > 2\varepsilon$$

для кожного $s \in T_0$. Оскільки точка $\tilde{x}$ є точкою накопичення сім'ї $(x_s : s \in T_0)$ і функція f є неперервною відносно змінної x, то

$$|f(\tilde{x}, y, u) - f(\tilde{x}, y, \tilde{v})| \geq 2\varepsilon,$$

що дає нам суперечність.

Аналогічно доводиться, що сім'я $(W_s : s \in S_0)$ є скінченною відносно змінної y. $\square$

Тепер з теорем 1 і 2 негайно випливає наступний результат.

Теорема 3. *Нехай X, Y і Z – добутки сімей $(X_s : s \in S)$, $(Y_t : t \in T)$ і $(Z_r : r \in R)$ нетривіальних гаусдорфових компактних просторів Кемпістого X_s, Y_t і Z_r такі, що множина $S \cup T \cup R$ є незліченною. Тоді наступні умови є рівносильними:*

- (i) *кожна нарізно скінченна сім'я відкритих непорожніх множин в добутку $X \times Y \times Z$ є не більш, ніж зліченною;*
- (ii) *кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат.*

У зв'язку з цією теоремою природно виникає наступне питання.

Питання 1. *Нехай X, Y і Z – добутки сімей $(X_s : s \in S)$, $(Y_t : t \in T)$ і $(Z_r : r \in R)$ нетривіальних гаусдорфових компактних просторів X_s, Y_t і Z_r такі, що кожна нарізно скінченна сім'я відкритих непорожніх множин в добутку $X \times Y \times Z$ є не більш, ніж зліченною. Чи обов'язково кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат?*

Список літератури

1. Engelking R. *General Topology*, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin (1989).
2. Mazur S. *On continuous mappings on Cartesian products*, Fund. Math. **39** (1952) 229-238.
3. Mykhaylyuk V.V. *Namioka spaces and topological games*, Bull. Austral. Math. Soc. **73** (2006) 263-272.
4. Namioka I. *Separate continuity and joint continuity*, Pacif. J. Math. **51** (2) (1974) 515-531.
5. Noble N., Ulmer M. *Factoring functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972) 329–339.
6. Karlova O., Mykhaylyuk V. *A generalization of Sierpiński theorem on unique determining of a separately continuous function*, Bukoviniam Math. Journal **9** (1) (2021) 250-263.
7. Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V. *Separately continuous functions of many variables on product spaces which are products of metrizable multipliers*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **1** (2004) 77-84 (in Ukrainian).
8. Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V., Sobchuk O. *Inverse problem of theory of separately continuous functions,* Ukr. Math. Journ. **44** (9) (1992) 1209-1220 (in Ukrainian).
9. Mykhaylyuk V.V. *Dependence on* **n** *coordinates of separately continuous functions on products of compacts,* Ukr. Math. Journ. **50** (6) (1998) 822-829 (in Ukrainian).
10. Mykhaylyuk V.V. *Separately continuous functions on products and its dependence on $\aleph$ coordinates,* Ukr. Math. Journ. **56** (10) (2004) 1357-1368 (in Ukrainian).

Надійшло 28.10.2022

Mykhaylyuk V.V. *Dependence on countable many of coordinates of separately continuous functions of three variables*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 185–194.

The dependence of continuous mappings on a certain number of coordinates was intensively studied in the works of many mathematicians in the middle of the 20th century. It has become a convenient tool in the study of properties of continuous mappings. The most general results in this direction were obtained in [5], where the necessary and sufficient conditions for the dependence of continuous functions on products from a certain number of coordinates were obtained.

Starting with [8] the dependence of separately continuous mappings on a certain number of coordinates became the subject of research at the Chernivtsi University. For functions of two variables the most general results were obtained in [10]. The dependence on a certain number of coordinates of separately continuous functions of three or more variables was studied in [7], where the necessary and sufficient conditions were established only in the case of metrizability of all factors, which leaves a lot of room for further research.

We obtain necessary and sufficient conditions of dependence on countable many of coordinates of functions on the product of three spaces each of which is the product of a family of compact Kempisty spaces.

Працьовитий М. В., Карвацький Д. М.

Множина неповних сум модифікованого ряду Гатрі-Німана

У роботі вивчаються тополого-метричні властивості множини неповних сум додатного ряду $\sum a_k$, де $a_{2n-1} = 3/4^n + 3/4^{in}$ та $a_{2n} = 2/4^n + 2/4^{in}$, $n \in N$, залежного від натурального параметра $i \geq 2$, який є певним збуренням відомого ряду Гатрі-Німана. Встановлено, що множина неповних сум такого ряду є канторвалом (що є специфічним об'єднанням досконалої ніде не щільної множини нульової міри лебега і нескінченного об'єднання інтервалів), міра Лебега якого обчислюється за формулою: $\lambda(X_i^+) = 1 + \frac{1}{4^i - 3}$. Основна ідея доведення тведження грунтується на відомій теоремі Какея, замкненості множин неповних сум ряду і всюди щільності множини у певному відрізку. У роботі наводиться повне обгрунтування фактів для випадку $i = 2$. Для обгрунтування основних фактів використовується співвідношення між членами та залишками ряду. Для $i = 2$ маємо $r_0 = \sum a_k = 2$, $a_{2n} - r_{2n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{16^n}$ $r_{2n-1} - a_{2n-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^n} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16^n}$. Актуальність вивчення об'єкта продиктована задачами геометрії числових рядів, фрактального аналізу та фрактальної геометрії одновимірних об'єктів і теорії нескінченних згорток Бернуллі, однієї з проблем якої є проблема сингулярності згортки двох сингулярних розподілів.

Ключові слова і фрази: підсума числового ряду, множина неповних сум ряду, ряд Гатрі-Німана, множина канторівського типу, канторвал, арифметична сума числових множин, міра Лебега.

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: *prats4444@gmail.com (Pratsiovytyi M.V.), karvatsky@imath.kiev.ua (Karvatsky D.M.)*

Вступ

Розглядається абсолютно збіжний числовий ряд:

$$r_0 = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = u_1 + u_2 + ... + u_n + r_n = s_n + r_n. \tag{1}$$

Нагадаємо, що число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M \subseteq N} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \varepsilon_n = \begin{cases} 1 \text{ при } & n \in M, \\ 0 \text{ при } & n \notin M, \end{cases} \tag{2}$$

називається *неповною сумою (підсумою) ряду* (1), визначеною множиною M. Множина $E = E[u_n]$ усіх чисел виду (2) називається множиною неповних сум (підсум) ряду (1).

УДК 517.5+515.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* 40A05.

Очевидно, що $0 \in E[u_n] \subset [0; r_0]$, $r_0 \in E$, всі члени ряду (u_n), послідовність його частинних сум (S_n) і послідовність залишків ряду (r_n) належать множині $E[u_n]$. Просто доводиться континуальність та замкненість множини неповних сум ряду. Робота Какея [5] поклала початок дослідженням тополого-метричних властивостей множин неповних сум абсолютно збіжних числових рядів. На даний момент загальна теорія (а ми її називаємо геометрією числових рядів) є достатньо бідною. Серед фактів цієї теорії теорема Какея і теорема про топологічну структуру множини неповних сум. Разом з цим для окремих класів рядів отримано повні розв'язки тополого-метричних задач і задач про фрактальні властивості множини неповних сум [10, 11, 13].

У 1988 році Дж. Гатрі та Дж. Німан [4] довели, що множина неповних сум ряду

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{4^n} + \dots \tag{3}$$

містить відрізок $[3/4, 1]$, проте не є скінченним об'єднанням відрізків. Такі множини стали називати **канторвалами** (М-канторвалами), вони також зустрічаються при вивченні арифметичних сум двох множин канторівського типу [7].

Також канторвал можна означити як

$$X \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n},$$

де C – класична множина Кантора, G_k – об'єднання усіх центральних третин, які вилучаються із відрізка $[0, 1]$ на k-ому кроці побудови множини C.

У роботах [4] та [6] встановлено, що множина неповних сум довільного збіжного додатного ряду належить одному з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків; гомеоморфною множині Кантора; М-канторвалом (симетричним канторвалом).

На сьогоднішній день необхідні і достатні умови того, що множина неповних сум збіжного додатного ряду є канторвалом або є гомеоморфною множині Кантора (з додатною мірою Лебега або нульової міри Лебега та дробової розмірності Гаусдорфа-Безиковича) залишаються невідомими. Тому науковці розв'язують цю задачу для певних класів рядів (бігеометричних, мультигеометричних [1], рядів з узагальнених чисел Фібоначчі [12], рядів з певною умовою однорідності [8, 9]) тощо.

Оскільки канторвал містить цілі відрізки, то природньою є задача про міру Лебега такої множини. Структура канторвалу X, що є множиною неповних сум ряду Гатрі-Німана (3), визначається співвідношеннями між X-інтервалами та X-щілинами (детальніше у [2]). Для такого канторвалу добре вивчені топологічні та метричні властивості. Зокрема встановлено, що частини множини подібні самій множині X з коефіцієнтом подібності $1/4^n$. На основі цього була обчислена міра Лебега такого канторвала X. Вона дорівнює 1 [2].

Ще одним цікавим напрямом дослідження у цій області є вивчення властивості підмножини $U \subset X$ усіх чисел, які мають єдине представлення за допомогою неповної суми ряду (3). Для ряду Гатрі-Німана встановлені критерії приналежності числа підмножині U. Доведено, що множина U є всюди щільною в X та вивчені деякі її властивості [3].

Окрім канторвалу X, який має відносно просту топологічну структуру, зарубіжними та вітчизняними математиками активно вивчаються канторвали, що породжені рядами з певними умовами однорідності. У роботі [1] вивчаються канторвали, що є множинами неповних сум ряду $k_1+k_2+\cdots+k_m+k_1q+k_2q+\cdots+k_mq+\cdots+k_1q^n+\cdots+k_mq^n+\ldots$, де $k_1,k_2,\ldots,k_m$ – фіксовані натуральні числа, $q\in(0,1/2)$. Члени такого ряду утворюють мультигеометричну прогресію зі знаменником q.

Стаття [9] присвячена дослідженню канторвалів, які є множинами неповних сум рядів $\sum a_n$, для яких

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1 \quad \text{та} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{a_{n+k}}=+\infty.$$

Встановлено, що для будь-якого $\varepsilon>0$ в такій сім'ї існує ряд, міра Лебега множини неповних сум якого є більшою за $1-\varepsilon$.

Підсумовуючи результати цього розділу інтерес до вивчення канторвалів зараз досить високий. Зокрема, для канторвалу X, що породжений рядом Гатрі-Німана розв'язаний ряд топологічних, метричних та ймовірнісних задач. У цьому контексті будь-які модифікації ряду (3) потенційно можна використати для моделювання канторвалів та подальшого їх дослідження.

1 Збурений ряд Гатрі-Німана

Розглядається збіжний додатний ряд

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{16}\right)+\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{16}\right)+\left(\frac{3}{4^2}+\frac{3}{16^2}\right)+\cdots+\left(\frac{3}{4^n}+\frac{3}{16^n}\right)+\left(\frac{2}{4^n}+\frac{2}{16^n}\right)+\ldots, \quad (4)$$

який є певною модифікацією ряду Гатрі-Німана. Чи збереже ряд при цьому свої тополого-метричні властивості? Для членів та залишків ряду (4) виконуються наступні співвідношення:

$$r_0=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4^n}+\frac{5}{16^n}\right)=2,$$

$$r_{2n}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{5}{4^k}+\frac{5}{16^k}\right)=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16^n}<\frac{2}{4^n}+\frac{2}{16^n}=a_{2n},$$

$$r_{2n-1}=\frac{2}{4^n}+\frac{2}{16^n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{5}{4^k}+\frac{5}{16^k}\right)=\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{16^n}>\frac{3}{4^n}+\frac{3}{16^n}=a_{2n-1}.$$

для довільного $n\in N$. Враховуючи нерівності $a_{2n}>r_{2n}$ та $a_{2n-1}<r_{2n-1}$, доходимо до висновку, що множина неповних сум ряду (4) не є скінченним об'єднанням відрізків (не виконуються необхідні та достатні умови для цього). Таким чином, $E[a_n]$ є канторвалом або множиною канторівського типу. Конкретизує висновок наступне твердження.

Теорема 1. *Множина E неповних сум ряду* (4) *є канторвалом, причому вона містить відрізок* $\left[\frac{15}{16},1\right]$.

Доведення. Очевидно, що множина всіх чисел виду

$$\Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n}{4^n} + \frac{\alpha_n}{16^n}\right), \tag{5}$$

де $\alpha_n \in \{0, 2, 3, 5\}$, збігається з множиною неповних сум ряду (4). Покажемо, що вона всюди щільна у четвірковому циліндрі другого рангу $\Delta^4_{33} = \left[\frac{15}{16}, 1\right]$, тобто множині чисел, які мають вигляд четвіркового представлення (зображення):

$$x = \Delta^4_{33c_3c_4\ldots} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{c_n}{4^n}, \text{ де } c_i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

З цією метою скористаємось означенням всюди щільної множини. Покажемо, що

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\forall x = \Delta^4_{33c_3c_4\ldots c_n(0)}) \quad (\exists y = \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)}) \quad |x - y| < \varepsilon.$$

Побудуємо число $y = \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n(0)}$ за наступним алгоритмом:

$$\alpha_n = \begin{cases} c_n, & \text{якщо } c_n \in \{0, 2, 3\}, \\ 5, & \text{якщо } c_n = 1, \end{cases}$$

$$\alpha_{n-1} = \begin{cases} c_{n-1}, & \text{якщо } c_n, c_{n-1} \in \{0, 2, 3\}, \\ c_{n-1} - 1, & \text{якщо } c_n = 1, c_{n-1} \neq 2, \\ 5, & \text{якщо } c_n = 1, c_{n-1} = 2, \end{cases}$$

. . . .

$$\alpha_1 = \begin{cases} c_1, & \text{якщо } c_2 \in \{0, 2, 3\}, \\ c_1 - 1, & \text{якщо } c_2 = 1. \end{cases}$$

Це число $y = \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}$ називатимемо першим наближенням до числа x та позначатимемо через $\Delta^*(1)$. Матимемо при $y = \Delta^*(1)$

$$x - y = \Delta^4_{33c_3c_4\ldots c_n(0)} - \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{16^i}.$$

У свою чергу таку різницю можна подати у вигляді $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{16^i} = \Delta^4_{0\alpha_10\alpha_2\ldots0\alpha_n(0)}$ та аналогічним чином побудувати до нього наближення $\Delta^*_{0\alpha_10\alpha_2\ldots0\alpha_n(0)}$. Число

$$\Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} - \Delta^*_{0\alpha_10\alpha_2\ldots0\alpha_n(0)} = \Delta^*_{\underbrace{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_3(\alpha_4-\alpha_2)\ldots0\alpha_n}_{2n}(0)}$$

будемо називати 2-им наближенням до числа x та позначатимемо через $\Delta^*(2)$.

Наближенням k-ого порядку до числа x називатимемо число $\Delta^*(k) = \Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\ldots\gamma_{2^kn}(0)}$, де цифри $\gamma_i, i = \overline{1, 2^kn}$ визначаються наступним чином:

$$\gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \gamma_3 = \alpha_3, \quad \gamma_4 = \alpha_4 - \alpha_2 + \alpha_1,$$

$$\gamma_5 = \alpha_5, \quad \gamma_6 = \alpha_6 - \alpha_3, \quad \gamma_7 = \alpha_7, \quad \gamma_8 = \alpha_8 - \alpha_4 + \alpha_2 - \alpha_1,$$

. . . .

$$\gamma_i = \alpha_i + (-1)^{i-1}\mu_i, \quad \text{де} \quad \mu_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad i \neq 2m, \\ \alpha_{\frac{i}{2}} + \mu_{\frac{i}{2}}, & \text{якщо} \quad i = 2m. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$|x - \Delta^*(k)| = \sum_{i=k}^{n} \frac{\alpha_i}{16^{2i}} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Варто зауважити, що γ_i не завжди є цифрами алфавіту $\{0, 2, 3, 5\}$. Тому залишається привести зображення числа $\Delta^*(k)$ до форми (5). Оскільки

$$\frac{4}{4^n} + \frac{4}{16^n} = \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{16^{n-1}}\right) - \frac{3}{4^{2n-1}}, \;\; \frac{1}{4^n} + \frac{1}{16^n} = \left(\frac{4}{4^{n+1}} + \frac{4}{16^{n+1}}\right) + \frac{3}{4^{2n+1}},$$

то справедливими будуть рівності

$$\Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}4\gamma_{n+1}\ldots} = \Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\ldots(\gamma_{n-1}+1)0\gamma_{n+1}\ldots\gamma_{2n-2}(\gamma_{2n-1}+3)\gamma_{2n}\ldots(\gamma_{4n-1}-3)\ldots},$$

$$\Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_{n-1}1\gamma_{n+1}\ldots} = \Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_{n-1}0(\gamma_{n+1}+4)\ldots\gamma_{2n}(\gamma_{2n+1}-3)\ldots\gamma_{4n}(\gamma_{4n+1}+3)\ldots}.$$

Враховуючи їх, бачимо, що довільне число $\Delta^*(k) = \Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\ldots\gamma_{2^k n}(0)}$ можна перетворити (з точністю до ε) у число виду (5). Таким чином множина E є всюди щільною у множині чисел Δ^4_{33}, тобто всюди щільною у відрізку $\left[\frac{15}{16}, 1\right]$. Враховуючи замкненість множини неповних сум ряду, підсумовуємо $\left[\frac{15}{16}, 1\right] \subset E$. Отже, E канторвал. □

Наслідок 1. *Множина E неповних сум ряду* (4) *містить відрізок* $\left[1; \frac{17}{16}\right]$.

Твердження випливає з того, що множина неповних сум ряду (4) симетрична відносно середини відрізка $[0; 2]$ — мінімального відрізка, що її містить.

2 Міра Лебега канторвала

Для зручності позначимо канторвал, який є множиною неповних сум ряду (4) через X^+. Враховуючи співвідношення між членами та залишками ряду

$$a_{2n} - r_{2n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{16^n} \quad \text{та} \quad r_{2n-1} - a_{2n-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^n} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16^n}$$

множину X^+ можна легко виписати послідовність суміжних інтервалів.

Суміжними множині є інтервали $\left(\frac{7}{16}, \frac{10}{16}\right)$ та $\left(\frac{22}{16}, \frac{25}{16}\right)$, які мають довжини $\frac{3}{16}$ та породжені нерівністю $a_2 > r_2$. Наступні шість інтервалів $\left(\frac{27}{256}, \frac{34}{256}\right)$, $\left(\frac{78}{256}, \frac{85}{256}\right)$, $\left(\frac{187}{256}, \frac{194}{256}\right)$, $\left(\frac{318}{256}, \frac{325}{256}\right)$, $\left(\frac{427}{256}, \frac{434}{256}\right)$ та $\left(\frac{478}{256}, \frac{485}{256}\right)$ мають довжину $\frac{7}{256}$ та породжені нерівністю $a_4 > r_4$. Наступні інтервали породжені нерівністю $a_{2n} > r_{2n}$ та мають довжину, що не перевищує величину $1/4^n$. І т.д.

Введемо позначення

$$A(n) = \sum_{k>n} \left(\frac{2}{4^k} + \frac{2}{16^k}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{16^n} \quad \text{та} \quad A(0) = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{4}{5},$$

$$B(n) = \sum_{k>n} \left(\frac{3}{4^k} + \frac{3}{16^k}\right) = \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16^n} \quad \text{та} \quad B(0) = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5},$$

$$C(n)=\sum_{k>n}\left(\frac{5}{4^k}+\frac{5}{16^k}\right)=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16^n}\quad \text{та}\quad C(0)=2.$$

Для опису відрізків, що належать канторвалу X^+ розглянемо наступні множини

$$K_n=\left[\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right]\bigcap\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{4^i}+\frac{\alpha_i}{16^i}\right):\alpha_i\in\{0,2,3,5\}, i=\overline{1,n}\right\}.$$

Не важко переконатися, що $K_1=\left\{\frac{15}{16}\right\}$ та $K_2=\left\{\frac{211}{256},\frac{15}{16},\frac{245}{256},\frac{274}{256},\frac{291}{256}\right\}$. У загальному ж випадку враховуючи, що $A(0)=\frac{4}{5}$ та $A(n)<\frac{1}{4^n}+\frac{1}{16^n}$ робимо висновок, що число

$$f_1^n=\left(\frac{3}{4^n}+\frac{3}{16^n}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{2}{4^i}+\frac{2}{16^i}\right)$$

є найменшим у множині K_n. З іншого боку, враховуючи $C(n)=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16^n}<\frac{2}{4^n}+\frac{2}{16^n}$ та $B(0)=\frac{6}{5}$ робимо висновок, що

$$f_{|K_n|}^n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{4^i}+\frac{3}{16^i}\right)<\frac{6}{5}$$

є найбільшим дійсним числом у множині K_n ($|K_n|$ – кількість елементів множини).

Теорема 2. *Відстань між елементами множини K_n не перевищує величину $d(n)=\frac{2}{4^n}$, а кількість елементів множини K_n обчислюється за формулою*

$$|K_n|=\frac{1}{3}\left(4^n-1\right)\quad \text{та}\quad |K_{n+1}|=4|K_n|+1.$$

Доведення. Оскільки $|K_1|=1$ та $|K_2|=5$, то теорема справедлива для $n=1,2$. Припустимо, що $K_{n-1}=\left\{f_1^{n-1},f_2^{n-1},\ldots,f_{|K_n|}^{n-1}\right\}$, де

$$f_1^{n-1}=\left(\frac{3}{4^{n-1}}+\frac{3}{16^{n-1}}\right)+\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{2}{4^i}+\frac{2}{16^i}\right),\quad f_{j+1}^{n-1}-f_j^{n-1}<\frac{2}{4^{n-1}}+\frac{2}{16^{n-1}}$$

для $0<j<|K_{n-1}|-1$, причому $f_{|K_n|}^{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4^n}+\frac{3}{16^n}\right)$. Розглянемо об'єднання множин

$$K_{n-1}\bigcup\left(\frac{2}{4^n}+\frac{2}{16^n}+K_{n-1}\right)\bigcup\left(\frac{3}{4^n}+\frac{3}{16^n}+K_{n-1}\right)\bigcup\left(\frac{5}{4^n}+\frac{5}{16^n}+K_{n-1}\right).$$

Видалимо з цієї множини число

$$\left(\frac{5}{4^n}+\frac{5}{16^n}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4^i}+\frac{3}{16^i}\right)>\frac{4}{5}$$

і додамо до неї числа

$$f_1^n=\left(\frac{3}{4^n}+\frac{3}{16^n}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{2}{4^i}+\frac{2}{16^i}\right),\quad f_3^n=\left(\frac{5}{4^n}+\frac{5}{16^n}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{2}{4^i}+\frac{2}{16^i}\right).$$

В результаті отримаємо шукану множину

$$K_n=\left\{f_1^n,f_2^n,\ldots,f_{\frac{1}{3}(4^n-1)}^n\right\}.\qquad\square$$

Наслідок 2. *Відрізок* $\left[\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right]$ *міститься в канторвалі* X.

Доведення. Покажемо, що $(\forall\varepsilon>0)$ $(\forall x\in[4/5,6/5])$ $(\exists n\in N)$ $(\exists y\in K_n)$ $|x-y|<\varepsilon$. Дійсно, якщо вибрати $n>(1-\log_2\varepsilon)/2$, то згідно з теоремою 2 елементи множини K_n будуть знаходитися на відстані, що не перевищує $2/4^n$. Отже, множина K_n всюди щільна на відрізку $[4/5,6/5]$. Оскільки $\bigcup K_n\subset X^+$, то і відрізок $[4/5,6/5]$ належать цьому канторвалу. □

Легко довести наступне твердження.

Лема 1. *Множина* $X^+\setminus\left[\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right]$ *є об'єднанням двох неперетинних ізометричних фігур, подібних множині* X^+. *Множина* $X^+\setminus\left(\left(\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right)\bigcup\left(\frac{7}{40},\frac{21}{80}\right)\bigcup\left(\frac{139}{80},\frac{73}{40}\right)\right)$ *є об'єднанням шести неперетинних ізометричних копій* $D=\left[0,\frac{7}{40}\right]\bigcap X^+$, *які подібні множині* X^+.

Теорема 3. *Міра Лебега канторвала* X^+ *рівна 14/13.*

Доведення. Враховуючи лему 1, підрахуємо суму довжин усіх суміжних X^+ інтервалів

$$l=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot 3^{n-1}(a_{2n}-r_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot 3^{n-1}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{16^n}\right)=\frac{2}{3}+\frac{10}{39}=\frac{12}{13}.$$

Отже, $\lambda(X^+)=2-l=\frac{14}{13}$.

З іншого боку, сума довжин усіх суміжник множині X^+ інтервалів дорівнює

$$I=B(0)-A(0)+\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot 3^{n-1}\left(B(n)-A(n)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot 3^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{16^n}\right)=\frac{14}{13}.$$ □

Зауваження 1. *Аналогічно чином можна довести, що множина неповних сум ряду*

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4^i}\right)+\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{4^i}\right)+\left(\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^{2i}}\right)+\dots+\left(\frac{3}{4^n}+\frac{3}{4^{ni}}\right)+\left(\frac{2}{4^n}+\frac{2}{4^{ni}}\right)+\dots,$$

$n\in N$, *є деяким канторвалом* $X_i^+(X^+\equiv X_2^+)$ *та обчислити його міру Лебега використовуючи міркування, розглянуті вище. Матимемо* $\lambda(X_i^+)=1+\frac{1}{4^i-3}$.

Список літератури

[1] *Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E.* Multigeometric sequences and Cantorvals. Central European Journal of Mathematics. 2014, 12 (7), 1000-1007. https://doi.org/10.48550/arXiv.1304.4218

[2] *Bielas W., Plewik S., Walczyńska M.* On the center of distances. European Journal of Mathematics. 2018, 2, 687–698. https://doi.org/10.1007/s40879-017-0199-4

[3] *Głąb S., Marchwincki J.* Set of uniqueness for cantorvals. – 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.12479

[4] *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series. Colloq. Math. 1988, 55 (2), 323-327.

[**5**] Kakeya S. *On the partial sums of an infinite series.* Tohoku Sci Rep., 1914, **3** (4), P. 159–164, DOI:10.11429/PTMPS1907.7.14250.

[**6**] *Nymann J., Saenz R.* On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series. Colloq. Math. 2000, 83 (1), 1-4.

[**7**] *Mendes P., Oliveira F.* On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets. Nonlinearity. 1994, 7 (2), 329-343.

[**8**] *Pratsyovitiy M. V., Karvatskiy D. M.* Jacobsthal-Lucas series and their applications. Algebra and discrete mathematics. 2017, 24 (1), 169–180. https://admjournal.luguniv.edu.ua/index.php/adm/article/view/297/pdf

[**9**] *Виннишин Я. Ф., Маркітан В. П., Працьовитий М. В., Савченко І. О.* Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами. Proceedings of the International Geometry Center. 2019, 12 (2), 26-42. https://doi.org/10.15673/tmgc.v12i2.1455

[**10**] *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній. Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. 2005, 6, 210–224.

[**11**] *Корсунь Н.О., Працьовитий М.В.* Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел. Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. 2009, 10, 28–39. http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/123456789/13868/1/korsun28-39.pdf

[**12**] *Працьовитий М. В., Карвацький Д. М.* Властивості множини неповних сум одного ряду, члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі. Збірник праць Інституту математики НАН України. 2019, 16 (3), 7-18. https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/478/483

[**13**] *Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Множина неповних сум числового ряду з однією нелінійною властивістю однорідності. Буковинський математичний журнал. 2014, 2(2-3), 196–202. https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/91/91

Список літератури

[**1**] *Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E.* Multigeometric sequences and Cantorvals. Central European Journal of Mathematics. 2014, 12 (7), 1000-1007. https://doi.org/10.48550/arXiv.1304.4218

[**2**] *Bielas W., Plewik S., Walczyńska M.* On the center of distances. European Journal of Mathematics. 2018, 2, 687–698. https://doi.org/10.1007/s40879-017-0199-4

[**3**] *Głąb S., Marchwincki J.* Set of uniqueness for cantorvals. – 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.12479

[**4**] *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series. Colloq. Math. 1988, 55 (2), 323-327.

[**5**] Kakeya S. *On the partial sums of an infinite series.* Tohoku Sci Rep., 1914, **3** (4), P. 159–164, DOI:10.11429/PTMPS1907.7.14250.

[**6**] *Nymann J., Saenz R.* On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series. Colloq. Math. 2000, 83 (1), 1-4.

[**7**] *Mendes P., Oliveira F.* On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets. Nonlinearity. 1994, 7 (2), 329-343.

[**8**] *Pratsyovitiy M. V., Karvatskiy D. M.* Jacobsthal-Lucas series and their applications. Algebra and discrete mathematics. 2017, 24 (1), 169–180. https://admjournal.luguniv.edu.ua/index.php/adm/article/view/297/pdf

[**9**] *Vinishin Y., Markitan V., Pratsiovytyi M., Savchenko I.* Positive series, whose sets of subsums is a cantorvals. Proceedings of the International Geometry Center. 2019, 12 (2), 26-42. (in Ukrainian) https://doi.org/10.15673/tmgc.v12i2.1455

[**10**] *Goncharenko Ya.V., Pratsiovytyi M.V., Torbin G.M.* Topological, metric and fractal properties of the set of incomplete sums of the positive series and distributions on it. Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser 1. Fiz.-Mat. Nauky. 2005, 6, 210–224.

[**11**] *Korsun N.O., Pratsyovity M.V.* About set of incomplete sums of positive series with one condition of homogeneity and generalization of the binary representation of numbers. Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser 1. Fiz.-Mat. Nauky. 2009, 10, 28–39. http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/123456789/13868/1/korsun28-39.pdf

[**12**] *Pratsiovytyi M., Karvatsky D.* The property of the set of subsums for series whose terms are elements of generalized Fibonacci sequence. Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2019, 16 (3), 7-18. (in Ukrainian) https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/478/483

[**13**] *Pratsiovytyi M.V., Savchenko I.O.* The set of incomplete sums of a numerical series with one nonlinear homogeneity property. Bukovinsk Mathematical Journal. 2014, 2(2-3), 196–202. https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/91/91

Надійшло 29.12.2022

Pratsiovytyi M.V., Karvatsky D.M. *The set of incomplete sums of the modified Guthrie-Nymann series*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 195–203.

In this paper we study topological and metric properties of the set of incomplete sums for positive series $\sum a_k$, where $a_{2n-1} = 3/4^n + 3/4^{in}$ and $a_{2n} = 2/4^n + 2/4^{in}$, $n \in N$. The series depends on positive integer parameter $i \geq 2$ and it is some perturbation of the known Guthrie-Nymann series. We prove that the set of incomplete sums of this series is a Cantorval (which is a specific union of a perfect nowhere dense set of zero Lebesgue measure and an infinite union of intervals), and its Lebesgue measure is given by formula: $\lambda(X_i^+) = 1 + \frac{1}{4^i-3}$. The main idea of ??proving the theorem is based on the well-known Kakey theorem, the closedness of sets of incomplete sums of the series and the density of the set everywhere in a certain segment. The work provides a full justification of the facts for the case $i = 2$. To justify the main facts, the ratio between the members and the remainders of the series is used. For $i = 2$ we have $r_0 = \sum a_k = 2$, $a_{2n} - r_{2n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{16^n}$ $r_{2n-1} - a_{2n-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^n} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16^n}$. The relevance of the study of the object is dictated by the problems of the geometry of numerical series, fractal analysis and fractal geometry of one-dimensional objects and the theory of infinite Bernoulli convolutions, one of the problems of which is the problem of the singularity of the convolution of two singular distributions.

Працьовитий М.В.[1], Ратушняк С.П.[2], Симоненко Ю.О.[3], Шпитюк Д.С.[4]

Згортка двох сингулярних розподілів: класичного канторівського і випадкової величини з незалежними дев'ятірковими цифрами

Вивчається розподіл випадкової величини $\xi = \tau + \eta$, де τ і η незалежні випадкові величини, причому τ має класичний канторівський розподіл, а η є випадковою величиною з незалежними однаково розподіленими цифрами дев'ятіркового зображення. При додаткових умовах на розподіли цифр η вказуються достатні умови сингулярності канторівського типу розподілу ξ . Для обгрунтування тверджень здійснюється тополого-метричний аналіз зображення чисел $x \in [0;2]$ у системі числення з основою 9 та сімнадцятисимвольним алфавітом (набором цифр). Геометрію (позиційну та метричну) цього зображення описують властивості відповідних циліндричних множин.

Ключові слова і фрази: s-кове зображення чисел, система числення з надлишковим алфавітом, множина Кантора, множина канторівського типу, сингулярно розподілена випадкова величина, спектр розподілу, арифметична сума множин.

National Pedagogical Dragomanov University[1,3,4], Institution of mathematics of NAS Ukraine[1,2], Kyiv, Ukraine
e-mail: [1]*pras4444@gmail.com*, [2]*ratush404@gmail.com*,
[3]*yu.o.symonenko@npu.edu.ua*, [4]*darina.shpytyuk@gmail.com*

Вступ

Нехай $A_s = \{0, 1, ..., s-1\}$ — алфавіт (набір цифр), $L_s = A_s \times A_s \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ — s-кове зображення числа $x \in [0;1]$, тобто $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n}$, де $(\alpha_n) \in L_s$. Відомо, що арифметичною сумою двох числових множин A і B називається множина $C = A \oplus B = \{x : x = a + b, a \in A, b \in B\}$. Ця операція над числовими множинами є достатньо продуктивною у теорії нескінченних згорток Бернуллі [8], теорії фракталів та геометрії числових рядів [3–5, 7, 10].

Відомо, що множина Кантора $C = C[3; \{0; 2\}] = \{x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_n}{3^n}, (\alpha_n) \in L_2\}$ є досконалою ніде не щільною множиною, нульової міри Лебега; арифметичною сумою двох множин Кантора є відрізок $[0; 2]$, а двох множин канторівсього типу

УДК 511.7+519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 28A80, 28A78, 58F14.

$C[4;\{0;3\}] = \{x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3\alpha_k}{4^k}, (\alpha_k) \in L_2\}, C[4;\{0,2\}] = \{x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{4^k}, (\alpha_k) \in L_2\}$ є канторвал [3] — специфічне об'єднання нескінченної кількості інтервалів і множини канторівського типу (досконалої, ніде не щільної множини нульової міри Лебега) [11].

Класичним канторівським розподілом називається розподіл випадкової величини

$$\tau = \frac{\theta_1}{3} + \frac{\theta_2}{3^2} + ... + \frac{\theta_n}{3^n} + ... = \Delta^3_{\theta_1\theta_2...\theta_n...},$$

де (θ_n) — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами $P\{\theta_n = 0\} = \frac{1}{2} = P\{\theta_n = 2\}$, $P\{\theta_n = 1\} = 0$. Випадкова величина τ має сингулярний розподіл (функція розподілу є неперерною і має похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега). Його спектром (множиною точок росту функції розподілу) є класична множина Кантора.

Згортка двох сингулярних розподілів випадкових величин (це розподіл суми двох незалежних випадкових величин) має своїм спектром (мінімальним замкненим носієм) множину, яка є арифметичною сумою спектрів компонент згортки. Оскільки досі невідомі критерії сингулярності (абсолютної неперервності) згортки двох сингулярних розподілів, то окремі частинні випадки іноді представляють науковий інтерес [1,2,8,9].

Кажуть, що випадкова величина X має *сингулярний розподіл канторівського типу*, якщо її спектр є множиною нульової міри Лебега.

У даній роботі ми розглядаємо згортку двох сингулярних розподілів канторівського типу, друга компонента якої технічно зручна для класичного канторівського розподілу, а саме розподіл випадкової вличини $\xi = \tau + \eta$, де τ, η — незалежні випадкові вегличини, причому τ має класичний канторівсий розподіл, а η — випадкова величина з сингулярним розподілом канторівського типу, цифри дев'ятіркового зображення якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами. Нас цікавлять умови, при яких ξ має сингулярний розподіл канторівського типу.

Випереджаючи вивчення основних об'єктів дослідження, розглянемо представлення чисел у системі з основою 9 сімнадцятисимвольним алфавітом: $A_{17} = \{0, 1, ..., 16\}$.

1 Система зображення дійсних чисел з надлишковим алфавітом

Для довільного $x \in [0;2]$ існує послідовність $(\gamma_n) \in L_{17}$ така, що

$$x = \frac{\gamma_1}{9} + \frac{\gamma_2}{9^2} + \frac{\gamma_3}{9^3} + ... + \frac{\gamma_n}{9^n} + ... \equiv \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_n,...}. \tag{1}$$

Обгрунтування цього твердження і алгоритм розклад числа в ряд (1) проводиться аналогічно до міркувань, наведених у роботі [6]. Ряд (1) називається *дев'ятірковим представленням з надлишковим сімнадцятисимвольним алфавітом* числа x, а скорочений запис $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_n,...}$ — його *дев'ятірковим зображенням* з алфавітом A_{17} (коротко (17/9)-*зображенням*). Геометрію (17/9)-зображення частково розкривають властивості циліндричних множин.

Означення 1. (17/9)-*циліндром рангу m з основою $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_m$ називається множина* $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_m} = \{x \in [0;2] : x = \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_m,\alpha_1,\alpha_2,...}\forall(\alpha_n) \in L_{17}.\}$

Для (17/9)-циліндрів справедливі наступні властивості:

1) $\Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{16} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m,i}$;

2) $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\ldots,\gamma_m} = [a; a+\frac{2}{9^m}]$, де $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\gamma_i}{9^i}$;

3) $|\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\ldots,\gamma_m}| = \dfrac{2}{9^m}$; $\dfrac{|\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\ldots,\gamma_m,i}|}{|\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\ldots,\gamma_m}|} = \dfrac{1}{9}$;

4) для будь-якої послідовності $(\gamma_m) \in L_{17}$ $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m} = x = \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m,\ldots}$;

5) для довільних трьох послідовних циліндрів $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i-1}$, $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i}$ і $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i+1}$, $i \in A_{17} \setminus \{0, 16\}$ має місце рівність:

$$\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i} \subset \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i-1} \cup \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i+1}. \tag{2}$$

Справді, оскільки

$$\begin{aligned}
\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i-1} &= [a+\frac{i-1}{9^m}; a+\frac{i-1}{9^m}+\frac{2}{9^m}] = [a+\frac{i-1}{9^m}; a+\frac{i+1}{9^m}],\\
\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i} &= [a+\frac{i}{9^m}; a+\frac{\gamma_i}{9^m}+\frac{2}{9^m}] = [a+\frac{i}{9^m}; a+\frac{\gamma_{i+2}}{9^m}],\\
\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i+1} &= [a+\frac{i+1}{9^m}; a+\frac{\gamma_{i+1}}{9^m}+\frac{2}{9^m}] = [a+\frac{i+1}{9^m}; a+\frac{\gamma_{i+3}}{9^m}],
\end{aligned}$$

де $a = \sum\limits_{k=1}^{m-1} \dfrac{\gamma_k}{9^k}$, і $\max \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i-1} = \min \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1},i+1}$, то рівність (2) є очевидною.

6) Для циліндрів (17/9)-зображення мають місце рівності:

$$\bigcup_{i=0}^{8} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},2i} = \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1}}; \tag{3}$$

$$\Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},0} \cup \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},16} \cup \bigcup_{i=1}^{8} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},2i-1} = \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1}}. \tag{4}$$

Справді, оскільки має місце (2), то справедливими є рівності:

$$\Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1}} = \bigcup_{i=0}^{16} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},i} = \bigcup_{i=0}^{16} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},i} \setminus \bigcup_{i=1}^{8} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},2i-1} = \bigcup_{i=0}^{8} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},2i},$$

$$\Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1}} = \bigcup_{i=0}^{16} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},i} \setminus \bigcup_{i=1}^{7} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},2i} = \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},0} \cup \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},16} \cup \bigcup_{i=1}^{8} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},2i-1}.$$

7) $\Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m,i} \cap \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m,i+1} = \bigcup\limits_{j=5}^{8} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m,i,2j-1} \cup \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m,i,16} = \bigcup\limits_{j=0}^{3} \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m,i,2j} \cup \Delta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m,i+1,7}$.

Лема 1. *Якщо a, b, $a+1$, $b-9$ належать алфавіту A_{17}, то заміна пари $\overline{a,b}$ послідовних цифр у (17/9)-зображенні числа на пару цифр $\overline{a+1,b-9}$ не змінює його значення.*

Доведення. Твердження випливає з рівності

$$\frac{a}{9^m}+\frac{b}{9^{m+1}}=\frac{a+1}{9^m}+\frac{b-9}{9^{m+1}},$$

яка виконується для вказаних цифр алфавіту A_{17}. □

Наслідок 1. *Для циліндрів m-го рангу мають місце рівності:*

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,9}=\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,0}, && \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,10}=\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,1},\\
&\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,11}=\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,2}, && \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,12}=\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,3},\\
&\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,13}=\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,4}, && \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,14}=\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,5},\\
&\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,15}=\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,6}, && \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,16}=\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,7}.
\end{aligned}\tag{5}$$

Лема 2. *Циліндр $(m+1)$-го рангу має не більше 2^m альтернативних зображень.*

Доведення. Очевидно, що циліндр $\Delta_{0\ldots0}$ має єдине зображення. Кількість формально різних зображень одного і того ж циліндра залежить від наявності у його зображенні пар послідовних цифр для яких існують еквівалентні заміни. Розглянемо випадок, коли їх максимальна кількість. Скористаємося методом математичної індукції. Нехай $m=1$. Розглянемо циліндр Δ_{c_1,c_2}. Тоді $\Delta_{c_1,c_2}=\Delta_{c_1-1,c_2+9}$, якщо $c_2<9$ або $\Delta_{c_1,c_2}=\Delta_{c_1+1,c_2-9}$, якщо $c_2\geq 9$. Таким чином кількість зображень дорівнює 2^1.

Припустимо, що рівність виконується при $m=k$, тобто кількість зображень для циліндра $(k+1)$-го рангу дорівнює 2^k. Розглянемо циліндр $(k+2)$-го рангу $\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{k+1},c_{k+2}}$. Циліндр $\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{k+1},c_{k+2}}$ має 2^k різне зображення зображення:

$$\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{k+1},c_{k+2}}=\Delta_{c_1^1,c_2^1,\ldots,c_{k+1}^1,c_{k+2}^1}=\ldots=\Delta_{c_1^{2^k-1},c_2^{2^k-1},\ldots,c_{k+1}^1,c_{k+2}^{2^k-1}},$$

де $c_1^j,c_2^j,\ldots,c_{k+1}^j,c_{k+2}^j$ — j-та комбінація j-того зображення циліндра, $j=\overline{1,2^k-1}$. Тоді зображення циліндрів $(k+2)$-го рангу можна записати наступним чином

$$\Delta_{0,c_1,c_2,\ldots,c_{k+1},c_{k+2}}=\Delta_{0,c_1^1,c_2^1,\ldots,c_{k+1}^1,c_{k+2}^1}=\ldots=\Delta_{0,c_1^{2^k-1},c_2^{2^k-1},\ldots,c_{k+1}^1,c_{k+2}^{2^k-1}}.$$

Для кожного із зображень існує альтернативне: $\Delta_{0,c_1^j,c_2^j,\ldots,c_{k+1}^j,c_{k+2}^j}=\Delta_{0-1,c_1^1+9,c_2^1,\ldots,c_{k+1}^1,c_{k+2}^1}$. Тоді кожен циліндр $(k+2)$-го рангу має $2\cdot 2^k$ зображень. Згідно принципу математичної індукції умови леми виконуються для будь-якого натурального k. □

2 Арифметична сума двох множин канторівського типу

Розглядається множина Кантора $C=C[3;\{0,2\}]$ і множина канторівського типу $C[9;V]=\{x\in[0;1]:x=\Delta^9_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},\beta_n\in V\subset A_9\}$.

Теорема 1. *Арифметична сума множин C і $C_1=C[9;\{0,8\}]$ є самоподібною множиною канторівськогого типу нульової міри Лебега з самоподібною розмірністю $\alpha=\log_9 7$.*

Доведення. Перекодуємо $x \in C$ у трійковій системі числення, а саме:

$$C \ni x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + ... + \frac{\alpha_{2k-1}}{3^{2k-1}} + \frac{\alpha_{2k}}{3^{2k}} + ... = \frac{3\alpha_1 + \alpha_2}{9} + ... + \frac{3\alpha_{2k-1} + \alpha_{2k}}{3^{2k}} + ... = \Delta^9_{\gamma_1 ... \gamma_k ...},$$

де $\gamma_k = 3\alpha_{2k-1} + \alpha_{2k} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}) = (0,0), \\ 2, \text{ якщо } (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}) = (0,2), \\ 6, \text{ якщо } (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}) = (2,0), \\ 8, \text{ якщо } (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}) = (2,2). \end{cases}$

Таким чином, $C[3; \{0,2\}] = C[9; \{0,2,6,8\}]$. Тоді арифметична сума C і C_1

$$C \oplus C_1 = \{x : x = \frac{\gamma_1 + \beta_1}{9} + \frac{\gamma_2 + \beta_2}{9^2} + ... + \frac{\gamma_n + \beta_n}{9^n} + ... = \Delta^9_{d_1 d_2 ... d_n ...}, \}$$

де $d_n = \gamma_n + \beta_n = \begin{cases} 0 \text{ при } \gamma_n = 0, \beta_n = 0, \\ 2 \text{ при } \gamma_n = 0, \beta_n = 2, \\ 6 \text{ при } \gamma_n = 0, \beta_n = 6, \\ 8 \text{ при } \gamma_n = 0, \beta_n = 8 \text{ або } \gamma_n = 8, \beta_n = 0, \\ 10 \text{ при } \gamma_n = 8, \beta_n = 2, \\ 14 \text{ при } \gamma_n = 8, \beta_n = 6, \\ 16 \text{ при } \gamma_n = 8, \beta_n = 8. \end{cases}$

Оскільки $d_n = 2c_n$, де $c_n \in \{0,1,3,4,5,7,8\}$, то $C \oplus C_1 = 2 \odot C[9; \{0,1,3,4,5,7,8\}]$. Як відомо, множина $C[9; \{0,1,3,4,5,7,8\}]$ є самоподібною множиною канторівського типу нульової міри Лебега з самоподібною розмірністю, що є розв'язком рівняння $7 \cdot (\frac{1}{9})^x = 1$, тобто $x = \log_9 7$. Оскільки самоподібна розмірність подібних множин збігається, то самоподібна розмірність множини $C \oplus C_1$ рівна $\alpha = \log_9 7$. □

3 Згортка двох сингулярних розподілів канторівського типу

Нехай $\tau = \Delta^9_{\tau_1 \tau_2 ... \tau_n ...}$ і $\eta = \Delta^9_{\eta_1 \eta_2 ... \eta_n ...}$ — випадкові величини, дев'ятіркові цифри τ_n і η_n яких є незалежними випадковими величинами з розподілами $P\{\tau_n = i\} = p_i \geq 0$, $p_1^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = 0$ і $P\{\eta_n = j\} = q_i \geq 0$, $j \in \overline{0,16}$, $\sum\limits_{j=0}^{16} q_j = 1$, $\max\limits_i \{q_i\} \neq 1$.

Очевидно, що спектром функції розподілу випадкової величини τ є класична множина Кантора, міра Лебега якої рівна 0. Випадкова величина η має неперервний розподіл, оскільки $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i \{P\{\tau_k = i\}\} = 0$. Її спектром розподілу є множина нульової міри Лебега. Отже η має сингулярний розподіл канторівського типу.

Розглядається випадкова величина $\xi = \tau + \eta$. Очевидно, що

$$\xi = \frac{\tau_1 + \eta_1}{9} + \frac{\tau_2 + \eta_2}{9^2} + ... + \frac{\tau_n + \eta_n}{9^n} + ... = \frac{\xi_1}{9} + \frac{\xi_2}{9^2} + ... + \frac{\xi_n}{9^n} + ...,$$

де $\xi_n \equiv \tau_n + \eta_n \in \{\eta_n, \eta_n + 2, \eta_n + 6, \eta_n + 8\}$. Спектром S_ξ випадкової величини ξ є арифметична сума спектрів випадкових величини η і τ, тобто $S_\xi = S_\eta \oplus S_\tau$.

Приклад 1. Якщо $\eta = \Delta^9_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}$ — випадкова величина, дев'ятіркові цифри η_n якої є незалежними випадковими величинами з розподілами: $P\{\eta_n = 0\} = q_0 > 0$, $P\{\eta_n = 8\} = q_8 > 0$, $P\{\eta_n = i\} = q_i = 0$, $i = \overline{1,7}$, $\sum\limits_{i=0}^{8} q_i = 1$, то розподіл цифр випадкової величини $\xi = \tau + \eta = \Delta_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$, де $\xi_n \in \{0, 2, 6, 8, 10, 14, 18\}$ визначається рівностями:

$P\{\xi_n = 0\} = P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 0\} = p_0q_0$, $P\{\xi_n = 2\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 0\} = p_2q_0$,
$P\{\xi_n = 6\} = P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 0\} = p_6q_0$,
$P\{\xi_n = 8\} = P\{\tau_n = 8 \wedge \eta_n = 0\} + P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 8\} = p_8q_0 + p_0q_8$,
$P\{\xi_n = 10\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 8\} = p_2q_8$, $P\{\xi_n = 14\} = P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 8\} = p_6q_8$,
$P\{\xi_n = 16\} = P\{\tau_n = 8 \wedge \eta_n = 8\} = p_8q_8$, $P\{\xi_n = i\} = 0$, де $i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$,
оскільки випадкові величини τ_n і η_n незалежні.

Ввівши позначення для випадкової величини: $\xi = 2\zeta$, матимемо, що $\zeta = \Delta^9_{\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n\ldots}$ — випадкова величина дев'ятіркові цифри якої є випадковими величинами, що набувають значень $\{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$ з розподілами:

$P\{\zeta_n = 0\} = P\{\xi_n = 0\} = p_0q_0$, $P\{\zeta_n = 1\} = P\{\xi_n = 2\} = p_2q_0 \equiv r_0$,
$P\{\zeta_n = 3\} = P\{\xi_n = 6\} = p_6q_0 \equiv r_3$, $P\{\zeta_n = 4\} = P\{\xi_n = 8\} = p_8q_0 + p_0q_8 \equiv r_4$,
$P\{\zeta_n = 5\} = P\{\xi_n = 10\} = p_2q_8 \equiv r_5$, $P\{\zeta_n = 7\} = P\{\xi_n = 14\} = p_6q_8 \equiv r_7$,
$P\{\zeta_n = 8\} = P\{\xi_n = 16\} = p_8q_8 \equiv r_8$, $P\{\zeta_n = i\} = 0$, $i \in \{2, 6\}$.

Лема 3. *Випадкова величина ζ має сингулярно неперервний розподіл канторівського типу, спектром якого є досконала, ніде не щільна множина нульової міри Лебега $C[9; A_9 \setminus \{2, 6\}]$.*

Доведення. Доведемо, що ζ є неперервно розподіленою випадковою величиною. Для цього покажемо, що ймовірність кожної одноточкової множини рівна нулю. Розглянемо циліндр m-го рангу дев'ятіркової системи зображення. Згідно з властивостями циліндрів $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^9_{c_1c_2\ldots,c_m} = x_0 = \Delta^9_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$. Ймовірність того, що випадкова величнa ζ набуває значення з циліндра $\Delta^9_{c_1c_2\ldots c_m}$ обчислюється за формулою:

$$P\{\zeta \in \Delta^9_{c_1c_2\ldots c_m}\} = P\{\zeta_1 = c_1 \wedge \zeta_2 = c_2 \wedge \ldots \wedge \zeta_m = c_m\} = \prod_{i=1}^{m} P\{\zeta_i = c_i\} = \prod_{i=1}^{m} r_{c_i}.$$

Тоді

$$P\{\zeta = x_0\} = \lim_{m\to\infty} P\{\zeta \in \Delta^9_{c_1c_2\ldots c_m}\} = \prod_{i=1}^{\infty} r_{c_i} \le \prod_{i=1}^{\infty} \max_{i=0,3,4,5,7,8}\{r_{c_i}\} = 0.$$

Оскільки множина $C[9; \{0, 1, 3, 5, 7, 8\}]$ є замкненою досконалою множиною, на якій зосереджена ймовірнісна міра, то вона є спектром S_ζ випадкової величини ζ. З урахуванням нуль-мірність спектра випливає, що ζ сингулярно розподілена. Оскільки $P\{\zeta_n = 2\} = P\{\zeta_n = 4\} = P\{\zeta_n = 6\} = 0$ для $n \in N$, то ζ має канторівський тип розподілу. $\square$

Наслідок 2. *Випадкова величина $\xi = \eta + \tau$ має сингулярно неперервний розподіл канторівського типу, спектром якого є множина $S_\eta \oplus S_\tau = C_2[9; \{0, 2, 6, 8, 10, 14, 16\}]$.*

Приклад 2. Якщо $\eta = \Delta^9_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}$ випадкова величина, дев'ятіркові цифри η_n якої є незалежними випадковими величинами з розподілами $P\{\eta_n = i\} = q_i \ge 0$, $i = \overline{0,8}$, $\sum\limits_{i=0}^{8} q_i = q_0 + q_1 + q_7 + q_8 = 1$, то розподіл цифр випадкової величини $\xi = \tau + \eta = \Delta^9_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$,

де $\xi_n \in A_{17} \setminus \{4,5,11,12\}\}$ визначається з системи рівностей:
$P\{\xi_n = 0\} = P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 0\} = p_0 q_0 \equiv p'_0$,
$P\{\xi_n = 1\} = P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 1\} = p_0 q_1 \equiv p'_1$,
$P\{\xi_n = 2\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 0\} = p_2 q_0 \equiv p'_2$,
$P\{\xi_n = 3\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 1\} = p_2 q_1 \equiv p'_3$,
$P\{\xi_n = 6\} = P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 0\} = p_6 q_0 \equiv p'_6$,
$P\{\xi_n = 7\} = P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 7\} + P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 1\} = p_0 q_7 + p_6 q_1 \equiv p'_7$,
$P\{\xi_n = 8\} = P\{\tau_n = 8 \wedge \eta_n = 0\} + P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 8\} = p_8 q_0 + p_0 q_8 \equiv p'_8$,
$P\{\xi_n = 9\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 7\} = p_2 q_7 \equiv p'_9$,
$P\{\xi_n = 10\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 8\} = p_2 q_8 \equiv p'_{10}$,
$P\{\xi_n = 13\} = P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 7\} = p_6 q_7 \equiv p'_{13}$,
$P\{\xi_n = 14\} = P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 8\} = p_6 q_8 \equiv p'_{14}$,
$P\{\xi_n = 15\} = P\{\tau_n = 8 \wedge \eta_n = 7\} = p_8 q_7 \equiv p'_{15}$,
$P\{\xi_n = 16\} = P\{\tau_n = 8 \wedge \eta_n = 8\} = p_8 q_8 \equiv p'_{16}$,
$P\{\xi_n = 4\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 2\} = P\{\tau_n = 4 \wedge \eta_n = 0\} = P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 4\} = 0 \equiv p'_4$,
$P\{\xi_n = 5\} = 0 \equiv p'_5$, $P\{\xi_n = 11\} = 0 \equiv p'_{11}$, $P\{\xi_n = 12\} = 0 \equiv p'_{12}$.

Лема 4. *Якщо для* $(17/9)$*-зображення числа* $x = \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_m,c_{m+1},c_{m+2},\ldots}$ *виконуються умови* $c_i \in \{0,6,13\}$*, а* $c_{i+1} \in \{0,3,6\}$*,* $i \in N$ *або* $c_i \in \{3,10,16\}$*, а* $c_{i+1} \in \{10,13,16\}$*,* $i \in N$ *та існує цифра* $c_k \in \overline{V} = \{4,5,11,12\}$*, то кожне зображення числа* x *містить цифри множини* $\overline{V}$*.*

Доведення. Не порушуючи загальності, нехай $c_{m+1} \in \overline{V}$, $c_{m+1} = 4$. Тоді число x має два зображення: $\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_m,4,c_{m+2},\ldots} = \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_m-1,13,c_{m+2},\ldots}$. Цифра $c_m - 1 \in \overline{V}$, якщо $c_m = 0$, $c_m = 6$, $c_m = 13$. Розглянемо інші зображення числа, беручи до уваги значення m-ої цифри:

1) якщо $c_m < 9$, то $c_m = 0,3,6$, то

$$\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},c_m,4,c_{m+2},\ldots} = \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},c_m-1,13,c_{m+2},\ldots}.$$

Цифра $c_{m-1} - 1 \in \overline{V}$, якщо $c_{m-1} = 0$ (у цьому випадку альтернативного зображення не існує), $c_{m-1} = 6$, $c_{m-1} = 13$;

2) якщо $c_m > 9$, то $c_m = 10,13,16$, то

$$\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},c_m,4,c_{m+2},\ldots} = \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},c_m-1,13,c_{m+2},\ldots}.$$

Цифра $c_{m-1} + 1 \in \overline{V}$, якщо $c_{m-1} = 3$, $c_{m-1} = 10$, $c_{m-1} = 16$ (у цьому випадку альтернативного зображення не існує).

Беручи до уваги значення $m-1$-ої цифри, проаналізуємо інші зображення числа:

1) якщо $c_{m-1} < 9$, тобто $c_{m-1} = 0,3,6$

$$\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-2},c_{m-1},c_m,4,c_{m+2},\ldots} = \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-2}-1,c_{m-1}+9,c_m-1,13,c_{m+2},\ldots}.$$

Цифра $c_{m-2} - 1 \in \overline{V}$, якщо $c_{m-2} = 0$ (у цьому випадку альтернативного зображення не існує), $c_{m-2} = 6$, $c_{m-2} = 13$;

2) якщо $c_{m-1} > 9$, то $c_{m-1} = 10, 13, 16$, то

$$\Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-2},c_{m-1},c_m,4,c_{m+2},...} = \Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-2}+1,c_{m-1}-9,c_m-1,13,c_{m+2},...}.$$

Цифра $c_{m-2}+1 \in \overline{V}$, якщо $c_{m-2} = 3$, $c_{m-2} = 10$, $c_{m-2} = 16$ (у цьому випадку альтернативного зображення не існує).

Аналогічно проаналізувавши всі значення цифр c_{m-3},...,c_2, c_1 отримаємо те, що для того, щоб кожне зображення числа x містило цифри множини $\overline{V}$, необхідно щоб цифри зображення $x = \Delta_{c_1,c_2,...,c_m,c_{m+1},c_{m+2},...}$ задовольняли умову лему. У випадку, коли $c_{m+1} = 5$ або $c_{m+1} = 11$ або $c_{m+1} = 12$ міркування аналогічні. □

Лема 5. *Циліндрів m-го рангу $\Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},i}$, де $i \in \{4,5,11,12\}$, усі альтернативні зображення яких містять цифри множини $\overline{V} = \{4,5,11,12\}$ існує $2 \cdot 3^{m-1}$.*

Доведення. Згідно з лемою 4 для того, щоб кожне альтернативне зображення циліндра $\Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},i}$ містило цифру з множини необхідно, що цифри $c_i \in \{0,3,6,10,13,16\}$, причому, якщо $c_i = 0,6,13$, то $c_{i+1} = 0,3,6$ або, якщо $c_i = 3,10,16$, то $c_{i+1} = 10,13,16$ $i = 1,2,...,m-2$. Тоді за правилом добутку таких циліндрів $\Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},i}$ з фіксованим значенням цифри i буде $6 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3 = 2 \cdot 3^{m-1}$. □

Теорема 2. *Спектру S_ξ розподілу випадкової величини ξ належить злічення кількість відрізків, загальної довжини $\frac{5}{3}$, а саме: $C[9; A_{17} \setminus \overline{V}\}] \subset S_\xi$.*

Доведення. З урахуванням леми 4 і системи рівностей циліндрів:

$\Delta_{4,a} = \Delta_{5,a-9}$ і $\Delta_{3,a} = \Delta_{4,a-9}, \Delta_{5,a} = \Delta_{6,a-9}$, де $a \in \{9,10,11,12,13,14,15,16\}$;
аналогічно

$\Delta_{11,a} = \Delta_{12,a-9}$ і $\Delta_{10,a} = \Delta_{11,a-9}, \Delta_{11,a} = \Delta_{12,a-9}$, де $a \in \{9,10,11,12,13,14,15,16\}$, множина S_ξ може бути отримана як різниця відрізка $[0;2]$ і системи перетинів

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},4} \cap \Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},5}, \bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},11} \cap \Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},12},$$

де $c_i \in \{0,3,6,10,13,16\}$, причому, якщо $c_i \in \{0,6,13\}$, то $c_{i+1} \in \{0,3,6\}$ або, якщо $c_i \in \{3,10,16\}$, то $c_{i+1} \in \{10,13,16\}$, $i = 1,2,...,m-2$, тобто

$$S_\xi = [0;2] \setminus \{\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},4} \cap \Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},5} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},11} \cap \Delta_{c_1,c_2,...,c_{m-1},12}\}.$$

Тоді

$$\lambda(S_\xi) = \lambda([0;2]) - \lambda(\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,...,c_{m-1},4} \cap \Delta_{c_1,...,c_{m-1},5}) - \lambda(\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,...,c_{m-1},11} \cap \Delta_{c_1,...,c_{m-1},12}).$$

Оскільки, $\lambda(\Delta_{c_1,...,c_{m-1},4} \cap \Delta_{c_1,...,c_{m-1},5}) = \frac{1}{9^m} = \lambda(\Delta_{c_1,...,c_{m-1},11} \cap \Delta_{c_1,...,c_{m-1},12})$, то

$$\lambda(S_\xi) = 2 - (\frac{2}{9^1} - \frac{2 \cdot 3}{9^2} - \frac{2 \cdot 3^2}{9^3} - \frac{2 \cdot 3^3}{9^4} - ...) = 2 - \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{3}{9}} = \frac{5}{3}.$$ □

Наслідок 3. *Випадова величина ξ є неперервною випадковою величиною, розподіл якої зосереджений на множині $S_\xi = C[9; A_{17} \setminus \{4,5,11,12\}]$.*

Зауваження 1. *Спектр S_ξ є множиною неповних сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_{4k-3} = \frac{1}{9^k}$, $u_{4k-2} = \frac{2}{9^k}$, $u_{4k-1} = \frac{6}{9^k}$, $u_{4k} = \frac{7}{9^k}$, $k \in N$.*

Список літератури

[**1**] Albeverio S., Gontcharenko Ya., Pratsiovytui M., Torbin G. *Convolutions of distributions of random variable with independent binary digits.* Random Operators and Stochastic Equations. 2007. Vol. 15, no.1. P.89–104.

[**2**] Goncharenko Ya.V., Pratisovytyi M.V., Tirbin G.M., *Topological and metric and fractal properties of the convolution of two singular distributions of random variables with independent binary digits.*. Theory of Probability and Mathematical Statistics 2002, No. 67, P.9–19.(in Ukrainian)

[**3**] Guthrie J. A., Nymann J. E. *The topological structure of the set of subsums of an infinite series.* Colloq. Math. 1988, **55** (2), P. 323–327, http://eudml.org/doc/265741.

[**4**] Kakeya S. *On the partial sums of an infinite series.* Tohoku Sci Rep., 1914, **3** (4), P. 159–164, DOI:10.11429/PTMPS1907.7.14250.

[**5**] Mendes P., Oliveira F. *On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets.* Nonlinearity, 1994, **7** (2), P. 329–343, doi: 10.1088/0951-7715/7/2/002.

[**6**] Mykytuk I.O., Pratsiovytyi M.V. *The binary number system with redundant digits and its corresponding metric number theory.* Scientific notes of the Dragomanov National Pedagogical Universyty. Physical and mathematical sciences 2003, 4, P. 270–290. (in Ukrainian)

[**7**] Nymann J. E. *Linear combination of Cantor sets.* Colloq. Math., 1995, **68**. P. 259–264, DOI: 10.2478/tmmp-2013-00

[**8**] Pratsiovytyi M.V. *Fractal approach to the study of singular distributions* — Kyiv: Nats. Pedagog. Mykhailo Dragomanov Univ., 1998. (in Ukrainian)

[**9**] Pratsiovytyi M.V. *Convolutions of singular distributions.* Additional NAS of Ukraine, 1997, № 9, P. 36–42. (in Ukrainian)

[**10**] Solomyak B. *On the measure of arithmetic sums of Cantor sets.* Indag. Mathem., N.S. 1997, **8**, P. 133–141, DOI:10.1016/S0019-3577(97)83357-5.

[**11**] Turbin A.F., Pratsiovytyi M.V. Fractal set, functions and distibutions. Naukova dumka, 1992, 208 p.

Надійшло 26.12.2022

Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P., Symonenko Yu.O., Shpytuk D.S. *Convolution of two singular distributions: classic Cantor type and random variable with independent nine digits*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 204–212.

We consider distribution of random variable $\xi = \tau + \eta$, where τ and η independent random variables, moreover τ has classic Cantor type distribution and η is a random variable with independent identically distributed digits of the nine-digit representation. With additional conditions for the distributions of the digits η, sufficient conditions for the singularity of the Cantor type of the distribution ξ are specified. To substantiate the statements, a topological-metric analysis of the representation of numbers $x \in [0;2]$ in the numerical system with base 9 and a seventeen-symbol alphabet (a set of numbers) is carried out. The geometry (positional and metric) of this representation is described by the properties of the corresponding cylindrical sets.

Процах Н.П.[1], Івасюк Г.П.[2], Фратавчан Т.М.[2]

ПРО ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА

У статті розглянуто задачі для систем рівнянь та рівнянь типу Ейдельмана, які були великою частиною наукових досліджень С.Д. Івасишена. Наведено огляд результатів досліджень задач Коші, мішаних та обернених задач для такого типу рівнянь в обмежених та необмежених областях. Результатами є оцінки розв'язків, інтегральні зображення розв'язків, теореми існування, єдиності та стійкості розв'язків.

Ключові слова і фрази: параболічна за Ейдельманом система рівнянь, матриця Ґріна, задача Коші, мішана задача, обернена задача, простір Гельдера, простір Соболєва, існування та єдиність розв'язків, стійкість розв'язків.

[1] Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, Україна

[2] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна.
e-mail: *protsakh@ukr.net, h.ivasjuk@chnu.edu.ua, t.fratavchan@chnu.edu.ua*

Вступ

У 1960 році проф. С.Д. Ейдельман у праці [22] узагальнив рівняння, параболічні за Петровським, ввівши новий клас систем рівнянь

$$\frac{\partial^{n_i} u}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0+\frac{k_1}{2b_1}+\dots+\frac{k_n}{2b_n}\le n_j} A_{ij} \frac{\partial^{k_0+k_1+\dots+k_n} u}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}, \quad i = 1,\ 2, \dots,\ N, \tag{1}$$

які названо $2\vec{b}$ – параболічними (параболічними за Ейдельманом) в області G, якщо для довільних $(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in G$ і $\sigma_1,\ \sigma_2, \dots, \sigma_n$ таких, що $\sigma_1^{2b_1} + \sigma_2^{2b_2} + \dots + \sigma_n^{2b_n} = 1$, система рівнянь

$$\det \left\| \sum_{k_0+\frac{k_1}{2b_1}+\dots+\frac{k_n}{2b_n}\le n_j} A_{ij}\lambda^{k_0}(i\sigma)^k \right\| - \left\| \begin{matrix} \lambda^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{n_N} \end{matrix} \right\| = 0$$

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K52, 35B53.

має корені $\lambda_i(t,x,\sigma)$, дійсні частини яких задовольняють нерівності $\mathrm{Re}\,\lambda_i(t,x,\sigma)<-\delta$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$, $2\vec{b}=(2b_1,2b_2,\ldots,2b_n)$, $\delta>0$.

У 1968 р. з'явилась фундаментальна в теорії $2\vec{b}$-параболічних систем праця С.Д. Івасишена та С.Д. Ейдельмана [8], в якій проведено досить повне та точне дослідження властивостей фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) задачі Коші та породжених нею потенціалів, знайдено класи коректності задачі Коші для лінійних систем при різних припущеннях щодо неоднорідності систем і початкових функцій, встановлено локальну розв'язність нелінійних систем і вивчено питання про продовження їх розв'язків на ширший часовий інтервал, одержано внутрішні оцінки розв'язків та доведено гіпоеліптичність $2\vec{b}$-параболічних систем. Детальний огляд таких систем та результатів для них є у монографії [23].

Пізніше системи рівнянь (1) узагальнювалися багатьма вченими. Зокрема, С.Д. Івасишеним та Г.П. Івасюк розглянуто новий клас систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, який поєднує у собі структури систем, параболічних за Солонниковим і Ейдельманом [12]. У цих системах порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати від j та від k, крім того диференціювання за різними просторовими змінними мають загалом різну вагу стосовно диференціювання за часовою змінною. Для таких систем рівнянь доведено теореми про коректну розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана у просторах Гельдера швидкозростаючих функцій, а також у відповідних просторах Соболєва-Слободецького для дещо вужчого класу [13].

1 Про лінійні $2\vec{b}$-параболічні системи рівнянь

$2\vec{b}$-параболічні системи рівнянь в обмежених за часом областях

У працях С.Д. Івасишена [6], [7] знайдено необхідні і достатні умови, за яких розв'язки однорідних $2\vec{b}$-параболічних систем зображаються у вигляді інтегралів Пуассона функцій або узагальнених мір зі спеціальних вагових просторів. Сукупності цих функцій та узагальнених мір є множинами початкових значень досліджуваних розв'язків. У цих працях з'ясовано також, в якому сенсі ці розв'язки задовольняють початкові умови. Доповнено властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для загальних $2\vec{b}$-параболічних систем першого порядку за часовою змінною, зокрема, знайдено формули, які виражають коефіцієнти системи через ФМР, у праці С.Д. Івасишена та Г.П. Івасюк [11].

$2\vec{b}$-параболічні системи довільних порядків диференціювання за часовою змінною розглядалися у праці С.Д. Івасишена та О.С. Кондур [9]. Зокрема, там описана структура матриці Гріна задачі Коші для загальних $2\vec{b}$-параболічних систем та охарактеризовані деякі класи розв'язків таких систем як класи відповідних інтегралів Пуассона функцій зі спеціальних вагових просторів Соболєва. У праці Г.П.Івасюк [14] одержано оцінки півнорм у просторах Гельдера швидко зростаючих функцій об'ємного потенціалу та інтеграла Пуассона, породжених фундаментальним розв'язком модельного $2\vec{b}$-параболічного рівняння довільного порядку за всіма змінними.

С.Д. Івасишен та Г.С.Пасічник займалися випадком $\vec{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами [10]. На системи, що ними розглядалися, накладалися два набори умов, перший з яких вимагає певної гладкості коефіцієнтів системи, а другий – гельдеровість відносно $\vec{2b}$-параболічної відстані коефіцієнтів та спеціальні обмеження на характеристику дисипації. Для таких систем побудована фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші та одержані її оцінки. У цих працях також розглянутий клас $\vec{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами, які можна звести до дисипативних і для яких також існує фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші. Встановлені її оцінки, властивість нормальності та формула згортки.

$\vec{2b}$-параболічні системи рівнянь в необмежених за часом областях

У спільних роботах Івасишена С.Д., Балабушенко (Фратавчан) Т.М. розглядалися $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи рівнянь в областях, необмежених за часовою змінною. Для них були одержані такі результати:

- введені спеціальні $\Lambda_\delta^{m,r}$ -умови в термінах оцінок фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) і матриці Гріна задачі Коші (праці [2] – [3]);

- наведені приклади класів систем як першого, так і довільних порядків, які задовольняють $\Lambda_\delta^{m,r}$ -умови (праці [2] – [3]);

- встановлені інтегральні зображення та оцінки розв'язків, а також коректна розв'язність задачі Коші і задачі без початкових умов відповідно у півпросторах $t > 0$ і $t \leq T$ (праці [1] – [4]);

- доведені теореми про стійкість розв'язків задачі Коші та теореми типу Ліувілля (праці [1] – [4]);

- здійснена побудова та одержані оцінки ФМР поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породженої $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою (праця [5]).

Для короткого формулювання результатів будемо використовувати такі позначення. Нехай $n, b_1, \ldots, b_n$ – задані натуральні числа, причому $n \geq 2$, b – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_j := b/b_j, j \in \{1, \ldots, n\}$; $\mathbb{Z}_+^n$ – сукупність усіх n-вимірних мультиіндексів $k := (k_1, \ldots, k_n)$; $\|k\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j k_j$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$; $\|\bar{k}\| := 2bk_0 + \|k\|$, якщо $\bar{k} := (k_0, k)$, де $k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Нехай далі $N, n_1, ..., n_N$ – задані натуральні числа, $a_{k_0k}(t,x) = (a_{k_0k}^{lj}(t,x))_{l,j=1}^N$ – матриці порядку N, елементами яких є комплекснозначні функції, залежні від часової та просторової змінних $t \in \mathbb{R}$ і $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ відповідно, і нехай $u(t,x) = col(u_1(t,x), ..., u_N(t,x))$ – невідомий, а $f(t,x) = col(f_1(t,x), ..., f_N(t,x))$ – заданий стовпці.

Позначимо через $\Pi_m := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \in H_m, x \in \mathbb{R}^n\}$, $m \in \{1,2\}$, де $H_1 = (0, \infty)$, $H_2 = (-\infty, T]$. Розглянемо в $\Pi_m, m \in \{1,2\}$, $\overrightarrow{2b}$-параболічну систему рівнянь довільних порядків вигляду

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x) u(t,x) = f(t,x), \tag{2}$$

де $A(t, x, \partial_t, \partial_x) := (A_{lj}(t, x, \partial_t, \partial_x))_{l,j=1}^N$ і

$$A_{lj}(t,x,\partial_t,\partial_x) := \delta_{lj}\partial_t^{n_l} - \sum_{\substack{2bk_0+\|k\|\le 2bn_j\\ (k_0<n_j)}} a_{k_0k}^{lj}(t,x)\partial_t^{k_0}\partial_x^k.$$

У працях [2], [3] було введено означення $\Lambda_\delta^{m,r}$ -умов для систем вигляду (2).

Означення 1. *Система (2) задовольняє $\Lambda_\delta^{m,r}$ -умову, $\delta\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}_2$, $r\in\mathbb{Z}_+^1\bigcup\{\infty\}$, якщо для неї існує в Π_m матриця Гріна задачі Коші $G=(G_0,G_1,...,G_N)$, елементи якої мають похідні $\partial_t^{k_0}\partial_x^kG_0^{lj}$, $\partial_t^{k_0}\partial_x^kG_j^{l\mu}$, $2bk_0+||k||\le 2bn_l+r$, $k_0\le n_l,\mu\in\mathbb{N}_{n_j}$, $\{l,j\}\subset\mathbb{N}_N$, і справджуються оцінки*

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^kG_0^{lj}(t,x,\tau,\xi)|\le C_{k_0k}\prod_{\nu=1}^n(\alpha_\nu(t-\tau))^{-1-k_\nu+2bp_{0k_0}^{lj}(t-\tau)/M}e^{\delta(t-\tau)}\widehat{E}_c(t-\tau,x-\xi),$$

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^kG_j^{l\mu}(t,x,\tau,\xi)|\le C_{k_0k}\prod_{\nu=1}^n(\alpha_\nu(t-\tau))^{-1-k_\nu+2bp_{jk_0}^{l\mu}(t-\tau)/M}e^{\delta(t-\tau)}\widehat{E}_c(t-\tau,x-\xi),$$

$$\{t,\tau\}\subset\overline{H}_m,\ \tau<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 2bk_0+||k||\le 2bn_l+r,\ k_0\le n_l-1,$$

$$\mu\in\mathbb{N}_{n_j},\quad \{l,j\}\subset\mathbb{N}_N, \tag{3}$$

де $C_{k_0k}>0$, $c>0$, $\alpha_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$ – невід'ємні неспадні функції такі, що $\alpha_\nu(0)=0$ і $\alpha_\nu(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, $\widehat{E}_c(t,x):=\exp\left\{-c\sum\limits_{j=1}^n(\alpha_j(t))^{-q_j}|x_j|^{q_j}\right\}$, а $p_{0k_0}^{lj}$ і $p_{jk_0}^{l\mu}$ – деякі кусково-сталі функції.

Отримані оцінки ФМР мали своє застосування до дослідження властивостей розв'язків $\overrightarrow{2b}$ - параболічних систем в необмежених за часом областях. Зокрема у працях [1], [4], встановлені інтегральні зображення та оцінки розв'язків в необмежених за часом областях. Наведемо їх в теоремах 1 і 2.

Для будь-яких $t\ge 0,\ p\in[1,\infty]$ і $\eta:=(\eta_1,...,\eta_n)$ з $\eta_\nu\ge 0$, $\nu\in\mathbb{N}_n$, означимо норми

$$||v(t,\cdot)||_{p,\eta}:=||v(t,\cdot)\Phi_\eta(\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де

$$\Phi_\eta(x):=\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^n\eta_\nu|x_\nu|\right\},\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Теорема 1. *Нехай система (2) задовольняє $\Lambda_\delta^{1,0}$ -умову зі сталими $c>0$, $\delta\in\mathbb{R}$, функціями $\alpha_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$, $p_{0k_0}^{lj}$ і $p_{jk_0}^{l\mu}$, $k_0\in\mathbb{N}_{n_l-1}$, $\mu\in\mathbb{N}_{n_j}$, $\{l,j\}\subset\mathbb{N}_N$, і нехай $u=col(u_1,...,u_N)$ – такий регулярний розв'язок цієї системи, що для фіксованих p і η виконуються умови:*

1) $\forall T_0>0\ \exists C>0\ \forall t\in[0,T_0]\ \forall j\in\mathbb{N}_N\ \forall\mu\in\mathbb{N}_{n_j}:\ ||\partial_t^{\mu-1}u_j(t,\cdot)||_{p,\eta}\le C$,

2) $\forall\ \{l,j\}\subset\mathbb{N}_N\ \forall t\in H_1:$

$$||f_j(t,\cdot)||_{p,\eta}<\infty,\ \ \int_0^\infty\prod_{\nu=1}^n(\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M}p_{00}^{lj}(t-\tau)}||f_j(\tau,\cdot)||_{p,\eta}e^{-\delta\tau}d\tau<\infty.$$

Тоді для компонент розв'язку u в Π_1 правильні зображення

$$u_l(t,x)=\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}G_0^{lj}(t,x;\tau,\xi)f_j(\tau,\xi)d\xi+\sum_{\mu=1}^{n_j}\int_{\mathbb{R}^n}G_j^{l\mu}(t,x;0,\xi)\varphi_j^{\mu}(\xi)d\xi\right),\ l\in\mathbb{N}_N,$$

де $\varphi_j^{\mu}(x):=\partial_t^{\mu-1}u_j(0,x),\ x\in\mathbb{R}^n$, *та оцінки*

$$||u_l(t,\cdot)||_{p,\eta}\le C\exp\left\{\delta t+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(\eta_\nu\alpha_\nu(t))^{2b_\nu}}{2b_\nu(c_0q_\nu)^{2b_\nu-1}}\right\}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{N}\int_0^t\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M}p_{00}^{lj}(t-\tau)}||f_j(\tau,\cdot)||_{p,\eta}e^{-\delta\tau}d\tau+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n_j}\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t))^{\frac{2b}{M}p_{j0}^{l\mu}(t)}||\varphi_j^{\mu}(\cdot)||_{p,\eta}\right),$$

де c_0 *– фіксована стала з проміжку (0,c).*

Розглянемо набір функцій

$$\widehat{k}_\nu(t,a_\nu):=\begin{cases}c_0a_\nu(c_0^{2b_\nu-1}-(\alpha_\nu(t))^{2b_\nu}a_\nu^{2b_\nu-1})^{1-q_\nu},\ 0\le t\le T,\\ c_0a_\nu(c_0^{2b_\nu-1}+(\alpha_\nu(|t|))^{2b_\nu}a_\nu^{2b_\nu-1})^{1-q_\nu},\ t<0,\ \nu\in\mathbb{N}_n,\end{cases}$$

де $c_0\in(0,c)$, стала c і функції $\alpha_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$, з $\Lambda_\delta^{2,0}$-умови, $a_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$, – невід'ємні числа такі, що $\alpha_\nu(T)<\left(\frac{c_0}{a_\nu}\right)^{1/q_\nu}$, і означимо для будь-яких $t\in H_2$ і $p\in[1,\infty]$ норми

$$||v(t,\cdot)||_p^{\widehat{k}(t,a)}:=||v(t,\cdot)\widehat{\Psi}_{-1}(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де $\widehat{k}(t,a):=(\widehat{k}_1(t,a_1),...,\widehat{k}_n(t,a_n)),\ \widehat{\Psi}_z(t,x):=\exp\left\{z\sum\limits_{\nu=1}^{n}\widehat{k}_\nu(t,a_\nu)|x_\nu|^{q_\nu}\right\}$,
$t\in H_2,\ x\in\mathbb{R}^n,z\in\mathbb{R}$.

Теорема 2. *Нехай система (2) задовольняє* $\Lambda_\delta^{2,0}$ *-умову зі сталими* $c>0,\ \delta\in\mathbb{R}$, *функціями* $\alpha_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$, *та функціями* $p_{0k_0}^{lj}$ *і* $p_{jk_0}^{l\mu}$. *Далі, нехай* $u=col(u_1,...,u_N)$ *– такий регулярний розв'язок цієї системи, що для фіксованого* $p\in[1,\infty]$ *виконуються умови:*

1) $\exists C>0\ \forall\mu\in\mathbb{N}_{n_j}\ \forall\{l,j\}\subset\mathbb{N}_N\ \forall\{t,t_0\}\subset H_2,\ t_0<t:$

$$R_j^{l\mu}(t,t_0):=\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t-t_0))^{\frac{2b}{M}p_{j0}^{l\mu}(t-t_0)}e^{-\delta t_0}||\partial_{t_0}^{\mu-1}u_j(t_0,\cdot)||_p^{\widehat{k}(t_0,a)}\le C,$$

причому для $p=\infty$ $R_j^{l\mu}(t,t_0)\to 0$ *при* $t_0\to-\infty$;

2) функції $f_j:=\sum\limits_{l=1}^{N}A_{jl}(t,x,\partial_t,\partial_x)u_j,\ l\in\mathbb{N}_N$, *наперервні та задовольняють умови*

$$\forall\{l,j\}\subset\mathbb{N}_N\ \forall t\in H_2:\ ||f_j(t,\cdot)||_p^{\widehat{k}(t,a)}<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{t}\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M}p_{00}^{lj}(t-\tau)}e^{-\delta\tau}||f_j(\tau,\cdot)||_p^{\widehat{k}(\tau,a)}d\tau<\infty.$$

Тоді для $u_l, l \in \mathbb{N}_N$ правильні зображення

$$u_l(t,x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0^{lj}(t,x;\tau,\xi) f_j(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_2,$$

та оцінки

$$||u_l(t,\cdot)||_p^{\widehat{k}(t,a)} \leq Ce^{\delta t} \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta\tau} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M} p_{00}^{lj}(t-\tau)} ||f_j(\tau,\cdot)||_p^{\widehat{k}(\tau,a)} d\tau, \ t \in H_2.$$

У тих же працях [1] – [4] доведено теорему про стійкість розв'язків задачі Коші для системи (2). Для її формулювання розглянемо в Π_2 однорідну систему (2), тобто систему вигляду

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = 0. \tag{4}$$

Для неперервних функцій $v : \overline{\Pi_1} \to \mathbb{C}$ означимо норми

$$||v||_{p,\eta}^{g(\cdot)} := \sup_{t \geq 0} (g(t)||v(t,\cdot)||_{p,\eta}),$$

де $p \in [1,\infty], \eta := (\eta_1,...,\eta_n), \eta_\nu \geq 0, \nu \in \mathbb{N}_n$ і $g : \overline{H_1} \to H_1$ – деяка неперервна функція.

Розглядатимемо розв'язки $u := col(u_1,...,u_N)$ системи (4) у Π_1, які задовольняють умову

$$\forall T_0 > 0 \ \exists C > 0 \ \forall t \in [0,T_0] : \quad |||u(t,\cdot)|||_{p,\eta} := \max_{\mu \in \mathbb{N}_{n_j}, j \in \mathbb{N}_N} ||\partial_t^{\mu-1} u_j(t,\cdot)||_{p,\eta} \leq C. \tag{5}$$

Означення 2. *Нульовий розв'язок системи (4) називатимемо $E_{p,\eta}^{g(\cdot)}$– стійким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\Delta > 0$, що для будь-якого розв'язку u цієї системи, який задовольняє умову (5) та умову $|||u(0,\cdot)|||_{p,\eta} < \Delta$, справджується нерівність $\max_{l \in \mathbb{N}_N} ||u_l||_{p,\eta}^{g(\cdot)} < \varepsilon$.*

Теорема 3. *Нехай система (4) задовольняє $\Lambda_\delta^{1,0}$ -умову зі сталими $c > 0, \ \delta \in \mathbb{R}$, функціями α_ν, і $p_{jk_0}^{l\mu}$. Тоді її нульовий розв'язок є $E_{p,\eta}^{g(\cdot)}$– стійким з довільним $p \in [1,\infty]$ і $\eta_\nu \geq 0, \nu \in \mathbb{N}_n$ та функцією*

$$g(t) := \exp\left\{ -\left(\delta t + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\eta_\nu \alpha_\nu(t))^{2b_\nu}}{2b_\nu (c_0 q_\nu)^{2b_\nu - 1}} \right) \right\} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n_j} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu(t))^{-\frac{2b}{M} p_{j0}^{l\mu}(t)}, \ t > 0,$$

де $c_0 \in (0,c)$, сталі c і δ з $\Lambda_\delta^{1,0}$- умови.

У працях [1] – [4] доведені теореми типу Ліувілля для розв'язків систем, які задовольняють $\Lambda_\delta^{2,r}$- умови. Наведемо одну з них.

Теорема 4. *Нехай система (4) задовольняє $\Lambda_0^{2,r}$ -умову з досить великим $r \geq 0$ і нехай $u := col(u_1,...,u_N)$ – розв'язок цієї системи, для компонент якого виконується умова*

$$\exists C > 0 \ \forall (t,x) \in \Pi_2 \ \forall \mu \in \mathbb{N}_{n_l} \ \forall l \in \mathbb{N}_N : |\partial_t^{\mu-1} u_l(t,x)| \leq C \prod_{\nu=1}^{n} (1+|x_\nu|)^{\beta_\nu}, \tag{6}$$

де $\beta_\nu \geq 0, \nu \in \mathbb{N}_n$. Тоді u_l, як функція x_ν, є многочленом степеня, не вищого β_ν.

У праці [5] наведені результати побудови та оцінки фундаментальної матриці розв'язків поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породженої $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою.

Розглядаються стаціонарні $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи вигляду

$$A(x, \partial_t, \partial_x)u(t,x) = f(t,x), \tag{7}$$

і

$$A(x, \partial_t + \mu, \partial_x)u(t,x) = f(t,x), \tag{8}$$

де μ -комплексний параметр.

Цим системам відповідає поліноміальна в'язка $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем

$$\sum_{j=1}^{N} L_{lj}^{\mu}(x, \partial_x)u_j(x) := \sum_{j=1}^{N}\left(-\sum_{\substack{2bk_0+||k||\le 2bn_j\\(0\le k_0<n_j)}} a_{k_0k}^{lj}(x)\mu^{k_0}\partial_x^k u_j(x) + \delta_{lj}\mu^{n_j}u_l(x)\right) =$$

$$= g_l(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{N}_N. \tag{9}$$

Теорема 5. *Нехай $Z(t,x,\xi) = (Z(t,x,\xi))_{l,j=1}^N, t > 0, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, – фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для системи (7), яка задовольняє $\Lambda_\delta^{1,r}$ -умову з $\delta \in \mathbb{R}$, функціями $\alpha_\nu = t^{1/(2b_\nu)}, t > 0$, і $p_{00}^{lj} = \begin{cases} p_1^{lj},\ t \le 1, \\ p_2^{lj},\ t > 1. \end{cases}$. Тоді формулою*

$$E^{\mu}(x,\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\mu\beta} Z(\beta, x, \xi)d\beta,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ x \ne \xi, \tag{10}$$

визначається фундаментальна матриця розв'язків системи (9) з $\mu \in \mathbb{C}$ таким, що $Re\mu > \delta$. Для елементів $E_{lj}^{\mu}, \{l,j\} \subset \mathbb{N}_N$, матриці E^{μ} справджуються оцінки

$$|\partial_x^k E_{lj}^{\mu}(x,\xi)| \le \begin{cases} C, \quad M + ||k|| < 2b(p_1^{lj}+1), \\ Cln[x-\xi]_q^{-1} + C_1, \quad M + ||k|| = 2b(p_1^{lj}+1), \\ C[x-\xi]_q^{2b(p_1^{lj}+1)-M-||k||}, \quad M + ||k|| > 2b(p_1^{lj}+1), \end{cases}$$

$$[x-\xi]_q \le 1, \tag{11}$$

$$|\partial_x^k E_{lj}^{\mu}(x,\xi)| \le C\exp\{-h_\mu [x-\xi]_q^{q/q''}\},\ [x-\xi]_q > 1, \tag{12}$$

$$\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ x \ne \xi, ||k|| \le 2bn_l + r,\ \{l,j\} \subset \mathbb{N}_N,$$

де $C > 0,\ C_1 > 0,\ h_\mu > 0,\ q := 2b/(2b-1),\ q'' := 2b''/(2b''-1),\ b'' := \min\limits_{\nu \in \mathbb{N}_n} b_\nu,$

$[x]_q := \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^{q_j}\right)^{1/q}.$

У випадку, коли $Re\mu = \delta$ інтеграл (10), взагалі кажучи, розбігається. У цьому випадку регуляризацію інтеграла (10) можна здійснювати за допомогою многочленів, які є частинними сумами рядів Тейлора для функцій $Z_{lj}, \{l, j\} \subset \mathbb{N}_N$:

$$E^{\mu}_{lj}(x, \xi) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu\beta}(Z_{lj}(\beta, x, \xi) - P_{2b(p^{lj}_{01}+1)-M}(Z_{lj})(\beta, x, \xi))d\beta, \tag{13}$$

де для функції $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ і $l >= 0$

$$P_{\alpha}(h)(x) := \sum_{||k|| \le \alpha} \frac{(x - \xi)^k}{k!} \partial^k_y h(y), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 6. *Нехай система (7) задовольняє $\Lambda^{1,r}_{\delta}$ -умову з $\delta \in \mathbb{R}$, $\alpha_{\nu}(t) = t^{1/(2b_{\nu})}, t > 0$, і* $p^{lj}_{0k_0}(t) = \begin{cases} p^{lj}_1, \ t \le 1, \\ p^{lj}_2, \ t > 1, \end{cases}$ *такими, що $p^{lj}_1 > p^{lj}_2$, $\{l, j\} \subset \mathbb{N}_N$, а $Z(t, x, \xi) = (Z_{lj}(t, x, \xi))^n_{l,j=1}$, $t > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_n$ – її фундаментальна матриця розв'язків. Тоді формулою (13) визначаються елементи фундаментальної матриці розв'язків E_{μ} системи (9) з $\mu \in \mathbb{C}$ таким, що $Re\mu = \delta$. При цьому для елементів E^{μ}_{lj} виконуються при $[x - \xi]_q \le 1$ оцінки (11), а при $[x - \xi]_q > 1$ і $M + ||k|| > 2b(p^{lj}_1 + 1)$ – оцінки*

$$|\partial^k_x E^{\mu}_{lj}(x, \xi)| \le C[x - \xi]^{2b(p^{lj}_2+1)-M-||k||}_q, \ \{l, j\} \subset \mathbb{N}_N.$$

2 Про нелінійні рівняння типу Ейдельмана

Використовуючи ідеї С.Д. Івасишена, львівська наукова школа проф. С.П. Лавренюка розпочала вивчення задач для нелінійних рівнянь типу Ейдельмана (в (1) числа $N = 1, \ j = 1, \ k_0 = 0$). Для задачі Коші, мішаних та обернених задач для таких типів рівнянь встановлювалися умови існування та єдиності узагальнених розв'язків в просторах Соболєва та Лебега, знаходилися оцінки цих розв'язків. Нижче наведемо їх огляд.

Нехай $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^k$ і $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}^m$ – області, причому $\partial\mathcal{D}_x \in C^1$ і $\partial\mathcal{D}_y \in C^1$, $k, \ m \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення: $\Omega = \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$, $Q_{\tau} = \Omega \times (0, \tau)$, $S_{\tau} = \partial\Omega \times (0, \tau)$, де $\tau \in (0, T]$, $T < \infty$.

Мішані задачі для нелінійних рівнянь типу Ейдельмана

В області Q_T розглянемо мішану задачу

$$u_t + \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z, t)|u_{x_i x_j}|^{p-2}u_{x_i x_j})_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} (b_i(z, t)|u_{z_i}|^{q-2}u_{z_i})_{z_i} +$$
$$+ c(z, t)|u|^{r-2}u + g(z, t, u) = f(z, t), \tag{14}$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y \times (0,T)} = 0, \tag{15}$$

$$u(z,0)=u_0(z), \qquad z\in\Omega, \tag{16}$$

де $z=(x,y)\in\mathbb{R}^n$, $x\in\mathcal{D}_x$, $y\in\mathcal{D}_y$, $n=k+m$, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_y\times(0,T)$, числа $p>1,\ q>1,\ r>1$, а g – нелінійна функція, яка може містити степеневі нелінійності.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (14) виконуються умови:

(A): $a_{ij}\in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij}(z,t)\ge a_0>0$ майже для всіх $(z,t)\in Q_T$, $\ i,j\in\{1,\dots,k\}$;

(B): $b_i\in L^\infty(Q_T)$, $b_i(z,t)\ge b_0>0$ майже для всіх $(z,t)\in Q_T$, $i\in\{1,\dots,n\}$;

(C): $c\in L^\infty(Q_T)$, $c(z,t)\ge c_0>0$ майже для всіх $(z,t)\in Q_T$;

(F): $f\in C(Q_T)$;

(U): $u_0\in H_0^1(\Omega)$, $u_{0x_ix_j}\in L^2(\mathcal{D}_x)$, $i,j\in\{1,\dots,k\}$.

Означення 3. *Функцію $u\in V(Q_T)$, яка задовольняє інтегральну рівність*

$$\int_{Q_\tau}\Bigg[u_tv+\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}|^{p-2}u_{x_ix_j}v_{x_ix_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(z,t)|u_{z_i}|^{q-2}u_{z_i}v_{z_j}+c(z,t)|u|^{r-2}uv+$$
$$+g(z,t,u)v-f(z,t)v\Big]\,dxdt=0$$

для всіх $\tau\in(0,T]$, для всіх функцій $v\in C([0,T];C_0^2(\Omega))$, і початкову умову (16), назвемо узагальненим розв'язком задачі (14)–(16). Простір V означено пізніше щодо кожної задачі.

Нехай $q>1,\ p>1,\ r>1$, функція $g\equiv 0$, а області $\mathcal{D}_x,\ \mathcal{D}_y$ – обмежені. У праці [18] встановлено, що за умов (A), (B), (C), (F), (U) існує узагальнений розв'язок задачі (14)–(16), такий, що $u\in L^\infty((0,T);L^2(\Omega)),\ u\in L^p((0,T);V_0^2(\Omega))\cap L^q((0,T);V_0^1(\Omega))\cap L^{r_0}(Q_T)$, де $V_0^1(\Omega)=W_0^{1,q}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, $V_0^2(\Omega)=L^p(\mathcal{D}_y;W_0^{2,p}(\mathcal{D}_x))\cap L^2(\Omega)$. Якщо ж $p\ge 2$ і $q\ge\frac{2n}{n+2}$, то $u\in C([0,T];L^2(\Omega))$.

Для розв'язків u цієї задачі виконуються такі оцінки:

Теорема 7. *Нехай $p\ge 2$, а $f(z,t)\equiv 0$. Тоді:*

1) якщо $q>2$, то

$$\int\limits_{\Omega}|u|^2\,dz\le\mu_1\left(\frac{R^{\theta_0}}{t}\right)^{\frac{2}{q-2}},$$

де стала μ_1 залежить від $q,\ n,\ b_0$ та радіуса R найменшої кулі, яка містить область Ω, $\theta_0=\frac{qn+2(q-n)}{2}$;

2) якщо $\frac{2n}{n+2}\le q<2$, то $u(z,t)=0$ майже для всіх $(z,t)\in Q_T\backslash Q_{t_0}$, де $t_0=\mu_2\left(\int\limits_{\Omega}|u(z,0)|^2\,dz\right)^{\frac{2-q}{2}}$, а стала μ_2 залежить від $q,\ n,\ b_0,\ \Omega$.

У праці [16] в обмеженій області Q_T розглянуто мішану задачу для рівняння (14) з $q = 2,\ p = 2,\ r > 1$ та інтегральним доданком $g(z,t,u) = \int\limits_0^t g(t-s)\sum\limits_{i=1}^n u_{z_iz_i}(z,s)ds$, де $g \in C^1([0,T])$. Встановлено, що за умов $b_0 - \int_0^\infty g(\xi)d\xi > 0$, $a_{ijt},\ b_{ijt},\ c_t \in L^\infty(Q_T)$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (14)–(16). Для цього розв'язку u виконуються такі оцінки:

Теорема 8. *Нехай коефіцієнти a_{ij}, b_{ij}, c не залежать від t, а $f \equiv 0$. Тоді*

1) якщо існує така стала $c > 0$, що $g(t) \le g(0)e^{-ct}$, то

$$\int\limits_{\Omega_t}[u^2 + u_t^2]dz \le \left(\int\limits_{\Omega_0}[u^2 + u_t^2]dz + \frac{M}{\delta|\mu - 2c|}\right)e^{-\kappa t},$$

де

$$\kappa = \min\{2c;\mu\},\quad M = \int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n (u_{0z_i})^2 dz,$$

$$\mu = \frac{2a_0}{c_2^2} + \frac{1}{c_1}\left(2b_0 - 2\int_0^\infty g(\xi)d\xi - \delta\right),$$

δ – мале число, таке, що $\mu > 0$,

$$\kappa = \min\{2c;\mu\},$$

сталі $c_1,\ c_2$ залежать тільки від n та Ω, і визначаються нерівностями Фрідріхса:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u\,dz \le c_1\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n u_{z_i}\,dz,$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^k (u_{x_i})^2\,dz \le c_2\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^k (u^N_{x_ix_i})^2\,dz.$$

2) якщо $g'(t) \le -c_3[g(t)]^{1+\frac{1}{s}}, s \ge 1,\ c_3 > 0$, то існує така стала $c_4 \ge 0$, що для розв'язку задачі (14)–(16) виконується оцінка

$$\int\limits_{\Omega_t}[u^2 + u_t^2]dz \le \frac{c_4}{(t+1)^{2s-1}}.$$

Нехай $q > 1,\ p = 2,\ r = 2$, області $\mathcal{D}_x,\ \mathcal{D}_y$ – обмежені, а функція $g(z,t,u) = -g(z,t)|u|^{s-2}u$. У праці [21] встановлено умови існування та єдиності локального узагальненого розв'язку задачі (14)–(16), а також умови, за яких глобальний розв'язок задачі не існує:

Теорема 9. *Нехай $u_0 \in L^{2(s-1)}(\Omega) \cap L^2(\mathcal{D}_y;\ H_0^2(\mathcal{D}_x) \cap H^4(\mathcal{D}_x)) \cap W_0^{1,2(q-1)}(\Omega)$, $|u_{0,z_i}|^{q-2}u_{0,z_i} \in H^1(\Omega)$ для всіх $i \in \{1,\dots,n\}$, $2 < q < s \le \frac{2n+2}{n}$ при $n > 2$ і $2 < q < s$ при $n \in \{1,2\}$, $n \le \frac{qs}{s-q}$, $f,\ f_t \in L^2(Q_{t_0})$ для довільного $t_0 > 0$. Тоді знайдеться таке $T > 0$, що в області Q_T існує узагальнений розв'язок задачі (14)–(16), причому T залежить від коефіцієнтів, вільного члена і початкової умови задачі.*

Теорема 10. *Нехай коефіцієнти задачі не залежать від t, а $f \equiv 0$. Виконуються умови $u_0 \in L^{2(s-1)}(\Omega) \cap L^2(\mathcal{D}_y; H_0^2(\mathcal{D}_x) \cap H^4(\mathcal{D}_x)) \cap W_0^{1,2(q-1)}(\Omega)$, $|u_{0,z_i}|^{q-2}u_{0,z_i} \in H^1(\Omega)$ для всіх $i \in \{1,\dots,n\}$. Тоді якщо $2 < q < s$, $n \le \frac{qs}{s-q}$ і*

$$\int\limits_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z)(u_{x_ix_j})^2 + \frac{1}{2}c(z)u^2 + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} b_i(z)|u_{z_i}|^q - \frac{1}{s}g(z)|u|^s\right] dz < 0$$

то не існує глобального розв'язку задачі (14)–(16) та

$$\lim_{t\to T-0}\int\limits_{Q_t} |u|^s\, dz = +\infty.$$

Нехай $g(z,t,u) \equiv 0$, $q = 2$, $p \in (1,2]$, $r > 2$, а області $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_y$ – необмежені. У праці [17] встановлено умови однозначної розв'язності задачі (14)–(16) в необмеженій області:

Теорема 11. *Нехай $u_0 \in L^2_{loc}(\Omega)$, $f \in L^2((0,T), L^2_{loc}(\Omega))$, $n < \min\left\{\frac{2p}{2-p}, \frac{2pr}{r-p}, \frac{2r}{r-2}\right\}$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (14)–(16) такий, що $u \in C([0,T]; L^2_{loc}(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^{1,0}_{loc}(\Omega)) \cap L^p((0,T); V^p_{loc}(\Omega)) \cap L^r((0,T); L^r_{loc}(\Omega))$. Тут $V^p_{loc}(\Omega) = \big\{u : u_{x_ix_j} \in L^p(\Omega^R), i,j \in \{1,\dots,k\},\ u|_{(\partial\mathcal{D}_x\cap\mathcal{D}_x^R)\times\mathcal{D}_y} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\big|_{(\partial\mathcal{D}_x\cap\mathcal{D}_x^R)\times\mathcal{D}_y} = 0, R>0\big\}$, $\Omega^R = \mathcal{D}_x^R \times \mathcal{D}_y^R$, $\mathcal{D}_x^R = \mathcal{D}_x \cap \{x \in \mathbb{R}^k :\ |x| < R\}$, $\mathcal{D}_y^R = \mathcal{D}_y \cap \{y \in \mathbb{R}^m :\ |y| < R\}$.*

Обернені задачі для слабко нелінійних рівнянь типу Ейдельмана

Нехай $\mathcal{D}_x$ і $\mathcal{D}_y$ — обмежені області, $p = 2$, $q = 2$, $r = 2$, а функція g задовольняє умову Ліпшиця за змінною u. У працях [20, 24] в області Q_T розглянуто такі задачі: встановити достатні умови існування та єдиності пари функцій $(u(z,t),\ c(t))$, (або $(u(z,t),\ f_2(t))$), яка задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{i,j=1}^{k}(a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j})_{x_ix_j} - \sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(z,t)u_{z_i})_{z_j} + \\ +(c(t)+q(z))u + g(z,t,u) = f_1(z)f_2(t), \end{aligned} \tag{17}$$

а також початкові і крайові умови

$$u(z,0) = u_0(z), \quad z \in \Omega, \tag{18}$$

$$u|_{S_T} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_y\times(0,T)} = 0 \tag{19}$$

та умову перевизначення

$$\int\limits_{\Omega} K(z)u(z,t)\, dz = E(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{20}$$

Означення 4. *Пару функцій $(u(z,t), c(t))$ (чи $(u(z,t), f_2(t)))$ назвемо узагальненим розв'язком задачі (17)–(20), якщо $u \in L^2(0,T; V_1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(Q_T)$, $c \in C([0,T])$ (чи $f_2 \in C([0,T])$), вона задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg(u_t v + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u_{x_i x_j} v_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t) u_{z_i} v_{z_j} + (c(t) + q(z)) uv +$$
$$+ g(z,t,u)v \Big) \, dz\, dt = \int\limits_{Q_\tau} (f_1(z) f_2(t)) v \, dz\, dt$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, і всіх функцій $v \in L^2(0,T; V_1(\Omega))$, та виконуються умови (18), (20). Тут $V_1(\Omega) = \left\{ u : u \in W_0^{1,2}(\Omega),\ u_{x_i x_j} \in L^2(\Omega), i,j \in \{1,\dots,k\}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y} = 0 \right\}$.

Нехай коефіцієнти рівняння (17) і початкові умови задовольняють умови:

(A 1): $a_{ij} \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$, $a_{ij,t} \in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij}(z,t) \geq a_0 > 0$ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$;

(B 1): $b_{ij} \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$, $b_{ij,t} \in L^\infty(Q_T)$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)\xi_i \xi_j \geq b_0 |\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і для майже всіх $(z,t) \in Q_T$, $b_0 > 0$;

(C 1): $c \in C([0,T])$, $c(t) \geq c_0$ для всіх $t \in [0,T]$, де c_0 – стала;

(Q 1): $q \in L^\infty(\Omega)$, $q(z) \geq q_0$ для майже всіх $z \in \Omega$, де q_0 – стала;

(G 1): $g(z,t,\xi)$ – вимірна за змінними (z,t) в Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$
і неперервна за змінною ξ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$, крім того, існує така додатна стала g_0, що $|g(z,t,\xi) - g(z,t,\eta)| \leq g_0 |\xi - \eta|$
для майже всіх $(z,t) \in Q_T$ і всіх ξ, $\eta \in \mathbb{R}^1$;

(F 1): $f_1 \in C([0,T])$;

(F 2): $f_2 \in L^2(\Omega)$;

(U 1): $u_0 \in V_1(\Omega)$;

(K): $K \in V_1(\Omega)$, $K_{x_i x_i x_j x_j} \in L^2(\Omega)$, $K_{z_r z_s} \in L^2(\Omega)$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$, $r,s \in \{1,\dots,n\}$;

(E): $E \in W^{1,2}(0,T)$, $E(0) = \int\limits_\Omega K(z) u_0(z)\, dz$.

Теорема 12. *Нехай $c(t)$ – задана функція і виконуються умови (A 1), (B 1), (C 1), (Q 1), (G 1), (F 1), (U 1), (K), (E) та $\int\limits_\Omega K(z) f_1(z)\, dz \neq 0$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок $(u(z,t), f_2(t))$ задачі (17)–(20) в області Q_T.*

Теорема 13. *Нехай $f_2(t)$ – задана функція, виконуються умови (A 1), (B 1), (Q 1), (F 1), (F 2), (U 1), (K), (E) та $a_{ij,x_i x_j} \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $b_{rs,z_r} \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$, $r,s \in \{1,\dots,n\}$, а функція $E(t) \neq 0$ для всіх $t \in [0,T]$. Тоді існує таке число $0 < T_0 \leq T$, що узагальнений розв'язок $(u(z,t), c(t))$ задачі (17)–(20) в області Q_{T_0} існує та єдиний.*

Задача Коші для напівлінійного параболічного за Ейдельманом рівняння

Нехай тепер $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$. У працях [19, 15] розглянуто задачу Коші для рівняння (14), в якому функція $g(z,t,u) \equiv 0$, з початковою умовою

$$u(z,0) = u_0(z), \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

За умов (A), (B), (C), (F), (U) отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку в класі Тихонова (у праці [15] $p = q = 2,\ r \in (1,2]$, а в [19] $p \geq 2,\ q \geq 2,\ r \geq 1$). Крім того, встановлено умови компактності носія розв'язку.

Позначимо $\omega_k(T) = \sup\limits_{x_k \in \mathbb{R}}\{z \in \operatorname{supp} u(\cdot,T)\}$, $S_{k,f}(T) = \sup\limits_{x_k \in \mathbb{R}}\{z \in \operatorname{supp} f,\ t \in (0,T)\}$, $S_k(T) = \sup\{S_{k,f}(T)k(0)\}$, $\mathcal{E}_k(\xi) = \int\limits_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} (\sum\limits_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}|^q + \sum\limits_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^q)(x_k - \xi)^s\, dz\, dt$, $a = \frac{q-2}{2q}\left(\frac{q-2}{2q} + \frac{1}{n+|q|+1}\right)^{-1}$.

Теорема 14. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (F), (U), $S_m(t) < +\infty$, $p = q$. Тоді існує таке число x_k^0, що*

$$\mathcal{E}_0(\xi) \leq \mu \exp\left[-\frac{\xi - x_k^0}{\mu(1 + T^{1-\alpha})^{1/q}}\right]$$

при $\xi \geq \max\{(1+T^{1-\alpha})^{1/q}; x_k^0\}$, де стала μ залежить від коефіцієнтів задачі.

Для отримання умов однозначної розв'язності задачі Коші для нелінійних рівнянь Ейдельмана, мішаних та обернених задач, використано властивості функцій з просторів Соболєва, методи монотонності, компактності, послідовних наближень.

3 Висновки

У статті проведено огляд результатів, отриманих С.Д. Івасишеним та його учнями, при дослідженні задачі Коші для лінійних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем рівнянь. Ці результати знайшли своє продовження у дослідженнях нелінійних узагальнень рівнянь типу Ейдельмана львівськими математиками.

Список літератури

[1] Балабушенко Т. М. *Властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем в областях, необмежених відносно часової змінної.* Мат. студії. 2002, **18** (1), 69–78.

[2] Балабушенко Т. М. *Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування.* Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". **411**. Прикладна математика. 2000, 6–11.

[3] Балабушенко Т. М. *Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем.* Мат. студії. 2002, **17** (2), 163–174.

[4] Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д. *Про властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях* Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2002, **45** (4), 19 – 26.

[5] Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д. *Побудова та оцінки фундаментальних матриць розв'язків поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породжених $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою.* Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. **160**. Математика. Чернівці: Рута, 2003, 5–10.

[6] Ивасишен С. Д. *Об интегральных представлениях и свойстве Фату для решений параболических систем.* Успехи мат. наук. 1986. **41** (4), 173–174.

[7] Ивасишен С. Д. *Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем.* Укр. мат. журн. 1990. **4** (4), 500 – 506.

[8] Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. *$\vec{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу.* К.: Ин-т математики АН УССР, 1968. **1**, 3 – 175, 271 – 273.

[9] Івасишен С. Д., Кондур О.С. *Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільного порядку.* Мат. студії. 2000. **14** (1), 73–84.

[10] Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. *Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами.* Укр. мат. журн. 2000. **52** (11), 1484 – 1496.

[11] Івасишен С. Д., Івасюк Г. П. *Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем.* Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. **349**. Математика. Чернівці: Рута, 2007, 32–36.

[12] Івасишен С. Д., Івасюк Г. П. *Параболічні за Солонниковим системи квазіоднорідної структури.* Укр. мат. журн. 2006. **58** (11), 1501 – 1510.

[13] Івасишен С. Д., Івасюк Г. П. *Параболічні початкові задачі Солонникова-Ейдельмана.* Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **74**, 2011, 98–108.

[14] Івасюк Г. П. *Про властивості потенціалів модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння довільного порядку.* Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. **288**. Математика. Чернівці: Рута, 2006, 51–56.

[15] Коркуна О.Є. *Задача Коші для напівлінійного параболічного за Ейдельманом рівняння.* Укр. мат. журн. 2008. **60** (5), 586–602.

[16] Коркуна О.Є. *Мішана задача для нелінійного рівняння типу Ейдельмана з інтегральним доданком.* Карпатські математичні публікації. 2012. **4** (2), 275–283.

[17] Коркуна О.Є., Лавренюк С.П. *Мішана задача для одного нелінійного рівняння типу Ейдельмана в необмеженій області.* Доповіді НАН України. 2008. **4**, 24–30.

[18] Коркуна О.Є., Лавренюк С.П. *Про деякі властивості розв'язку мішаної задачі для нелінійного 2b параболічного рівняння.* Науковий вісник Чернівецького університету. Сер. Математика. 2006. **314-315**, 100–104.

[19] Коркуна О., Лавренюк С. *Про носій розв'язку задачі Коші для нелінійного 2b-параболічного рівняння.* Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2007. **67**, 153–165.

[20] Процах Н.П. *Обернена задача для слабко нелінійного рівняння типу Ейдельмана з невідомим молодшим коефіцієнтом.* Нелінійні коливання. 2020. **23** (2), 253–265.

[21] Торган Г.Р. *Неіснування глобального розв'язку змішаної задачі для рівняння типу Ейдельмана.* Прикл. проблеми механіки і математики. 2008. **6**, 98–103.

[22] Эйдельман С. Д. *Об одном классе параболических систем.* Доклады АН СССР. 1960. **133** (1), 40–43.

[23] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.* Birkhäuser Verlag. 2004, 390 pp.

[24] Protsakh N. P., Parasiuk-Zasun O. E. *Inverse problem for semilinear Eidelman type equation.* Mat. Stud. 2020. **53** (1), 48–58.

Список літератури

[1] Balabushenko T.M. *Properties of solutions of $\overrightarrow{2b}$- parabolic systems in domains unbounded with respect to the time variable.* Math. Stud. 2002, **18** (1), 69–78.

[2] Balabushenko T.M. *Estimates of the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems in unbounded domains with respect to the time variable and their application.* Herald of the National Lviv Polytechnic University. **411**, Applied Mathematics. 2000, 6–11.

[3] Balabushenko T.M. *On estimates in unbounded relative to time variable domains of the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$- parabolic systems.* Math. Stud. 2002, **17** (2), 163–174.

[4] Balabushenko T.M., Ivasyshen S.D. *On the properties of solutions of $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems in domains unbounded by the time variable.* Math. methods and phys.-mech. fields. 2002, **45** (4), 19 – 26.

[5] Balabushenko T.M., Ivasyshen S.D.*Construction and evaluation of the fundamental matrices of solutions of the polynomial combination of $\overrightarrow{2b}$- elliptic systems generated by $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems.* Scien. bulletin of Chernivtsi University: Collection of scientific works. **160**, Mathematics, Chernivtsi: Ruta, 2003, 5–10.

[6] Ivasyshen S.D. *On integral representations and the Fatou property for solutions of parabolic systems.* Advances in Math. Sciences. 1986, **41** (4), 173–174.

[7] Ivasyshen S.D. *Integral representation and initial values of solutions of $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems.* Ukr. Math. Journal 1990, **42** (4), 500 – 506.

[8] Ivasyshen S.D.,Eidelman S.D. *$2\vec{b}$-parabolic systems.* Proceedings of the Seminar on Functional Analysis. K.: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1968, **1**, 3 – 175, 271 – 273.

[9] Ivasyshen S.D., Kondur O.S. *On the Green's matrix of the Cauchy problem and the characterization of some classes of solutions for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems of arbitrary order.* Math. Stud. 2000, **14** (1), 73 – 84.

[10] Ivasyshen S.D., Pasichnyk H.S. *On the Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems with increasing coefficients.* Ukr. Math. Journal 2000, **52** (11), 1484 – 1496.

[11] Ivasyshen S. D., Ivasyuk G. P. *On properties for the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for $2\vec{b}$-parabolic systems.* Scien. bulletin of Chernivtsi University: Collection of scientific works. **349**, Mathematics, Chernivtsi: Ruta, 2007, 32–36.

[12] Ivasyshen S. D., Ivasyuk G. P. *Solonnikov parabolic systems of quasi-homogeneous structure.* Ukr. Math. Journal 2006, **58** (11), 1501 – 1510.

[13] Ivasyshen S. D., Ivasyuk G. P. *Parabolic initial Solonnikov-Eidelman problems.* Visnyk Lviv. Univ. Ser. mech.-math. 2011. **74**, 98–108.

[14] Ivasyuk G. P. *On properties of the potentials of model $2\vec{b}$-parabolic equation of arbitrary order.* Scien. bulletin of Chernivtsi University: Collection of scientific works. **288**, Mathematics, Chernivtsi: Ruta, 2006, 51–56.

[15] Korkuna O.E. *Cauchy problem for a semilinear Eidel'man parabolic equation.* Ukr. Math. J. 2008. **60**, 671–691. https://doi.org/10.1007/s11253-008-0081-0

[16] Korkuna O.E. *Mixed problem for nonlinear Eidelman equation with integral term.* Carpathian Math. Publ. 2012. **4** (2), 275–283.

[17] Korkuna O.E., Lavrenyuk S.P. *Mixed prblem for a nonlinear Eidel'man type equation in an unbounded domain.* Reports NAS of Ukraine. 2008. **4**, 24–30.

[18] Korkuna O.E., Lavrenyuk S.P. *On properties of solution for mixed problem for nonlinear 2b-parablic equation.* Nauk. Visnyk Cherniv. Univ. Mathematics. 2006. **314-315**, 100–104.

[19] Korkuna O., Lavrenyuk S. *On a support of solution for the Cauchy problem for nonlinear* $2b$*-parabolic equation.* Visnyk Lviv. Univ. Ser. mech.-math. 2007. **67**, 153–165.

[20] Protsakh N.P. *Inverse Problem for a Weakly Nonlinear Eidelman-Type Equation with Unknown Minor Coefficient.* J. Math. Sci. (United States). 2021. **258** (5), 698–712.

[21] Torgan G.R. *Non-existance of a global solution for mixed problem for Eidelman type equation.* Prykl. problemy mech. math. 2008. **6**, 98–103.

[22] Eidelman S.D. *On a class of parabolic systems.* Reports USSR Acad. Sci. 1960. **133** (1), 40–43.

[23] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.* Birkhäuser Verlag. 2004, 390 pp.

[24] Protsakh N. P., Parasiuk-Zasun O. E. *Inverse problem for semilinear Eidelman type equation.* Mat. Stud. 2020. **53** (1), 48–58.

Надійшло 15.12.2022

Protsakh N.P., Ivasiuk H.P., Fratavchan T.M. *On problems for Eidelman type equations and system of equations*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 213–228.

The problems for Eidelman type equations and systems of equations are considered in this paper. They were the large part of scientific interests for Prof. Ivasyshen S.D. The results of investigations of Cauchy problem, initial-boundary and the inverse problems for this type of equations in bounded or unbounded domains are given. The results are represented as the estimates of the solutions, the integral representations of solutions, theorems of the existence, uniqueness and stability of solutions.

Пукальський І.Д., Яшан Б.О.

Багатоточкова за часом задача для $2b$-параболічного рівняння з виродженням

Досліджується багатоточкова за часом задача для нерівномірно $2b$-параболічного рівняння з виродженням. Коефіцієнти параболічного рівняння порядку $2b$ допускають степеневі особливості довільного порядку як за часовою змінною так і за просторовими змінними на деякій множині точок. Для розв'язання поставленої задачі вивчаються розв'язки допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами. За допомогою апріорних оцінок встановлюються нерівності для розв'язку задач і їх похідних у спеціальних гельдерових просторах. Використовуючи теореми Арчела і Рісса, з компактної послідовності розв'язків допоміжних задач виділяється збіжна послідовність, граничне значення якої буде розв'язком поставленої задачі. Оцінки розв'язку багатоточкової за часом задачі для $2b$-параболічного рівняння встановлені в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається порядком виродження коефіцієнтів груп старших доданків та степеневими особливостями коефіцієнтів молодших доданків параболічного рівняння. При певних обмеженнях на праву частину рівняння одержано інтегральне зображення розв'язку поставленої задачі.

Ключові слова і фрази: задача Коші, степеневі особливості, інтерполяційні нерівності, апріорні оцінки, гельдерові простори, теорема Арчела.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.), b.yashan@chnu.edu.ua (Яшан Б.О.)*

Вступ

Особлива увага в останні десятиліття приділяється задачам з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Такий інтерес до таких задач зумовлений як потребами загальної теорії крайових задач, так і багатим практичним їх застосуванням (процес дифузії, коливань, соле- та вологопереносу в грунтах, фізика плазми, математична біологія тощо). Встановлено, що нелокальні умови можна використовувати для опису розв'язних розширень диференціальних операторів. У роботах школи Б.Й. Пташника та його учнів [1–4] використано метричний підхід для дослідження умовно коректних задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для лінійних гіперболічних та безтипових рівнянь, а також деяких класів параболічних рівнянь

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k25, 35k67, 35k65.

зі сталими коефіцієнтами. Було доведено метричні твердження про оцінку знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач, з яких випливає коректність задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задач.

У монографії [5] досліджено у нормованих просторах Діні параболічні системи з оператором Бесселя, які вироджуються на межі області та близькі за внутрішніми властивостями до рівномірно параболічних систем. Для цих систем вивчено задачу Коші, загальну B-параболічну крайову задачу в компактній області, задачу з ваговими крайовими умовами в півпросторі. Праця [6] в основному присвячена дослідженню задачі Коші та крайових задач для рівнянь і систем рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких мають степеневі особливості певного порядку.

Дослідженню властивостей фундаментального розв'язку і встановленню коректної розв'язності задачі Коші для параболічних рівнянь з виродженням за деякими змінними присвячено праці [7–9].

У роботах [10–13] в обмежених циліндричних областях вивчено задачі з нелокальними та імпульсними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайової умови за будь-якими змінними на деякій множині точок.

У цій статті розглядається багатоточкова за часом задача для $2b$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і теореми Арчела доведено існування єдиного розв'язку поставленої задачі та встановлено оцінци його похідних у гельдеревих просторах зі степеневою вагою.

1 Постановка задачі та основні обмеження

Нехай $t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, \eta$ – фіксовані додатні числа, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, Ω – деяка обмежена область, $\dim \Omega \leq n-1$. Позначимо через $\Pi_0 = \{(t,x)| \ t \in [t_0, t_{N+1}), x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(t,x)|t=\eta, x \in R^n\}$. В області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times R^n$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{0,1,\ldots,N\}$, $t \neq \eta$, $x \in R^n \setminus \overline{\Omega}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\leq 2b-1} A_p(t,x)\partial_x^p\right] u(t,x) = f(t,x) \qquad (1)$$

і умови за змінною t

$$u(t_\lambda + 0, x) = \varphi_\lambda(x), \quad x \in R^n \setminus \overline{\Omega}, \qquad (2)$$

$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціального виразу L у точці $P(t,x) \in \Pi\setminus\Pi_0$ характеризуватимуть функції $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right)$ і $s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right)$: $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right) = |t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\eta| \leq 1$, $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right) = 1$ при $|t-\eta| \geq 1$; $s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right) = \rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x) \leq 1$, $s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right) = 1$ при $\rho(x) \geq 1$, $\rho(x) = \inf_{z\in\overline{\Omega}} |x-z|$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1,2\}$, $\beta^{(\nu)} = \left(\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_n^{(\nu)}\right)$, $\beta = \left(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\right)$.

Позначимо через l, $q^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\mu_0^{(\nu)}$ – дійсні невід'ємні числа, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\}=l-[l]$, $\left(k,\mu_p^{(\nu)}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\left(k,\gamma^{(\nu)}-\beta^{(\nu)}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\left(\gamma^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)},x^{(1)}\right)$, $R_r\left(t^{(2)},x^{(2)}\right)$ – довільні точки із $\Pi^{(\lambda)}=\{(t,x)|t\in[t_\lambda,t_{\lambda+1})\times R^n\}$, $x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, $x^{(2)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)},x_{r+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, $Q_\lambda=[t_\lambda,t_{\lambda+1})\times D$, D – довільна замкнена область із R^n, $\alpha\in(0,1)$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1), (2). $H^l(\gamma;\beta;q;\Pi)$ – множина функцій $u(t,x)$, які мають неперервні частинні похідні в $\Pi^{(\lambda)}\backslash\Pi_0$ при $t\neq t_\lambda$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2bj+|k|\leq[l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l=\sup_\lambda\left\{\sum_{2bj+|k|\leq[l]}\|u;\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda\|_{2bj+|k|}+\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda\rangle_l\right\},$$

де

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_0=\sup_\lambda\left\{\sup_{\overline{Q}_\lambda}|u|\right\}\equiv\sup_\lambda\|u;Q_\lambda\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_{2bj+|k|}=\sup_\lambda\left\{\sup_{P\in\overline{Q}_\lambda}\left[s_1(q_1+(2bj+|k|)\gamma^{(1)},t)s_2(q_2+(2bj+|k|)\gamma^{(2)},x)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times S(s_1,s_2;t,x)|\partial_t^j\partial_x^k u(P)|\right]\right\},$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi\rangle_l=\sup_\lambda\left\{\sum_{2bj+|k|=[l]}\sum_{r=1}^{n}\sup_{(P_1,H_r)\subset\overline{Q}_\lambda}\left[s_1\left(q^{(1)}+[l]\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)s_2\left(q^{(2)}+[l]\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\times\right.\right.$$
$$\times S(s_1,s_2;t^{(1)},\tilde{x})s_1\left(\{l\}\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}\right),t^{(1)}\right)s_2\left(\{l\}\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\{l\}}\times$$
$$\left.\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u\left(H_r\right)\right|\right]+\sum_{2bj+|k|=[l]}\sup_{(P_1,P_2)\in\overline{Q}_\lambda}\left[s_1\left(q^{(1)}+l\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times s_2\left(q^{(2)}+l\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)S(s_1,s_2;\tilde{t},x^{(1)})|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\left\{\frac{l}{2b}\right\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_2\right)\right|\right]\right\},$$

$$S(s_1,s_2;t,x)\equiv\prod_{i=1}^{n}s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x\right),$$

$$s_1(a,\tilde{t})=\min\left\{s_1\left(a,t^{(1)}\right),s_1\left(a,t^{(2)}\right)\right\},\quad s_2(a,\tilde{x})=\min\left\{s_2\left(a,x^{(1)}\right),s_2\left(a,x^{(2)}\right)\right\}.$$

Щодо задачі (1)-(2), вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t,x)\prod\limits_{i=1}^{n}s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $A_p(t,x)\prod\limits_{i=1}^{n}s_1\left(p_i\mu_{p_i}^{(1)},t\right)s_2\left(p_i\mu_{p_i}^{(2)},x\right)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $1\leq|p|\leq 2b-1$, $A_0(t,x)s_1\left(\mu_0^{(1)},t\right)\times$

$\times s_2\left(\mu_0^{(2)}, x\right) \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $A_0(t,x) \leq K < \infty$ і виконується умова рівномірної параболічності для рівняння

$$\left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x) \prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i\beta_i^{(1)}, t\right) s_2\left(k_i\beta_i^{(2)}, x\right)\right] u(t,x) = \tilde{f}(t,x),$$

б) функції $f(t,x) \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi)$, $\varphi_k(x) \in C^{2b+\alpha}\left(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi \cap \{t=t_k\}\right)$, $\tilde{\gamma} = \left(0, \gamma^{(2)}\right)$, $\tilde{\beta} = \left(0, \beta^{(2)}\right)$, $\gamma^{(v)} = \max\left\{\max_i \beta^{(v)}, \max_{i,p_i} \frac{p_i\left(\mu_{p_i}^{(v)} - \beta_i^{(v)}\right)}{2b-|p|}, \frac{\mu_0^{(v)}}{2b}\right\}$, $v \in \{1,2\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1), (2) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \leq c \sup_{\lambda}\left(\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi_\lambda\|_{\alpha} + \left\|\varphi_\lambda;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi_\lambda \cap \{t=t_\lambda\}\right\|_{2b+\alpha}\right). \tag{3}$$

Якщо $f \in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і для задачі* (1), (2) *виконані умови а), б), то єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *в області* $\Pi^{(\lambda)}$ *визначається інтегралом Стілтьєса з деякою борелівською мірою* $Z_{(\lambda)}$

$$u(t,x) = \int_{\Pi^{(\lambda)}} Z_{(\lambda)}(t,x;d\tau,d\xi) f(\tau,\xi) + \int_{\Pi^{(\lambda)} \cap \{t=t_\lambda\}} Z_{(\lambda)}\left(t_\lambda, x; d_\xi\right) \varphi_\lambda(\xi), \tag{4}$$

де $Z_{(\lambda)}(t,x;M)$ *визначається на* σ*-алгебрі підмножин* G *області* Π_λ*, включаючи* Π_λ *і всі її відкриті підмножини.*

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1), (2).

2 Оцінка розв'язків допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами

Нехай $\Pi_m^{(\lambda)} = \Pi^{(\lambda)} \cap \left\{(t,x) \in \Pi^{(\lambda)} \mid s_1(1,t) \geq m_1^{-1}, s_2(1,x) \geq m_2^{-1}\right\}$, $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 1$, $m = (m_1, m_2)$ послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до $\Pi^{(\lambda)}$.

Розглянемо в області Π задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t,x)\partial_x^k + \sum_{|p|\leq 2b-1} a_p(t,x)\partial_x^p\right] u_m(t,x) = F_m(t,x), \tag{5}$$

які задовольняють умови за змінною t

$$u_m(t_\lambda + 0, x) = \varphi_m^{(\lambda)}(x). \tag{6}$$

Тут коефіцієнти a_k, a_p, функції F_m, $\varphi_m^{(\lambda)}$ в області $\Pi_m^{(\lambda)}$ співпадають з A_k, A_p, f, φ_λ відповідно, а в області $\Pi^{(\lambda)} \backslash \Pi_m^{(\lambda)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_k, A_p і функцій f, φ_λ із області $\Pi_m^{(\lambda)}$ в область $\Pi^{(\lambda)} \backslash \Pi_m^{(\lambda)}$ із збереженням гладкості і норм ([15], с. 82).

Позначимо через $C^l(\gamma;\beta;q;\Pi)$ сукупність функцій простору $C^l(\Pi)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$, еквівалентну при кожному m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$, тільки замість функцій $s_1\left(a^{(1)},t\right)$, $s_2\left(a^{(2)},x\right)$ беремо відповідно $e_1\left(a^{(1)},t\right)$, $e_2\left(a^{(2)},x\right)$, де $e_1\left(a^{(1)},t\right) = \max\left(s_1\left(a^{(1)},t\right), m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)} \geq 0$ і $e_1\left(a^{(1)},t\right) = \min\left(s_1\left(a^{(1)},t\right), m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)} \leq 0$; $e_2\left(a^{(2)},x\right) = \max\left(s_2\left(a^{(2)},x\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} \geq 0$ і $e_2\left(a^{(2)},x\right) = \min\left(s_2\left(a^{(2)},x\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} \leq 0$.

Для норм $\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda\|_l$ правильні інтерполяційні нерівності.

Лема 1. *Нехай* $u_m \in C^l(\gamma;\beta;q,\Pi)$. *Тоді для довільного* $0<\varepsilon<1$ *існує така стала* $c(\varepsilon)$, *що виконуються нерівності*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{[l]} \leq \varepsilon^\alpha \langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\rangle_l + c(\varepsilon)\|u_m;\Pi_\lambda\|_0, \tag{7}$$

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{|k|} \leq \varepsilon\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda\|_{|k|+1} + \frac{c}{\varepsilon}\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda\|_{|k|-1}, \tag{8}$$
$$|k| \leq [l]-1, \quad l=[l]+\{l\}, \ l>[l].$$

Нерівності (7), (8) одержуються за схемою доведення леми із [16].

Встановимо оцінку норми $\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}$.

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконані умови а), б), то для розв'язку задачі* (5), (6) *правильна оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{2b+\alpha} \leq c\sup_\lambda\Big(\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha} + \|u_m;\Pi_\lambda\|_0 + $$
$$+\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi_\lambda\|_\alpha\Big). \tag{9}$$

Стала c не залежить від m.

Доведення. В області Π_λ розглянемо задачу

$$(L_1u_m)(t,x) = F_m(t,x), \quad u_m(t_\lambda+0,x) = \varphi_m^{(\lambda)}(x). \tag{10}$$

При виконанні умов а), б) існує єдиний класичний розв'язок задачі (10) в просторі $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda)$ [6,14]. Знайдемо його оцінку. Використовуючи інтерполяційні нерівності (7), (8), маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{2b+\alpha} \leq (1+\varepsilon^\alpha)\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\rangle_{2b+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m;\Pi_\lambda\|_0.$$

Тому досить оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\rangle_{2b+\alpha}$. Із визначення $\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\rangle_{2b+\alpha}$ випливає існування в Π_λ точок P_1, P_2, R_r, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{2b+\alpha} \leq E_1+E_2, \tag{11}$$

де

$$E_1=\sum_{2bj+|k|=2b}\sum_{r=1}^{n}\Big[e_1\left(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)S(e_1,e_2;t^{(1)},\tilde{x})\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\alpha}\times$$

$$\times e_1\left(\alpha\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}\right),t^{(1)}\right)e_2\left(\alpha\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(H_r\right)\right|\Big],$$

$$E_2=\sum_{2bj+|k|=2b}e_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(2)}\right)S(e_1,e_2;\tilde{t},x^{(2)})\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2b}}\times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_2\right)-\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_1\right)\right|.$$

Якщо $\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|\geq\frac{\varepsilon}{4}n^{-1}e_1\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_1$, ε – довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1\leq 2\varepsilon^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\right\|_{2b}. \tag{12}$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\geq\frac{\varepsilon^{2b}}{2b}e_1\left(2b\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_2$, то

$$E_2\leq 2\varepsilon^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\right\|_{2b}. \tag{13}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності (7) до (12), (13), знаходимо

$$E_1+E_2\leq 2\varepsilon_1^{\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\right\|_{2b+\alpha}+c(\varepsilon)\left\|u_m;\Pi_\lambda\right\|_0. \tag{14}$$

Нехай $\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|\leq N_1$, $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\leq N_2$. Будемо вважати, що $e_2\left(\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)=$ $=\min\left(e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(2)}\right),e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)\right)\equiv e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)$, $e_1\left(\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)=\min\left(e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right),\right.$ $\left.e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(2)}\right)\right)\equiv e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)\in\Pi_\lambda$. Запишемо задачу (10) у вигляді

$$\partial_t u_m-\sum_{|k|=2b}a_k\left(P_1\right)\partial_x^k u_m=F_m(t,x)-\sum_{|p|\leq 2b-1}a_p(t,x)\partial_x^p u_m+$$

$$+\sum_{|k|=2b}\left[a_k(t,x)-a_k\left(P_1\right)\right]\partial_x^k u_m\equiv F_m^{(1)}\left(t,x;u_m\right), \tag{15}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x)=\varphi_m^{(\lambda)}(x). \tag{16}$$

В задачі (15), (16) зробимо заміну $u_m(t,x)=v_m(t,z)$, де $z_i=e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)\times$ $\times e_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Тоді функція $\omega_m(t,x)=v_m(t,z)\cdot\eta(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t\omega_m-\sum_{|k|=2b}a_k\left(P_1\right)S_1\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\partial_z^k\omega_m=v_m(t,z)\partial_t\eta+\eta F_m^{(1)}(t,\tilde{z};v_m)+$$

$$+\sum_{|k|=2b}a_k\left(P_1\right)S_1\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\leq|k|}C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}v_m\partial_z^p\eta\right)\equiv\Psi_m\left(t,z;v_m\right), \tag{17}$$

$$\omega_m(t_\lambda+0,z)=\eta(t_\lambda+0,z)\varphi_m^{(\lambda)}(\tilde{z}), \tag{18}$$

де $\tilde{z}=\left(e_1^{-1}\left(\beta_1^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left(\beta_1^{(2)},x^{(1)}\right)z_1,\dots,e_1^{-1}\left(\beta_n^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left(\beta_n^{(2)},x^{(1)}\right)z_n\right)$;

$$\eta(t,z)=\begin{cases}1,(t,z)\in T_{1/2},\ 0\le\eta(t,z)\le 1;\\ 0,(t,z)\notin T_{3/4},\ \left|\partial_t^j\partial_z^k\eta\right|\le c_{kj}e_1^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right);\end{cases}$$

$$T_8=\Big\{(t,z)\Big|\left|t^{(1)}-t\right|\le 2\delta N_2,\left|z_i-z_i^{(1)}\right|\le 2\delta e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right),$$

$$z_i^{(1)}=e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i^{(1)}\Big\},$$

$$S_1\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)=\prod_{i=1}^{n}e_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right).$$

Коефіцієнти рівняння (17) обмежені сталими, незалежними від точки $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$. Тому, використовуючи теорему 4.1 із ([5], с. 43), для довільних точок $M_1\left(\tau^{(1)},z^{(1)}\right)\in T_{1/2}$, $M_2\left(\tau^{(2)},z^{(2)}\right)\in T_{1/2}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}\left(M_1,M_2\right)\left|\partial_t^j\partial_z^k\omega_m\left(M_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k\omega_m\left(M_2\right)\right|\le c\Big(\left\|\Phi_m\right\|_{C^\alpha\left(T_{3/4}\right)}+$$

$$+\left\|\eta\varphi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(T_{3/4}\cap(t=t_\lambda)\right)}\Big),\qquad(19)$$

$d\left(M_1,M_2\right)$ – параболічна відстань між M_1, M_2, $2bj+|k|=2b$

Враховуючи властивості функції $\eta(t,z)$ і нерівності (7), (8), одержимо

$$\left\|\Phi_m\right\|_{C^\alpha\left(T_{3/4}\right)}\le cW\left(e_1,e_2\right)\left(\left\|v_m;T_{3/4}\right\|_0+\left\|F_m^{(1)};\gamma;0;2b\gamma;T_{3/4}\right\|_\alpha+\right.$$

$$\left.+\left\|v_m;\gamma;0;0;T_{3/4}\right\|_{2b}\right);\qquad(20)$$

$$\left\|\eta\varphi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(T_{3/4}\cap(t=t_\lambda)\right)}\le cW\left(e_1,e_2\right)\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\tilde{\gamma};0;0;T_{3/4}\cap\left(t=t_\lambda\right)\right\|_{2b+\alpha},$$

де $W\left(e_1,e_2\right)=e_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)$.

Із визначення простору $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda)$ випливає справедливість нерівності

$$c_1\left\|v_m;\gamma;0;0;T_{3/4}\right\|_l\le\left\|u_m;\gamma;\beta;0;K_{3/4}\right\|_l\le c_2\left\|v_m;\gamma;0;0;T_{3/4}\right\|_l,$$

$$K_{3/4}=\left\{(t,x)\in\Pi_\lambda,\left|t-t^{(1)}\right|\le(4\delta)^{2b}N_1,\left|x_i-x_i^{(1)}\right|\le 4\delta n^{-1}N_2,\ i\in\{1,2,\dots,n\}\right\}.$$

Підставляючи (20) у (19) і повертаючись до змінних (t,x), знаходимо

$$E_1+E_2\le c\Bigg(\left\|F_m^{(1)};\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_\alpha+\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;K_{3/4}\cap\left(t=t_\lambda\right)\right\|_{2b+\alpha}+$$

$$\left.+\left\|u_m;K_{3/4}\right\|_0+\left\|u_m;\gamma;\beta;0;K_{3/4}\right\|_{2b}\right).\qquad(21)$$

Для знаходження норми $\left\|F_m^{(1)};\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_\alpha$ досить оцінити півнорми кожного доданка виразу $F_m^{(1)}(t,x;u_m)$. Скориставшись нерівностями (7), (8) одержимо

$$\left\|F_m^{(1)};\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_\alpha\le c_3\left(\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_\alpha+\varepsilon_2\left\|u_m;\gamma;\beta;0;K_{3/4}\right\|_{2b+\alpha}\right)+$$

$$+c_4 \left\|u_m; K_{3/4}\right\|_0. \qquad (22)$$

Підставляючи (22) у (21), знаходимо

$$E_1 + E_2 \leq c_3 \left(\left\|F_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; K_{3/4}\right\|_\alpha + \varepsilon_2 \left\|u_m; \gamma; \beta; 0; K_{3/4}\right\|_{2b+\alpha} \right) +$$

$$+c \left\| \varphi_m^{(\lambda)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; K_{3/4} \cap (t = t_\lambda) \right\|_{2b+\alpha} + c_5 \left\|u_m; K_{3/4}\right\|_0. \qquad (23)$$

Використовуючи нерівності (11), (14), (23) і вибираючи ε_1, ε_2 досить малими, одержимо нерівність (9). □

Знайдемо оцінку норми $\|u_m; \Pi_\lambda\|_0$.

В задачі (10) зробимо заміну $u_m(t,x) = \varphi_m^{(\lambda)}(x) + u_m^{(1)}(t,x)$. Одержимо задачу для розв'язку $u_m^{(1)}(t,x)$

$$\left(L_1 u_m^{(1)}\right)(t,x) = F_m(t,x) - \left(L_1 \varphi_m^{(\lambda)}\right)(x),$$
$$u_m^{(1)}(t_\lambda + 0, x) = 0. \qquad (24)$$

Правильна така теорема.

Теорема 3. *Якщо $u_m^{(1)}(t,x)$ – єдиний класичний розв'язок задачі* (24) *і виконані умови а), б), то для $u_m^{(1)}(t,x)$ справджується нерівність*

$$\left\|u_m^{(1)}; \Pi_\lambda\right\|_0 \leq c \left\|L_1 u_m^{(1)}; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_\lambda\right\|_0, \qquad (25)$$

де стала c не залежить від m.

За умов накладених на гладкість коефіцієнтів задачі (10) *і функцій F_m, $\varphi_m^{(\lambda)}$ існує єдиний розв'язок задачі* (10), *який належить простору $C^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi_\lambda)$ і має при кожному фіксованому m_1, m_2 скінченну норму [6].*

Скориставшись методикою доведення зауваження 2 ([17], с. 79), встановлюємо нерівність (25).

Доведення теореми 1. Оскільки $\|F_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_\lambda\|_\alpha \leq c \, \|f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_\lambda\|_\alpha$, $\left\| \varphi_m^{(\lambda)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi_\lambda \cap (t = t_\lambda) \right\|_{2b+\alpha} \leq c \|\varphi_\lambda; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi_\lambda \cap (t = t_\lambda)$, то, використовуючи нерівності (9), (25), одержимо

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi_\lambda\|_{2b+\alpha} \leq c_4 \left(\|f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_\lambda\|_\alpha + \|\varphi_\lambda; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi_\lambda \cap (t = t_\lambda)\|_{2b+\alpha} \right). \qquad (26)$$

Права частина нерівності (26) не залежить від m_1, m_2 і послідовності

$$\left\{W_m^{(j,k)}\right\} = \left\{e_1\left(2bj\gamma^{(1)}, t\right) e_2\left(2bj\gamma^{(2)}, x\right) S(e_1, e_2; t, x) \left|\partial_t^j \partial_x^k u_m(t,x)\right|\right\},$$

$$2bj + |k| \leq 2b$$

рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в $\overline{Q}_\lambda$. За теоремою Арчела існують послідовності $\left\{W_{m(l)}^{(j,k)}\right\}$, рівномірно збіжні при $m(l) \to \infty$ до $W^{(j,k)}$. Переходячи до границі при $m(l) \to \infty$ в задачі (10) одержимо, що $u(t,x) = W^{(0,0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u \in H^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi_\lambda)$ і правильна оцінка (3).

Оскільки $H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda) \subset H^{\alpha}(\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi_\lambda)$, то для $f \in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda)$ виконується нерівність $\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi_\lambda\|_\alpha \le c\,\|f;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_\alpha$. Тому, враховуючи нерівність (3), для розв'язку задачі (1), (2) правильна оцінка

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{2b+\alpha} \le c\left(\|f;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_\alpha + \|\varphi_\lambda;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi_\lambda \cap (t=t_\lambda)\|_{2b+\alpha}\right). \tag{27}$$

Будемо розглядати $u(t,x)$ при фіксованих (t,x) як лінійний неперервний функціонал $F\,(f,\varphi_\lambda)$ на нормованому просторі $C_\alpha \equiv H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda) \times H^{2b+\alpha}\left(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi_\lambda \cap (t=t_\lambda)\right)$ з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (27). Беручи до уваги включення $C_\alpha \subset C(\Pi_\lambda)$ і згідно з теоремою Рісса, можна вважати, що $u(t,x)$ породжує борелівську міру $Z_{(\lambda)}(t,x;M)$, яка визначається на σ-алгебрі підмножин G області Π_λ, включаючи Π_λ і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (4).

Список літератури

[1] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ : Наук. думка, 2002. 416 с.

[2] Власій О. Д., Пташник Б. Й. *Задача з нелокалльними умовами для рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної.* Укр. мат. журн. 2003. **55**, № 8. С. 1022-1034.

[3] Клюс І. С., Пташник Б. Й. *Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом.* Укр. мат. журн. 1999. **51**, № 12. С. 1604-1613.

[4] Пташник Б. Й., Тимків І. Р. *Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами.* Доп. НАН України. 2008. № 12. С. 42-48.

[5] Матійчук М. І. Параболічні сингулярні крайові задачі. Київ : Інститут математики НАН України, 1999. 176 с.

[6] Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. Чернівці : Прут, 2003. 248 с.

[7] Ivasishen S. D., Eidelman S. D. *2b-parabolic equations with degeneration in some of the variables.* Dokl. Akad. Nauk, 1998. Vol. 360, № 3. P. 303-305.

[8] Івасишен С. Д., Літовченко В. А. *Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з недодатним родом.* Укр. мат. журн. 2010. **62**, № 10. С. 1330-1350.

[9] Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С. *Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині.* Буковинський мат. журн. 2016. **4**, № 3-4. С. 57-68.

[10] Пукальський І. Д., Яшан Б. О. *Крайова задача з імпульсною дією для параболічного рівняння з виродженням.* Укр. мат. журнал. 2019. **71**, № 5. С. 645-655.

[11] Пукальський І. Д., Яшан Б. О. *Одностороння крайова задача з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженням.* Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2018. **61**, № 4. С. 35-48.

[12] 1. Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *The Cauchy problem for parabolic equations with degeneration.* Advances in Mathematical Physics, 2020. **2020**, Article ID 1245143, 7 pages.

[13] Пукальський І. Д., Яшан Б. О. *Нелокальна багатоточкова за часом задача для параболічних рівнянь з виродженням.* Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2017. **60**, № 2. С. 32-40.

[14] Эйдельман С. Д. Параболические системы. М. : Наука, 1964. 443 с.

[**15**] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М. : Мир, 1968. 427 с.

[**16**] Пукальський І. Д. *Задача Коші для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями.* Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2021. **64**, № 2. С. 31-41.

[**17**] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М. : ИЛ, 1962. 205 с.

Список літератури

[**1**] Ptashnyk B. Y., Il'kiv V. S., Kmit' I. Y., Polishchuk V. M. Nonlocal boundary value problems for equations with partial derivatives. Kyiv : Scientific thought, 2002. 416 p.

[**2**] Vlasiy O. D., Ptashnyk B. Y. *A problem with nonlocal conditions for equations with partial derivatives is not solved with respect to the higher derivative.* Ukrainian Mathematical Journal 2003. **55**, № 8. P. 1022-1034.

[**3**] Klyus I. S., Ptashnyk B. Y. *A multipoint problem for equations with partial derivatives that are not solvable with respect to the highest time derivative.* Ukrainian Mathematical Journal 1999. **51**, № 12. P. 1604-1613.

[**4**] Ptashnyk B. Y., Tymkiv I. R. *A multipoint problem for a parabolic equation with variable coefficients.* Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2008. № 12. P. 42-48.

[**5**] Matiychuk M. I. Parabolic singular boundary value problems. Kyiv : Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 1999. 176 p.

[**6**] Matiychuk M. I. Parabolic and elliptic boundary value problems with singularities. Chernivtsi : Prut, 2003. 248 p.

[**7**] Ivasishen S. D., Eidelman S. D. $2b$*-parabolic equations with degeneration in some of the variables.* Dokl. Akad. Nauk, 1998. Vol. 360, № 3. P. 303-305.

[**8**] Ivasyshen S. D., Litovchenko V. A. *The Cauchy problem for one class of degenerate parabolic equations of the Kolmogorov type with negative genus.* Ukrainian Mathematical Journal 2010. **62**, № 10. P. 1330-1350.

[**9**] Ivasyshen S. D., Medynskyi I. P., Pasichnyk H. S. *Parabolic equations with degeneration on the initial hyperplane.* Bukovinian Mathematical Journal 2016. **4**, № 3-4. P. 57-68.

[**10**] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *A boundary value problem with impulse action for a parabolic equation with degeneration.* Ukrainian Mathematical Journal 2019. **71**, № 5. P. 645-655.

[**11**] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *One-sided boundary value problem with impulse conditions for parabolic equations with degeneration.* Mathematical methods and physical and mechanical fields, 2018. **61**, № 4. P. 35-48.

[**12**] 1. Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *The Cauchy problem for parabolic equations with degeneration.* Advances in Mathematical Physics, 2020. **2020**, Article ID 1245143, 7 pages. DOI: https://doi.org/10.1155/2020/1245143.

[**13**] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *A nonlocal multipoint time problem for parabolic equations with degeneration.* Mathematical methods and physical and mechanical fields, 2017. **60**, № 2. P. 32-40.

[**14**] Eidelman S. D. Parabolic systems. Moscow : Nauka, 1964. 443 p.

[**15**] Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1964. 347 p.

[**16**] Pukal'skii I.D. *The Cauchy problem for non-uniformly parabolic equations with power singularities.* Mathematical methods and physical and mechanical fields, 2021. **64**, № 2. P. 31-41.

[17] Agmon S., Douglas A., Nirenberg L. Estimates near the boundary of solutions of elliptic equations in partial derivatives under common boundary conditions. M. : IL, 1962. 205 p.

Надійшло 28.11.2022

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. *A multipoint in-time problem for the $2b$-parabolic equation with degeneration*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 229–239.

In recent decades, special attention has been paid to problems with nonlocal conditions for partial differential equations. Such interest in such problems is due to both the needs of the general therapy of boundary value problems and their rich practical application (the process of diffusion, oscillations, salt and moisture transport in soils, plasma physics, mathematical biology, etc.).

A multipoint in-time problem for a nonuniformly $2b$-parabolic equation with degeneracy is studied. The coefficients of the parabolic equation of order $2b$ allow for power singularities of arbitrary order both in the time and spatial variables at some set of points. Solutions of auxiliary problems with smooth coefficients are studied to solve the given problem. Using a priori estimates, inequalities are established for solving problems and their derivatives in special Hölder spaces. Using the theorems of Archel and Riess, a convergent sequence is distinguished from a compact sequence of solutions of auxiliary problems, the limiting value of which will be the solution of the given problem. Estimates of the solution of the multipoint time problem for the $2b$-parabolic equation are established in Hölder spaces with power-law weights. The order of the power weight is determined by the order of degeneracy of the coefficients of the groups of higher terms and the power features of the coefficients of the lower terms of the parabolic equation. With certain restrictions on the right-hand side of the equation, an integral image of the solution to the given problem is obtained.

Спічак С. В., Стогній В. І., Копась І. М.

Групова класифікація одного класу (2+1)-вимірних лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів

Проведено групову класифікацію одного класу (2+1)-вимірних лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів. Як результат було знайдено ядро максимальних алгебр інваріантності та неперервні перетворення еквівалентності цього класу рівнянь. За допомогою перетворень еквівалентності виділено всі нееквівалентні підкласи рівнянь, які мають алгебру інваріантності ширшу ніж, ядро основних алгебр інваріантності.

Ключові слова і фрази: групова класифікація, група еквівалентності, рівняння азійських опціонів.

Інститут математики НАН України, м. Київ, Україна (Спічак С. В.)
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна (Стогній В. І., Копась І. М.)
e-mail: *stas.math@gmail.com (Спічак С. В.), stogniyvaleriy@gmail.com (Стогній В. І.), innak@net.ua (Копась І. М.)*

Вступ

У роботі досліджено симетрійні властивості класу $(2+1)$-вимірних лінійних рівнянь вигляду

$$u_t = x^2 u_{xx} + f(x) u_y, \tag{1}$$

де $u = u(t,x,y)$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $f(x) \neq \mathrm{const}$ є довільною гладкою функцією.

Рівняння (1) можна отримати заміною незалежних та залежної змінних з лінійного рівняння ціноутворення азійських опціонів [2]:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + f(S)\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \tag{2}$$

де $V = V(\tau, S, A)$; r, σ — сталі. У зазначеній заміні $S = x$ і функція $f(S)$ має такий самий вигляд, як і в рівнянні (1).

УДК 517.912:512.816
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K10, 58J70.

Рівняння (2) містить низку відомих рівнянь азійських опціонів. Так, у роботі [2] розглядається рівняння із $f(S) = S$ та $f(S) = \ln S$, у роботі [1] — рівняння із $f(S) = \dfrac{1}{S}$.

Широке застосування рівняння (2) в задачах фінансової математики викликає беззаперечний інтерес до отримання його точних розв'язків. Одним із найбільш ефективних методів, що дозволяють здійснити пошук розв'язків, є методи групового аналізу [7, 9].

У роботі [13] досліджено симетрійні властивості рівняння (2) із $f(S) = S$ й отримано такий результат: рівняння допускає 5-параметричну групу нетривіальних локальних перетворень незалежних і залежних змінних. Це дало можливість будувати точні розв'язки у явному вигляді рівняння (2) через проведення симетрійної редукції за операторами з алгебри інваріантності цього рівняння.

Оскільки теоретико-групові методи дають змогу інтегрувати диференціальні рівняння, які мають нетривіальні групи інваріантності, то актуальною є задача групової класифікації диференціального рівняння (1) з довільною функцією.

Сучасну постановку задачі групової класифікації диференціальних рівнянь зробив у 1959 р. Л. В. Овсянніков у роботі [10], де він запропонував метод розв'язування задачі групової класифікації та застосував його для класифікації нелінійних рівнянь теплопровідності. Детальний огляд публікацій із групової класифікації диференціальних рівнянь станом на середину 90-х рр. XX ст. наведено в довіднику [6]. Групову класифікацію еволюційних рівнянь у просторах вищої розмірності, ніж у двовимірному просторі-часі, розглянуто у працях [3–5, 8, 11, 12, 14].

Розв'язання задачі групової класифікації класу рівнянь (1) дозволить виокремити підкласи рівняння, що допускають нетривіальні симетрійні властивості, а також побудувати точні розв'язки таких рівнянь.

1 Постановка задачі

Метою роботи є: 1) знайти ядро A^{ker} максимальних алгебр інваріантності диференціальних рівнянь із класу (1); 2) знайти неперервні перетворення еквівалентності цього класу рівнянь; 3) виділити усі нееквівалентні рівняння із класу, що допускають алгебру інваріантності вищої розмірності, ніж A^{ker}.

2 Ядро максимальних алгебр інваріантності

Групову класифікацію рівнянь (1) можна провести, використовуючи класичний метод Лі-Овсяннікова [7, 9]. Перший етап реалізації цього алгоритму вимагає обчислення ядра максимальних алгебр інваріантності диференціальних рівнянь досліджуваного класу, тобто дозволяє знайти максимальну алгебру інваріантності рівняння (1) за довільної функції $f(x)$.

Теорема 1. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння* (1) *за довільної гладкої функції* $f(x)$ *є алгебра*

$$A^{ker} =< \partial_t, \partial_y, u\partial_u, \beta(t,x)\partial_u > \tag{3}$$

де функція $\beta(t,x)$ *є довільним розв'язком лінійного рівняння* $\beta_t = x^2\beta_{xx}$.

Доведення. Згідно з алгоритмом Лі-Овсяннікова інфінітезимальні оператори, що генерують алгебру інваріантності рівняння (1), шукаємо у класі операторів

$$X = \tau\partial_t + \xi^1\partial_x + \xi^2\partial_y + \eta\partial_u, \tag{4}$$

де $\tau = \tau(t,x,y,u)$, $\xi^1 = \xi^1(t,x,y,u)$, $\xi^2 = \xi^2(t,x,y,u)$, $\eta = \eta(t,x,y,u)$ — довільні двічі диференційовані функції в деякій області простору незалежних t, x, y та залежної змінної u.

З умови $\tilde{X}(u_t - x^2u_{xx} - f(x)u_y)\Big|_{u_t = x^2u_{xx}+f(x)u_y} = 0$, де $\tilde{X}$ — друге продовження оператора X, отримуємо систему визначальних рівнянь, щоб знайти координати оператора X та функції $f(x)$:

$$\tau_x = \tau_u = \xi^1_u = \xi^2_x = \xi^2_u = \eta_{uu} = 0, \tag{5}$$

$$x\tau_t - 2x\xi^1_x + 2\xi^1 - xf(x)\tau_y = 0, \tag{6}$$

$$\xi^1_t - x^2\xi^1_{xx} - f(x)\xi^1_y + 2x^2\eta_{ux} = 0, \tag{7}$$

$$f'(x)\xi^1 + f(x)(\tau_t - \xi^2_y) - (f(x))^2\tau_y + \xi^2_t = 0, \tag{8}$$

$$\eta_t - x^2\eta_{xx} - f(x)\eta_y = 0. \tag{9}$$

Із рівнянь (5) отримуємо, що

$$\tau = \tau(t,y),\ \xi^1 = \xi^1(t,x,y),\ \xi^2 = \xi^2(t,y),\ \eta = \alpha(t,x,y)u + \beta(t,x,y).$$

Далі, оскільки функція $f(x)$ довільна, то розщепивши рівняння (6)–(9) за $f(x)$, $f'(x)$ та $(f(x))^2$ й розв'язавши отримані рівняння, отримаємо такі рівності:

$$\tau_t = \tau_y = \xi^1 = \xi^2_t = \xi^2_y = \alpha_t = \alpha_x = \alpha_y = \beta_y = 0;\quad \beta_t - x^2\beta_{xx} = 0,$$

звідки

$$\tau = C_1,\ \xi^1 = 0,\ \xi^2 = C_2,\ \eta = C_3u + \beta(t,x), \tag{10}$$

де C_i, $i \in \{1,2,3\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t,x)$ — довільний гладкий розв'язок лінійного рівняння $\beta_t = x^2\beta_{xx}$. Оператор X із координатами (4) породжує алгебру (3).

Теорему доведено.

3 Група перетворень еквівалентності

Щоб дослідити симетрійні властивості певного класу, важливо знати перетворення еквівалентності цього класу, тобто такі перетворення змінних, які переводять будь-яке рівняння із класу (1) в деяке інше рівняння з цього самого класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів по одному представнику з найпростішим виглядом рівняння, які називають канонічними рівняннями. Тоді досить дослідити тільки канонічні представники із кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь певного класу.

Означення 1. *Перетворенням еквівалентності класу рівнянь* (1) *називають невироджену локальну заміну змінних*

$$\bar{t} = T(t,x,y,u); \quad \bar{x} = X(t,x,y,u); \quad \bar{y} = Y(t,x,y,u);$$
$$\bar{u} = U(t,x,y,u); \quad \bar{f} = F(t,x,y,u,f),$$

яка переводить кожне рівняння із класу (1) *на функцію* $u = u(t,x,y)$ *з довільним елементом* f *у деяке інше рівняння з цього самого класу на функцію* $\bar{u} = \bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})$ *з новим довільним елементом* $\bar{f}$.

Множина перетворень еквівалентності становить групу перетворень еквівалентності, яку надалі позначатимемо E. Групу E знаходимо за відомим алгоритмом [7, 9]. Провівши обчислення, отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Група* E *рівнянь* (1) *складається з таких перетворень:*

$$\bar{t} = a_1^2 t + a_2; \quad \bar{x} = a_3 x^{a_1}; \quad \bar{y} = a_4 t + a_5 y + a_6;$$
$$\bar{u} = a_7 e^{(1-a_1^2)t/4} x^{(a_1-1)/2} u + \varphi(t,x); \quad \bar{f} = \frac{a_5}{a_1^2} f - \frac{a_4}{a_1^2}, \tag{11}$$

де a_i, $i \in \{1,\dots,7\}$ *— довільні сталі, що задовольняють умову* $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $a_7 \neq 0$; $\varphi(t,x)$ *— довільний розв'язок лінійного рівняння*

$$\varphi_t = x^2 \varphi_{xx} + (1 - a_1) x \varphi_x.$$

4 Розширення ядра максимальних алгебр інваріантності диференціальних рівнянь із класу (1)

Розглянемо розв'язок задачі виділення із класу (1) із точністю до перетворень еквівалентності тих диференціальних рівнянь (знайдемо всі специфікації функції $f(x)$), які мають нетривіальні симетрійні властивості, тобто допускають алгебру інваріантності вищої розмірності, ніж

$$A^{ker} \oplus_s < \gamma(t,x,y)\partial_u >, \tag{12}$$

де $\gamma(t,x,y)$ — довільний гладкий розв'язок відповідного рівняння (1); символ $\oplus_s$ тут і надалі позначатиме напівпряму суму двох алгебр Лі. Оператор симетрії $X = \gamma(t,x,y)\partial_u$, який притаманний лінійним рівнянням й обумовлює принцип суперпозиції, надалі не враховуватимемо.

Перший етап полягає в тому, щоб знайти представників підкласів рівнянь із найпростішим виглядом, алгебра інваріантності яких має вищу розмірності, ніж (12), тобто треба знайти відповідні "канонічні" функції $f(x)$. Для розв'язування цієї задачі необхідно розв'язати систему визначальних рівнянь (5)–(9).

Спочатку розглянемо випадок, коли $\tau_y = 0$.

Із рівняння (6) маємо

$$\xi^1 = \left(\frac{1}{2}\tau_t(\ln x - 1) + P(t,y)\right) x, \tag{13}$$

де $P(t, y)$ — довільна функція.

Якщо $\tau_t = 0$ та $P(t, y) = 0$, то з рівнянь (7)–(9) отримаємо $f(x) = \text{const}$ або максимальною алгеброю інваріантності для рівняння (1) із будь-якою функцією $f(x)$ буде алгебра (12).

Отже, або $\tau_t \neq 0$, або $P(t, y) \neq 0$.

Враховуючи це, підставимо (13) у (8) й отримаємо диференціальне рівняння на функцію $f(x)$:

$$f' + \frac{\tau_t - \xi_y^2}{\left(\frac{1}{2}\tau_t(\ln x - 1) + P(t, y)\right) x} f = -\frac{\xi_t^2}{\left(\frac{1}{2}\tau_t(\ln x - 1) + P(t, y)\right) x}. \tag{14}$$

Оскільки функція $f(x)$ залежить тільки від x, то з рівняння (14) отримаємо таке диференціальне рівняння на функцію $f(x)$:

$$f' + \frac{a_1}{(a_2 \ln x + a_3)x} f = \frac{a_4}{(a_2 \ln x + a_3)x}, \tag{15}$$

де a_i, $i \in \{1, \ldots, 4\}$ – довільні сталі. Розв'язавши рівняння (15), отримаємо такі розв'язки:

1)якщо $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, то $f = Cx^{-\frac{a_1}{a_3}} + \frac{a_4}{a_1}$;

2)якщо $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, то $f = \frac{a_4}{a_2} \ln(a_2 \ln x + a_3) + C$;

3)якщо $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, то $f = C(a_2 \ln x + a_3)^{\frac{a_1}{a_2}} + \frac{a_4}{a_1}$;

4)якщо $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, то $f = \frac{a_4}{a_3} \ln x + C$;

де C — довільна стала.

Оскільки функція $f(x)$ залежить тільки від x, то із розв'язків 1)–4) вона може набути вигляду

$$f = k_1 x^n + k_2, \ f = k_1 \ln(\ln x + k_2) + k_3, \ \text{або} \ f = k_1(\ln x + k_2)^n + k_3 \tag{16}$$

де n, k_i $i \in \{1, 2, 3\}$ — довільні сталі, що задовольняють умову $n \neq 0$, $k_1 \neq 0$.

Використовуючи перетворення еквівалентності (11), можна дещо спростити вигляд функцій (16). Результати цих перетворень відображено у табл. 1.

Таблиця 1.

№ з/п	$f(x)$	Перетворення еквівалентності	$\overline{f}(\overline{x})$
1	$k_1 x^n + k_2$, $k_1 \neq 0$, $n \neq 0$	$\bar{t} = t$, $\overline{x} = \lvert k_1\rvert^{\frac{1}{n}} x$, $\overline{y} = (k_2 t + y)\text{sign} k_1$, $\overline{u} = u$	$\overline{x}^n$
2	$k_1 \ln(\ln x + k_2) + k_3$, $k_1 \neq 0$	$\bar{t} = t$, $\overline{x} = e^{k_2} x$, $\overline{y} = \frac{k_3}{k_1} t + \frac{1}{k_1} y$, $\overline{u} = u$	$\ln \ln \overline{x}$
3	$k_1(\ln x + k_2)^n + k_3$, $k_1 \neq 0$, $n \neq 0$	$\bar{t} = t$, $\overline{x} = e^{k_2} x$, $\overline{y} = \frac{k_3}{k_1} t + \frac{1}{k_1} y$, $\overline{u} = u$	$\ln^n \overline{x}$

Отже, знайдено "канонічні" функції, які представляють відповідні підкласи рівнянь у випадку $\tau_y = 0$. У випадку $\tau_y \neq 0$ аналіз пошуку "канонічних" функцій $f(x)$ аналогічний (хоча і більш складний), і приводить до такого ж результату, що і в попередньому випадку, які відображені в табл. 1.

Останній етап групової класифікації передбачає розв'язування визначальних рівнянь (5)–(9) для кожного випадку отриманих функцій $f(x) = x^n$, $f(x) = \ln\ln x$ та $f(x) = \ln^n x$, де $n \neq 0$, й знаходження відповідних інфінітезимальних операторів симетрії.

Розглянемо випадок $f(x) = x^n$, $n \neq 0$.

Розв'язавши визначальні рівняння (5)–(9) із $f(x) = x^n$, отримуємо такий розв'язок системи:

$$\tau = C_1;\ \xi^1 = (C_2 y + C_3)x;\ \xi^2 = C_2 \frac{n}{2} y^2 + C_3 n y + C_4;$$
$$\eta = \left(C_2 \frac{1}{2n}(x^n + n(1-n)y) + C_5\right) u + \beta(t,x,y),$$

де C_i, $i \in \{1,\ldots,5\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t,x,y)$ — довільний розв'язок рівняння (1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1) з функцією $f(x) = x^n$, $n \neq 0$, є п'ятивимірна алгебра із базисними операторами:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, x\partial_x + ny\partial_y, xy\partial_x + \frac{n}{2} y^2 \partial_y + \frac{1}{2n}(x^n + n(1-n)y)u\partial_u \rangle.$$

Таким чином, в цьому випадку до операторів алгебри A^{ker} додаються оператори

$$X_4 = x\partial_x + ny\partial_y,\ X_5 = xy\partial_x + \frac{n}{2} y^2 \partial_y + \frac{1}{2n}(x^n + n(1-n)y)u\partial_u.$$

Якщо $f(x) = \ln\ln x$, то із системи визначальних рівнянь (6)–(9) отримуємо такий розв'язок:

$$\tau = C_1 t + C_2;\ \xi^1 = \frac{1}{2} C_1 x \ln x;\ \xi^2 = C_1 \left(y - \frac{1}{2} t\right) + C_3;$$
$$\eta = \left(\frac{1}{4} C_1 (\ln x - t) + C_4\right) u + \beta(t,x,y),$$

де C_i, $i \in \{1,\ldots,4\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t,x,y)$ — довільний розв'язок рівняння (1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності є чотиривимірна алгебра із базисними операторами:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2} x \ln x \partial_x + \left(y - \frac{1}{2} t\right) \partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u\partial_u \rangle.$$

У цьому випадку до операторів алгебри A^{ker} додається оператор

$$X_4 = t\partial_t + \frac{1}{2} x \ln x \partial_x + \left(y - \frac{1}{2} t\right) \partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u\partial_u.$$

Розглянемо випадок, коли у класі рівнянь (1) $f(x) = \ln^n x$, $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Якщо $f(x) = \ln^n x$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, то із системи визначальних рівнянь (5)–(9) отримуємо такий розв'язок:

$$\tau = C_1 t + C_2;\ \xi^1 = \frac{1}{2} C_1 x \ln x;\ \xi^2 = C_1 \frac{n+2}{2} y + C_3;$$
$$\eta = \left(\frac{1}{4} C_1 (\ln x - t) + C_4\right) u + \beta(t,x,y),$$

де C_i, $i \in \{1,\ldots,4\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t,x,y)$ — довільний розв'язок рівняння (1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності є чотиривимірна алгебра із базисними операторами:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2} x \ln x \partial_x + \frac{n+2}{2} y \partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t) u \partial_u \rangle.$$

Таким чином, в цьому випадку до операторів алгебри A^{ker} додається оператор

$$X_4 = t\partial_t + \frac{1}{2} x \ln x \partial_x + \frac{n+2}{2} y \partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t) u \partial_u.$$

Розглянемо випадок, коли у класі рівнянь (1) $f(x) = \ln x$.

Розв'язавши систему визначальних рівнянь (5)–(9) із $f(x) = \ln x$, отримуємо такий розв'язок:

$$\tau = C_1 t^2 + C_2 t + C_3;$$
$$\xi^1 = \left(C_1 t + \frac{1}{2} C_2\right) x \ln x + (C_4 t^2 + C_5 t - 3C_1 y + C_6) x;$$
$$\xi^2 = 3C_1 t y + \frac{3}{2} C_2 y - \frac{1}{3} C_4 t^3 - \frac{1}{2} C_5 t^2 - C_6 t + C_7;$$
$$\eta = \left(-C_1 \ln^2 x + \frac{1}{2}\left((C_1 - 2C_4) t - C_5 + \frac{1}{2} C_2\right) \ln x + \frac{1}{4}(2C_4 - C_1) t^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}(2C_5 - 8C_1 - C_2) t - \left(C_4 + \frac{3}{2} C_1\right) y + C_8\right) u + \beta(t,x,y),$$

де C_i, $i \in \{1,\ldots,8\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t,x,y)$ — довільний розв'язок рівняння (1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1) із функцією $f(x) = \ln x$ є восьмивимірна алгебра із базисними операторами:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, x\partial_x - t\partial_y, tx\partial_x - \frac{1}{2} t^2 \partial_y + \frac{1}{2}(t - \ln x) u \partial_u,$$
$$t^2 \partial_t + (t \ln x - 3y) x \partial_x + 3ty\partial_y + \left(-\ln^2 x + \frac{1}{2} t \ln x - \frac{1}{4} t^2 - 2t - \frac{3}{2} y\right) u \partial_u,$$
$$t\partial_t + \frac{1}{2} x \ln x \partial_x + \frac{3}{2} y \partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t) u \partial_u,\ t^2 x \partial_x - \frac{1}{3} t^3 \partial_y - \left(t \ln x + y - \frac{1}{2} t^2\right) u \partial_u \rangle.$$

У цьому випадку, до операторів алгебри A^{ker} додаються оператори:

$$X_4 = x\partial_x - t\partial_y, X_5 = tx\partial_x - \frac{1}{2}t^2\partial_y + \frac{1}{2}(t - \ln x)u\partial_u,$$
$$X_6 = t^2\partial_t + (t\ln x - 3y)x\partial_x + 3ty\partial_y + \left(-\ln^2 x + \frac{1}{2}t\ln x - \frac{1}{4}t^2 - 2t - \frac{3}{2}y\right)u\partial_u,$$
$$X_7 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\ln x\partial_x + \frac{3}{2}y\partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u\partial_u,$$
$$X_8 = t^2x\partial_x - \frac{1}{3}t^3\partial_y - \left(t\ln x + y - \frac{1}{2}t^2\right)u\partial_u.$$

5 Висновки

У цій статті знайдено неперервні перетворення класу лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів і зроблено групову класифікацію цих рівнянь, у результаті якої виділено всі нееквівалентні підкласи рівнянь, які мають алгебру інваріантності ширшу, ніж ядро основних алгебр інваріантності рівнянь класу (1).

На наступних етапах для рівнянь, які є представниками нееквівалентних підкласів, ми плануємо зробити класифікацію всіх одновимірних і двовимірних підалгебр їх алгебр інваріантності, а надалі, використовуючи інваріанти операторів цих підалгебр, провести симетрійну редукцію і знайти всі нееквівалентні інваріантні розв'язки.

Список літератури

[**1**] Al-Azemi F., Calin O. *Asian Options with Harmonic Average.* Appl. Math. Inf. Sci. 2015, **9** (6), 2803–2811.

[**2**] Barucci E., Polidoro S., Vespri V. *Some Results on Partial Differential Equations and Asian options.* Math. Models and Methods in Appl. Sci. 2001, **11** (3), 475–497.

[**3**] Demetriou E., Ivanova N. M., Sophocleous C. *Group analysis of (2+1)- and (3+1)-dimensional diffusion-convection equations.* J. Math. Anal. Appl. 2008, **348** (1), 55–65.

[**4**] Dorodnitsyn V. A., Knyazeva I. V., Svirschevsky S. R. *Group properties of the heat equation with a source in two-dimensional and three-dimensional cases.* Differential Equations 1983, **19** (7), 1215–1223. (in Russian)

[**5**] Elwakil S. A., Zahran M. A., Sabry R. *Group classification and symmetry reduction of a (2+1)-dimensional diffusion-advection equation.* J. Appl. Math. Phys. 2005, **56** (6), 986–999.

[**6**] Ibragimov N. X. (ed.) CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. CRC Press, Boca Raton, 1994.

[**7**] Lahno V. I., Spichak S. V., Stogniy V. I. Symmetry Analysis of Evolution Type Equations. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2002. (in Ukrainian)

[**8**] Nikitin A. G., Popovych R. O. *Group classification nonlinear Schrodinger equations.* Ukr. Math. J. 2001, **53** (8), 1255–1265.

[**9**] Ovsiannikov L. V. Group Analysis of Differential Equations. Academic Press, New York, 1982.

[**10**] Ovsiannikov L. V. *Group properties of nonlinear heat equation.* Dokl. AN SSSR 1959, **125** (3), 492–495. (in Russian)

[**11**] Rassokha I., Serov M., Spichak S., Stogniy V. *Group classification of a class of generalized nonlinear Kolmogorov equations and exact solutions.* J. Math. Phys. 2018, **59** (7), 071514.

[**12**] Spichak S. V., Stogniy V. I. *Symmetry classification and exact solutions of the Kramers equation.* J. Math. Phys. 1998, **39** (6), 3505–3510.

[**13**] Spichak S. V., Stogniy V. I., Kopas I. M. *Symmetry properties and exact solutions of (2+1)-dimensional linear equations of pricing of Asian options.* Proceedings of Institute of Mathematscs of NAS of Ukraine 2019, **16** (1), 164–173. (in Ukrainian)

[**14**] Vaneeva O., Karadzhov Yu., Sophocleous C. *Group analysis of a class of nonlinear Kolmogorov equations.* Lie Theory and Its Applications in Physics, Springer Proc. Math. Stat., Springer, Singapore 2016, **191**, 349–360.

Надійшло 19.12.2022

Spichak S. V., Stogniy V. I., Kopas I. M. *Group classification of one class (2+1)-dimensional linear equations of Asian options pricing*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 240–248.

A group classification of one class of (2+1)-dimensional linear equations of Asian options pricing was carried out. As a result, the kernel of maximal invariance algebras and continuous equivalence transformations of this class of equations were found. Using equivalence transformations, all non-equivalent subclasses of equations that have an invariance algebra wider than the kernel of maximal invariance algebras are selected. For each such subclass of equations, Lie algebras of symmetry operators of dimensions four, five, and eight are found.

Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 2, 249–264 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №2, 249–264

Шевчук Р.В., Савка І.Я.

Нелокальна задача спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку типу Колмогорова з розривними коефіцієнтами

У статті доведено теореми про існування і єдиність класичного розв'язку однієї нелокальної задачі спряження для одновимірного (за просторовою змінною) оберненого рівняння Колмогорова з розривними коефіцієнтами. Використовуючи розв'язок цієї задачі, визначено двопараметричну напівгрупу операторів, яка описує на прямій дійсних чисел деякий неоднорідний марковський процес.

Ключові слова і фрази: дифузійний процес, параболічне рівняння.

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна (Шевчук Р.В.)
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, Львів, Україна (Савка І.Я.)
e-mail: *r.v.shevchuk@gmail.com (Шевчук Р.В.), s-i@ukr.net (Савка І.Я.)*

Вступ

Метою статті є побудова та дослідження властивостей двопараметричної напівгрупи Феллера, якій відповідає неоднорідний марковський процес на прямій такий, що всередині інтервалів, розділених між собою точками, положення яких на прямій залежить від часової змінної, він збігається із заданими там звичайними дифузійними процесами, а його поведінка в межових точках цих інтервалів визначається заданими умовами спряження типу Феллера-Вентцеля (див. [1–3]). У розглядуваному нами випадку ці умови є нелокальними, кожна з них містить лише інтегральний член, який відповідає за стрибкоподібне повернення процесу з межі всередину області. Описану проблему ще називають задачею про склеювання дифузійних процесів на прямій або задачею про побудову математичної моделі фізичного явища дифузії в середовищі з мембранами (див. [4]). У нашому розумінні термін рухома мембрана означає, що її положення на числовій прямій може змінюватися, воно визначається деякою заданою функцією часової змінної.

Центральне місце в роботі займає дослідження сформульованої в п.1 нелокальної параболічної задачі спряження, до якої редукується вихідна проблема. Особливість цієї

УДК 519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60J60, 35K20.

задачі в тому, що рівняння, які розглядаються є оберненими рівняннями Колмогорова, області на площині, в яких задані рівняння є криволінійними, а функції часової змінної, які визначають межі цих областей задовольняють лише умову Гельдера з показником більшим, ніж $\frac{1}{2}$. Також відзначимо, що ті варіанти умов спряження Феллера-Вентцеля, які розглядаються у статті, не містять членів з похідними функції, а отже їх можна віднести до класу так званих нетрансверсальних нелокальних умов.

Розв'язок останньої задачі отримано методом граничних інтегральних рівнянь і доведено, що він володіє напівгруповою властивістю. Використовуючи інтегральне зображення знайденої напівгрупи, обгрунтовано твердження (див. п.2) про те, що ця напівгрупа породжує деякий неоднорідний марковський процес на прямій.

Зауважимо, що ця стаття узагальнює результати статті [5], у якій аналогічна задача вивчалася для випадку однієї рухомої мембрани (див. також [6,7], де розглядалися інші варіанти умов спряження Феллера-Вентцеля). Окрім вказаних статей, ми відзначаємо ще роботи [8] і [9], присвячені іншим підходам до побудови марковських процесів з нелокальними крайовими умовами Вентцеля, які спираються на використання методів функціонального і стохастичного аналізу відповідно, а також роботу [10], у якій наведено огляд праць, присвячених застосуванню методу граничних інтегральних рівнянь до дослідження початково-крайових задач для параболічних рівнянь.

1 Постановка задачі, допоміжні відомості і припущення

Розглянемо на площині (s,x) область

$$S_t = \{(s,x): \quad 0 \le s < t \le T,\, -\infty < x < \infty\}$$

(T — фіксоване додатне число) і позначимо через $\overline{S}_t$ її замикання. Припустимо, що $\overline{S}_T$ містить в собі неперервні криві $x = r_i(s)$, $0 \le s \le T$, $i = 1,\ldots,n$, $n \in \mathbf{N}$, причому $r_1(s) < r_2(s) < \ldots < r_n(s)$ для всіх $s \in [0,T]$. Ці криві розділяють S_t на $n+1$ областей

$$S_t^{(i)} = \{(s,x): \quad 0 \le s < t \le T,\, x \in D_s^{(i)}\},$$

де $D_s^{(1)} = (-\infty, r_1(s))$, $D_s^{(2)} = (r_1(s), r_2(s)), \ldots,$ $D_s^{(n+1)} = (r_n(s), \infty)$.

Нехай в області $S_t^{(i)}$ задано параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} b_i(s,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_i(s,x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (s,x) \in S_t^{(i)},\, i = 1,\ldots,n+1. \tag{1}$$

Поставимо задачу про знаходження функції $u(s,x,t)$ ($(s,x) \in \overline{S}_t$), яка задовольняє рівняння (1), "початкову" умову

$$\lim_{s \uparrow t} u(s,x,t) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

і умови спряження

$$u(s, r_i(s) - 0, t) = u(s, r_i(s) + 0, t), \quad 0 \le s < t \le T,\, i = 1,\ldots,n, \tag{3}$$

$$\int\limits_{D_s^{(i)} \cup D_s^{(i+1)}} (u(s, r_i(s), t) - u(s,y,t)) \mu_i(s, dy) = 0, \quad 0 \le s < t \le T,\, i = 1,\ldots,n. \tag{4}$$

Будемо вважати виконаними наступні умови.

I. Рівняння (1) параболічного типу в області $\overline{S}_T$, тобто існують додатні сталі b і B такі, що $b \le b_i(s,x) \le B$ при всіх $(s,x) \in \overline{S}_T$, $i = 1, \ldots, n+1$. Крім того, коефіцієнти $a_i(s,x)$ обмежені в $\overline{S}_T$, $i = 1, \ldots, n+1$.

II. Коефіцієнти $a_i(s,x)$ та $b_i(s,x)\,(i = 1, \ldots, n+1)$ належать до класу Гельдера $H^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{S}_T)$, $0 < \alpha < 1$ (означення класів Гельдера див. у [11, с. 16]).

III. Функція φ з (2) належить до простору обмежених неперервних на $\mathbb{R}$ функцій, який позначатимемо через $C_b(\mathbb{R})$. Норма в цьому просторі визначається рівністю $\|\varphi\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$.

IV. Виконані умови узгодження: $\int\limits_{D_t^{(i)} \cup D_t^{(i+1)}} (\varphi(r_i(t)) - \varphi(y))\mu_i(t,dy) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$

V. Криві $r_i(s)$ належать до класу Гельдера $H^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$, $i = 1, \ldots, n$.

VI. В умовах (4) $\mu_i(s,\cdot)$ — ймовірнісні міри на $D_s^{(i)} \cup D_s^{(i+1)}$, $s \in [0,T]$, $i = 1, \ldots, n$, які мають таку властивість: інтеграл від будь-якої функції $f \in C_b(\mathbb{R})$ по $D_s^j\,(j = i,\ i{+}1)$ відносно міри $\mu_i(s,\cdot)$, як функція змінної s, належать до класу $H^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$.

Зауважимо, що задачу (1)-(4) можна розглядати як задачу побудови двопараметричної напівгрупи Феллера $T_{s,t}$, $0 \le s \le t \le T$, яка породжує на прямій $\mathbb{R}$ деякий неоднорідний марковський процес. Виконання для функції $u(s,x,t) \equiv T_{s,t}\varphi(x)$ рівняння (1) вказує на те, що у внутрішніх точках області $D_s^{(i)}$ цей процес збігається із заданим там дифузійним процесом, керованим оператором $\frac{1}{2}b_i(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_i(s,x)\frac{\partial}{\partial x}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, а умова (2) узгоджується з рівністю $T_{t,t} = I$, де I — тотожний оператор. Умова спряження (3) відображає властивість феллеровості процесу, а умова спряження (4) є нелокальною умовою спряження Феллера-Вентцеля, яка відповідає за стрибкоподібний характер повернення процесу з спільної межі областей $D_s^{(i)}$ і $D_s^{(i+1)}$, де розташована мембрана, в середину однієї з цих областей.

Умови I, II забезпечують існування фундаментального розв'язку кожного з рівнянь в (1), який позначимо через $G_i(s,x,t,y)\,(0 \le s < t \le T,\ x,y \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n+1)$. Нагадаємо, що функція G_i при фіксованих $t \in (0,T]$, $y \in \mathbb{R}$, як функція аргументів $(s,x) \in [0,t) \times \mathbb{R}$ задовольняє рівняння (1) і допускає зображення

$$G_i(s,x,t,y) = Z_{i,0}(s,x,t,y) + Z_{i,1}(s,x,t,y), \quad i = 1, \ldots, n+1, \tag{5}$$

де

$$Z_{i,0}(s,x,t,y) = [2\pi b_i(t,y)(t-s)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2b_i(t,y)(t-s)}\right\},$$

$$Z_{i,1}(s,x,t,y) = \int\limits_s^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} Z_{i,0}(s,x,\tau,z)Q_i(\tau,z,t,y)dz,$$

а функція $Q_i(s,x,t,y)$ є розв'язком деякого сингулярного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду.

Відзначимо оцінки

$$|D_s^r D_x^p Z_{i,0}(s,x,t,y)| \le C(t-s)^{-\frac{1+2r+p}{2}} \exp\left\{-c\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \tag{6}$$

$$|D_s^r D_x^p Z_{i,1}(s,x,t,y)| \le C(t-s)^{-\frac{1+2r+p-\alpha}{2}} \exp\left\{-c\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \tag{7}$$

де $0 \le s < t \le T$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n+1$, c і C — додатні сталі (тут і надалі через c і C будуть позначатися сталі, що залежать від даних задачі (1)-(4), без уточнення їх конкретного значення); r і p — цілі невід'ємні числа такі, що $2r + p \le 2$, D_s^r — символ частинної похідної за змінною s порядку r, D_x^p — символ частинної похідної за змінною x порядку p.

2 Розв'язування задачі (1)-(4)

Розв'язок задачі (1)-(4) будемо шукати у вигляді

$$u(s,x,t) = u_i(s,x,t) = u_{i,0}(s,x,t) + \sum_{j=0}^{1} u_{i,1}^{(j)}(s,x,t), \quad (s,x) \in \overline{S}_t^{(i)},\ i = 1, \ldots, n+1, \tag{8}$$

де $u_{i,0}$ — тепловий потенціал Пуассона, породжений фундаментальним розв'язком G_i рівняння (1),

$$u_{i,0}(s,x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_i(s,x,t,y)\varphi(y)dy, \tag{9}$$

а $u_{i,1}^{(j)}$ — потенціали простого шару

$$u_{i,1}^{(j)}(s,x,t) = \int\limits_s^t G_i(s,x,\tau,r_{i+j-1}(\tau))V_{2i+j-2}(\tau,t)d\tau. \tag{10}$$

В останній формулі $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$ — невідомі функції; $V_0 \equiv V_{2n+1} \equiv 0$, $r_0 \equiv r_{n+1} \equiv 0$. Функції $u_{1,1}^{(0)}$ та $u_{n+1,1}^{(1)}$, які тотожно дорівнюють нулеві, потрібні нам лише для того, щоб мати змогу записати формулу для $u(s,x,t)$ у зручному для нас вигляді (8) і не розглядати при цьому окремо випадки, коли $i = 1$ та $i = n+1$.

Припустимо a priori, що невідомі функції $V_p(s,t)$, $p = 1, \ldots, 2n$, є неперервними в області $0 \le s < t \le T$ і мають таку властивість:

(A) для будь-яких $t \in (0,T]$ і $\varepsilon > 0$ існує $s_0 \in [0,t)$ таке, що при всіх $s \in [s_0,t)$ виконується нерівність
$$|V_p(s,t)| \le \varepsilon C(t-s)^{-\frac{1}{2}},$$
де C — додатна стала, яка не залежить від ε.

Ці припущення разом з умовою III дозволяють стверджувати (див. властивості теплових потенціалів, наведені, наприклад, у [4, 11]), що функція $u_i(s,x,t)$, задана рівністю (8), задовольняє в області $(s,x) \in S_t^{(i)}$ $(i = 1,\ldots,n+1)$ рівняння (1) з "початковою" умовою (2). Отже, для того, щоб знайти розв'язок задачі (1)-(4), нам потрібно визначити функції $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$ з умов спряження (3), (4).

Використовуючи умови (3), (4), а також властивість VI міри μ_i $(i = 1,\ldots,n)$, отримуємо наступні співвідношення $(0 \le s < t \le T,\ i = 1,\ldots,n,\ m = i,\ i+1)$:

$$u_m(s, r_i(s), t) = \sum_{k=i}^{i+1} \int\limits_{D_s^{(k)}} u_k(s,y,t)\mu_i(s,dy). \tag{11}$$

Підставивши праву частину виразу (8) в (11), отримуємо таку систему інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду для $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{1}\Bigg(\int\limits_s^t G_m(s,r_i(s),\tau,r_{m+j-1}(\tau))V_{2m+j-2}(\tau,t)d\tau \\
&-\sum_{k=i}^{i+1}\int\limits_s^t V_{2k+j-2}(\tau,t)d\tau \int\limits_{D_s^{(k)}} G_k(s,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s,dy)\Bigg) = \Phi_{m,i}(s,t),
\end{aligned} \tag{12}$$

де $0 \le s < t \le T$, $i = 1,\ldots,n$, $m = i,\ i+1$,

$$\Phi_{m,i}(s,t) = \sum_{k=i}^{i+1} \int\limits_{D_s^{(k)}} u_{k,0}(s,y,t)\mu_i(s,dy) - u_{m,0}(s,r_i(s),t).$$

За допомогою прийому Гольмгрена зведемо систему рівнянь (12) до еквівалентної системи рівнянь Вольтерри другого роду. З цією метою введемо інтегро-диференціальний оператор $\mathcal{E}$, який діє за правилом

$$\mathcal{E}(s,t)\Phi_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^t (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} f(\rho,t)d\rho, \quad 0 \le s < t \le T.. \tag{13}$$

Розглянемо спочатку дію оператора $\mathcal{E}$ на праві частини рівнянь (12), тобто на функції $\Phi_{m,i}(s,t)$ $(0 \le s < t \le T,\ i = 1,\ldots,n,\ m = i,\ i+1)$. Для цього нам знадобиться наступна лема.

Лема 1. *Для функцій* $\Phi_{m,i}(s,t)$ $(0 \le s < t \le T,\ i = 1,\ldots,n,\ m = i,\ i+1)$ *виконуються співвідношення:*

1) $\lim\limits_{s \uparrow t} \Phi_{m,i}(s,t) = 0$;

2) $|\Phi_{m,i}(s,t) - \Phi_{m,i}(\widetilde{s},t)| \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}}$ *при всіх* $0 \le \widetilde{s} < s < t \le T$.

Доведення. Для доведення твердження 1) використаємо оцінку (6), умову узгодження IV і властивіть VI міри μ_i. Маємо

$$\lim_{s\uparrow t}\Phi_{m,i}(s,t)=\sum_{k=i}^{i+1}\int\limits_{D_t^{(k)}}\varphi(y)\mu_i(t,dy)-\varphi(r_i(t))$$
$$=\int\limits_{D_t^{(i)}\cup D_t^{(i+1)}}(\varphi(y)-\varphi(r_i(t)))\mu_i(t,dy)=0. \tag{14}$$

Перейдемо до доведення твердження 2). Запишемо

$$\Phi_{m,i}(s,t)-\Phi_{m,i}(\widetilde{s},t)=I_i^{(1)}(s,\widetilde{s},t)+I_i^{(2)}(s,\widetilde{s},t)+J_{m,i}(s,\widetilde{s},t), \tag{15}$$

де

$$I_i^{(1)}(s,\widetilde{s},t)=\sum_{k=i}^{i+1}\int\limits_{D_s^{(k)}}[u_{k,0}(s,y,t)-u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)]\mu_i(s,dy),$$
$$I_i^{(2)}(s,\widetilde{s},t)=\sum_{k=i}^{i+1}\Bigg(\int\limits_{D_s^{(k)}}u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)\mu_i(s,dy)-\int\limits_{D_{\widetilde{s}}^{(k)}}u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)\mu_i(\widetilde{s},dy)\Bigg),$$
$$J_{m,i}(s,\widetilde{s},t)=u_{m,0}(\widetilde{s},r_i(\widetilde{s}),t)-u_{m,0}(s,r_i(s),t).$$

Покажемо, що кожен доданок в правій частині виразу (15) допускає нерівність 2). Оскільки при $\widetilde{s}<s$

$$\begin{aligned}
&|u_{k,0}(s,y,t)-u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)|\\
&=|u_{k,0}(s,y,t)-u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)|^{\frac{1+\alpha}{2}}|u_{k,0}(s,y,t)-u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)|^{\frac{1-\alpha}{2}}\\
&\le\left|\frac{\partial u_{k,0}(\hat{s},y,t)}{\partial\hat{s}}\Bigg|_{\hat{s}=\widetilde{s}+\theta(s-\widetilde{s})}\cdot(s-\widetilde{s})\right|^{\frac{1+\alpha}{2}}(|u_{k,0}(s,y,t)|+|u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)|)^{\frac{1-\alpha}{2}}\\
&\le C\|\varphi\|\left[(t-\widetilde{s}-\theta(s-\widetilde{s}))^{-1}(s-\widetilde{s})\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}\le C\|\varphi\|\big[((t-s)\\
&+(s-\widetilde{s})(1-\theta))^{-1}(s-\widetilde{s})\big]^{\frac{1+\alpha}{2}}\le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}}\quad(0<\theta<1),
\end{aligned}$$

то нерівність 2) виконується для доданка $I_i^{(1)}$. Для $I_i^{(2)}$ справедливість цієї нерівності забезпечує оцінка

$$|I_i^{(2)}|\le C\|\varphi\|(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

яка є очевидним наслідком припущення VI. Для $J_{m,i}$ нерівність 2) встановлюється за подібною схемою, що й для $I_i^{(1)}$, з урахуванням припущення V.

Отже,

$$|I_i^{(1)}+I_i^{(2)}+J_{m,i}|\le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}},\quad\widetilde{s}<s.$$

Лема доведена. $\square$

Враховуючи обидва твердження леми 1, для функцій $\widehat{\Phi}_{m,i} \equiv \mathcal{E}(s,t)\Phi_{m,i}$ знаходимо зображення

$$\widehat{\Phi}_{m,i}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_s^t (\rho - s)^{-\frac{3}{2}} [\Phi_{m,i}(\rho,t) - \Phi_{m,i}(s,t)] d\rho - \sqrt{\frac{2}{\pi}} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \Phi_{m,i}(s,t) \tag{16}$$

і наступну оцінку ($0 \le s < t \le T$, $i = 1, \dots, n$, $m = i, \, i+1$):

$$|\widehat{\Phi}_{m,i}(s,t)| \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Застосуємо тепер оператор $\mathcal{E}$ до лівих частин рівнянь системи (12). Розглянемо інтеграл ($0 \le s < t \le T$, $i = 1, \dots, n$, $m = i, \, i+1$)

$$L_{m,i}(s,t) = \int\limits_s^t Z_{m,0}(s, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau)) V_{m+i-1}(\tau,t) d\tau.$$

Цей інтеграл виникає в лівій частині кожного з рівнянь в (12) при $m+j-1 = i$ відразу ж після того, як функцію $G_m(s, r_i(s), \tau, r_{m+j-1}(\tau)) = G_m(s, r_i(s), \tau, r_i(\tau))$ подати у вигляді

$$\begin{aligned} G_m(s, r_i(s), \tau, r_i(\tau)) &= Z_{m,0}(s, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau)) + Z_{m,1}(s, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau)) \\ &\quad + [G_m(s, r_i(s), \tau, r_i(\tau)) - G_m(s, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau))]. \end{aligned}$$

Подіємо оператором $\mathcal{E}$ на $L_{m,i}(s,t)$ ($0 \le s < t \le T$, $i = 1, \dots, n$, $m = i, \, i+1$). Маємо

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{m,i}(s,t) &\equiv \mathcal{E}(s,t) L_{m,i} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial}{\partial s} \int\limits_s^t (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} d\rho \int\limits_\rho^t Z_{m,0}(\rho, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau)) V_{m+i-1}(\tau,t) d\tau \quad m = i, \, i+1. \end{aligned}$$

Змінюючи порядок інтегрування за ρ і τ, отримуємо

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{m,i}(s,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial}{\partial s} \int\limits_s^t V_{m+i-1}(\tau,t) d\tau \int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} Z_{m,0}(\rho, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau)) d\rho \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \int\limits_s^t \frac{V_{m+i-1}(\tau,t)}{\sqrt{b_m(\tau, r_i(\tau))}} \int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} (\tau - \rho)^{-\frac{1}{2}} d\rho, \quad m = i, \, i+1. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи співвідношення

$$\int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} (\tau - \rho)^{-\frac{1}{2}} d\rho = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi,$$

знаходимо, що

$$\widehat{L}_{m,i}(s,t) = -\frac{V_{m+i-1}(s,t)}{\sqrt{b_m(s, r_i(s))}}, \quad 0 \le s < t \le T, \; i = 1, \dots, n, \; m = i, \, i+1. \tag{18}$$

Коротко опишемо наші дії після застосування перетворення Гольмгрена до всіх інших складових у лівих частинах рівнянь системи (12). Подіявши оператором $\mathcal{E}$ на ці складові, в отриманих виразах ми спочатку змінюємо порядки інтегрування за ρ і τ, а потім спрощуємо похідні від інтегралів залежних від параметрів, використовуючи таке правило:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_s^t f(s,\tau)d\tau = \int_s^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,\tau)d\tau,$$

якщо $f(s,\tau) \to 0$ при $s \uparrow \tau$. Після виконання вказаних дій і використання співвідношення (18) бачимо, що в результаті застосування оператора $\mathcal{E}$ ліві частини рівнянь системи (12) зводяться до такого вигляду ($0 \le s < t \le T$, $i = 1, \ldots, n$, $m = i$, $i+1$):

$$\begin{aligned}
&-\frac{V_{m+i-1}(s,t)}{\sqrt{b_m(s,r_i(s))}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_s^t V_{m+i-1}(\tau,t)d\tau\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}\Big(Z_{m,1}(\rho,r_i(\tau),\tau,r_i(\tau)) \\
&+\big[G_m(\rho,r_i(\rho),\tau,r_i(\tau)) - G_m(\rho,r_i(\tau),\tau,r_i(\tau))\big]\Big)d\rho+ \\
&+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_s^t V_{3m-i-2}(\tau,t)d\tau\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}} G_m(\rho,r_i(\rho),\tau,r_{2m-i-1}(\tau))d\rho \\
&-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=i}^{i+1}\int_s^t V_{2k+j-2}(\tau,t)d\tau\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho\int_{D_\rho^{(k)}} G_k(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(\rho,dy).
\end{aligned} \tag{19}$$

Прирівнявши (19) до правої частини виразу (16), отримуємо систему інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду. Кожне з рівнянь цієї системи перетворимо таким чином: спочатку обидві його частини помножимо на $-\sqrt{b_m(s,r_i(s))}$, а потім всі вирази з лівої частини отриманої рівності, крім $V_{m+i-1}(s,t)$, перенесемо у праву частину. Після виконання цих перетворень система рівнянь набуде вигляду ($0 \le s < t \le T$, $i = 1, \ldots, n$, $m = i$, $i+1$):

$$V_{m+i-1}(s,t) = \sum_{j=0}^{1}\sum_{k=i}^{i+1}\int_s^t N_{2k+j-2}^{(m-i)}(s,\tau)V_{2k+j-2}(\tau,t)d\tau + \Psi_{m+i-1}(s,t), \tag{20}$$

де

$$N_{2k+j-2}^{(m-i)}(s,\tau) = -\sqrt{\frac{2b_m(s,r_i(s))}{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho\int_{D_\rho^{(k)}} G_k(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(\rho,dy),$$

якщо $m \neq k$,

$$N^{(k-i)}_{3k-i-2}(s,\tau) = \sqrt{\frac{2b_k(s,r_i(s))}{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}\biggl(G_k(\rho,r_i(\rho),\tau,r_{2k-i-1}(\tau)) - \int\limits_{D^{(k)}_\rho} G_k(\rho,y,\tau,r_{2k-i-1}(\tau))\mu_i(\rho,dy)\biggr)d\rho,$$

$$N^{(k-i)}_{k+i-1}(s,\tau) = \sqrt{\frac{2b_k(s,r_i(s))}{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}\biggl(Z_{k,1}(\rho,r_i(\tau),\tau,r_i(\tau)) + \bigl[G_k(\rho,r_i(\rho),\tau,r_i(\tau)) - G_k(\rho,r_i(\tau),\tau,r_i(\tau))\bigr] - \int\limits_{D^{(k)}_\rho} G_k(\rho,y,\tau,r_i(\tau))\mu_i(\rho,dy)\biggr)d\rho,$$

$$\Psi_{m+i-1}(s,t) = -\sqrt{b_m(s,r_i(s))}\widehat{\Phi}_{m,i}(s,t).$$

Відзначимо, що для функцій Ψ_{m+i-1} з (20) виконується нерівність (17), а ядра $N^{(m-i)}_{2k+j-2}$ не мають інтегровної особливості. Для $N^{(m-i)}_{2k+j-2}$ можна отримати лише таку оцінку:

$$|N^{(m-i)}_{2k+j-2}(s,\tau)| \leq C(\tau-s)^{-1}, \quad 0 \leq s < \tau < t \leq T. \tag{21}$$

Оцінка (21) спричинена інтегралом

$$\int\limits_{U^{(k)}_\delta(r_{k+j-1}(s))} \frac{\partial}{\partial y} Z_{k,0}(s,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s,dy)$$

($U^{(k)}_\delta(r_{k+j-1}(s)) = \{y \in D^{(k)}_s : |y - r_{k+j-1}(s)| < \delta\}$, δ — довільна додатна стала), який виникає у виразі

$$N^{(m-i)}_{2k+j-2}(s,\tau) = -\sqrt{\frac{2b_m(s,r_i(s))}{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\biggl[\int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho \int\limits_{D^{(k)}_\rho} Z_{k,1}(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(\rho,dy) + \int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho\biggl(\int\limits_{D^{(k)}_\rho} Z_{k,0}(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(\rho,dy) - \int\limits_{D^{(k)}_{s_0}} Z_{k,0}(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s_0,dy)\biggr) + \int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho \int\limits_{D^{(k)}_{s_0}} Z_{k,0}(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s_0,dy)\biggr]\bigg|_{s_0=s}$$

після спрощення похідної останнього доданка в квадратних дужках

$$\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho\int\limits_{D_{s_0}^{(k)}}Z_{k,0}(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s_0,dy)\Big|_{s_0=s}=\frac{1}{\sqrt{2\pi b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))}}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_{D_{s_0}^{(k)}}\exp\left\{-\frac{(y-r_{k+j-1}(\tau))^2}{2b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))(\tau-s)}\right\}\mu_i(s_0,dy)\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}(\tau-\rho)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(y-r_{k+j-1}(\tau))^2}{2b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))(\tau-s)}\cdot\frac{\rho-s}{\tau-\rho}\right\}d\rho\Big|_{s_0=s}=\frac{1}{\sqrt{2\pi b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))}}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_{D_{s_0}^{(k)}}\mu_i(s_0,dy)\int\limits_0^\infty z^{-\frac{1}{2}}(z+1)^{-1}\exp\left\{-\frac{(y-r_{k+j-1}(\tau))^2}{2b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))(\tau-s)}\cdot(z+1)\right\}dz\Big|_{s_0=s}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))}{2}}\int\limits_{D_s^{(k)}}\frac{\partial}{\partial y}Z_{k,0}(s,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s,dy)$$

$$=\sqrt{\frac{\pi b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))}{2}}\Bigg(\int\limits_{U_\delta^{(k)}(r_{k+j-1}(s))}\frac{\partial}{\partial y}Z_{k,0}(s,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s,dy)$$

$$+\int\limits_{D_s^{(k)}\setminus U_\delta^{(k)}(r_{k+j-1}(s))}\frac{\partial}{\partial y}Z_{k,0}(s,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s,dy)\Bigg).$$

Всі інші складові виразу для $N_{2k+j-2}^{(m-i)}(s,\tau)$ допускають нерівності, праві частини яких мають вигляд $C(\delta)(\tau-s)^{-1+\frac{\alpha}{2}}$, де $C(\delta)$ — додатна стала, що залежить від вибору δ.

Замінивши $m+i-1\,(i=1,\ldots,n,\ m=i,\ i+1)$ у кожному рівнянні системи (20) індексом p, який змінює свої значення від 1 до $2n$, бачимо, що цю систему рівнянь можна запистати у вигляді:

$$V_p(s,t)=\sum_{l=p+r-2}^{p+r+1}\int\limits_s^t N_l^{(r)}(s,\tau)V_l(\tau,t)d\tau+\Psi_p(s,t), \tag{22}$$

де $0\le s<t\le T$, $p=1,\ldots,2n$, а індекс r дорівнює остачі від ділення p на 2.

Незважаючи на те, що ядра $N_l^{(r)}(s,\tau)$ не мають інтегровної особливості, розв'язок системи рівнянь (22) існує і його можна знайти за допомогою звичайного методу послідовних наближень:

$$V_p(s,t)=\sum_{m=0}^\infty V_p^{(m)}(s,t),\quad 0\le s<t\le T,\ p=1,\ldots,2n, \tag{23}$$

де

$$V_p^{(0)}(s,t)=\Psi_p(s,t),$$

$$V_p^{(m)}(s,t)=\sum_{l=p+r-2}^{p+r+1}\int\limits_s^t N_l^{(r)}(s,\tau)V_l^{(m-1)}(\tau,t)d\tau\quad(V_0^{(m-1)}\equiv V_{2n+1}^{(m-1)}\equiv0),\quad m=1,2,\ldots$$

Збіжність ряду (23) випливає з наступної нерівності, яка встановлюється методом математичної індукції:

$$\left|V_p^{(m)}(s,t)\right| \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{(m-k)}(h(\delta))^k, \quad m=0,1,\ldots, \tag{24}$$

де

$$a^{(k)} = \frac{\left(4C(\delta_0)T^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^k\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+k\alpha}{2}\right)}, \quad k=0,1,\ldots,m,$$

$$h(\delta) = \frac{B}{b}\max_{s\in[0,T]}\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i(s,U_\delta^{(i)}(r_i(s))\cup U_\delta^{(i+1)}(r_i(s))\right) < 1 \quad (\text{для достатньо малого } \delta).$$

З нерівності (24) також випливає, що функції $V_p\,(p=1,\ldots,2n)$ допускають оцінку

$$|V_p(s,t)| \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}, \quad 0\le s<t\le T. \tag{25}$$

Отже, формула (23) представляє єдиний розв'язок $(V_1,\ldots,V_{2n})$ системи інтегральних рівнянь (22), компоненти якого неперервні в області $0\le s<t\le T$ і задовольняють нерівність (25).

З оцінок (6) (при $r=p=0$) і (25) випливає існування потенціалів простого шару в (8) і виконання для них наступної нерівності

$$|u_{i,1}^{(j)}(s,x,t)| \le C\|\varphi\|, \quad (s,x)\in \overline{S}_t^{(i)},\, i=1,\ldots,n+1,\, j=0,\,1. \tag{26}$$

Очевидно, що така ж сама нерівність виконується також для потенціалів Пуассона $u_{i,0}(s,x,t)\,((s,x)\in\overline{S}_t^{(i)},\ i=1,\ldots,n+1)$ в (8), а отже, і для самої функції $u(s,x,t)$.

З допомогою співвідношень (5), (6) і (7) нескладно переконатися, в тому, що функції $V_p\,(p=1,\ldots,2n)$ мають властивісь (A). Ця властивість дозволяє стверджувати, що

$$\lim_{s\uparrow t} u_{i,1}^{(j)}(s,x,t) = 0, \quad i=1,\ldots,n+1,\, j=0,\,1.$$

Враховуючи при цьому, що для функцій $u_{i,0}$ виконується умова (2), а також той факт, що функції $u_{i,0}$ і $u_{i,1}^{(j)}\,(i=1,\ldots,n+1,\ j=0,\,1)$ задовольняють рівняння (1) в області $(s,x)\in S_t^{(i)}\,(i=1,\ldots,n+1)$, робимо висновок, що $u(s,x,t)$ є шуканим розв'язком параболічної задачі спряження (1)-(4).

Отже, ми довели таке твердження:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови I-VI. Тоді задача* (1)-(4) *має розв'язок, неперервний в* $\overline{S}_t$*. Крім того, цей розв'язок має вигляд* (8) *і для нього виконується нерівність* (26).

У теоремі 1 ми встановили існування класичного розв'язку задачі (1)-(4). Тепер доведемо теорему єдиності.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови I-VI. Тоді існує не більше ніж один розв'язок задачі* (1)-(4)*, який є неперервний і обмежений в* $\overline{S}_t$.

Доведення. Припустимо, що задача (1)-(4) має два розв'язки

$$u^{(1)}(s,x,t)=u_i^{(1)}(s,x,t),\quad u^{(2)}(s,x,t)=u_i^{(2)}(s,x,t),\quad (s,x)\in\overline{S}_t^{(i)},\ i=1,\ldots,n+1,$$

які є неперервні та обмежені в $\overline{S}_t$. Тоді функція

$$\upsilon(s,x,t)=u^{(1)}(s,x,t)-u^{(2)}(s,x,t)=\upsilon_i(s,x,t)\quad (s,x)\in\overline{S}_t^{(i)},\ i=1,\ldots,n+1,\tag{27}$$

де $\upsilon_i(s,x,t)=u_i^{(1)}(s,x,t)-u_i^{(2)}(s,x,t)$, є розв'язком однорідної задачі спряження (1)-(4) (при $\varphi\equiv 0$), який є неперервний і обмежений в $\overline{S}_t$. Зауважимо при цьому, що кожну з функцій $\upsilon_i\,(i=1,\ldots,n+1)$ можна розглядати одночасно як розв'язок наступної параболічної першої крайової задачі:

$$\frac{\partial\upsilon_i}{\partial s}+\frac{1}{2}b_i(s,x)\frac{\partial^2\upsilon_i}{\partial x^2}+a_i(s,x)\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x}=0,\quad (s,x)\in S_t^{(i)},\quad i=1,\ldots,n+1,\tag{28}$$

$$\lim_{s\uparrow t}\upsilon_i(s,x,t)=0,\quad x\in\overline{D}_t^{(i)},\ i=1,\ldots,n+1,\tag{29}$$

$$\upsilon_i(s,r_i(s),t)=f_i(s,t),\quad 0\le s<t\le T,\ i=1,\ldots,n,\tag{30}$$

де

$$f_i(s,t)=\int\limits_{D_s^{(i)}\cup D_s^{(i+1)}}\upsilon(s,y,t)\mu_i(s,dy).$$

Оскільки функція $f_i(s,t)$ неперервна і обмежена на $[0,T]$, перша крайова задача (28)-(30) має єдиний класичний розв'язок, неперервний і обмежений в $\overline{S}_t^{(i)}$ $(i=1,\ldots,n+1)$, який до того ж може бути визначений за допомогою формули (8), де слід покласти $u_{i,0}\equiv 0$.

Отже, $\upsilon_i(s,x,t)\,(i=1,\ldots,n)$ в єдиний спосіб можуть бути представлені у вигляді (8), де відсутні потенціали Пуассона, а $V_p(s,t)\,(p=1,\ldots,2n)$ — неперервні в області $s\in[0,t)$ функції, які визначаються за допомогою $f_i(s,t)$. Далі, беручи до уваги міркування, наведені при доведенні теореми 1, легко зауважити, що $V_p(s,t)\,(p=1,\ldots,2n)$, одночасно є розв'язком однорідної системи інтегральних рівнянь (22) при $\Psi_p\equiv 0\,(p=1,\ldots,2n)$. Внаслідок єдиності розв'язку системи (22) в розглядуваному класі неперервних функцій маємо, що $V_p\equiv 0\,(p=1,\ldots,2n)$, звідки отримуємо $\upsilon_i\equiv 0\,(i=1,\ldots,n+1)$ і $u^{(1)}(s,x,t)\equiv u^{(2)}(s,x,t)$. □

3 Напівгрупа Феллера

Нехай $C_0(\mathbb{R})$ — підпростір $C_b(\mathbb{R})$, що складається з усіх функцій $\varphi\in C_b(\mathbb{R})$ для яких виконується умова IV. Оскільки підпростір $C_0(\mathbb{R})$ є замкнутим у $C_b(\mathbb{R})$, він є банаховим простором.

З теореми 1 випливає, що за допомогою розв'язку задачі (1)-(4) можна визначити двопараметричну сім'ю лінійних операторів $T_{s,t}:\ C_0(\mathbb{R})\to C_0(\mathbb{R})$, $0\le s\le t\le T$. Для $0\le s<t\le T$, $x\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in C_0(\mathbb{R})$ покладемо

$$T_{s,t}\varphi(x)=T_{s,t}^{(i,0)}\varphi(x)+T_{s,t}^{(i,1)}\varphi(x),\quad 0\le s<t\le T,\ x\in\overline{D}_s^{(i)},\ i=1,\ldots,n+1,\tag{31}$$

де

$$T_{s,t}^{(i,0)}\varphi(x) \equiv u_{i,0}(s,x,t), \quad T_{s,t}^{(i,1)}\varphi(x) \equiv \sum_{j=0}^{1} u_{i,1}^{(j)}(s,x,t),$$

функції $u_{i,0}$ та $u_{i,1}^{(j)}$ $(j = 0,\, 1)$ визначаються за формулами (9) та (10) відповідно, а щільності $V_p(s,t) \equiv V_p(s,t,\varphi)\,(p = 1, \ldots, 2n)$, які входять до потенціалів простого шару $u_{i,1}^{(j)}$ представляють розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь (22), до якої редукується задача (1)-(4). При цьому $T_{t,t} = I$, де I — тотожний оператор і для $T_{s,t}\varphi(x)$ в області $(s,x) \in \overline{S}_t$ виконується нерівність

$$|T_{s,t}\varphi(x)| \leq C\|\varphi\|. \tag{32}$$

Наявність інтегрального зображення для сім'ї операторів $T_{st}\,(0 \leq s \leq t \leq T)$ дає змогу достатньо легко перевірити виконання для них таких властивостей:

а) якщо $\varphi_n \in C_0(\mathbb{R})$, $n \in \mathbf{N}$, $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \|\varphi_n\| < \infty$, і для всіх $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, де $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$, то для всіх $(s,x) \in \overline{S}_t$ виконується співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} T_{s,t}\varphi_n(x) = T_{s,t}\varphi(x)$;

б) $T_{s,t} = T_{s,\tau}T_{\tau,t},\ 0 \leq s < \tau < t \leq T$ (напівгрупова властивість);

в) оператори $T_{s,t}\,(0 \leq s \leq t \leq T)$ — невід'ємні $(0 \leq s \leq t \leq T)$, тобто $T_{s,t}\varphi \geq 0$ для будь якої $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ такої, що $\varphi \geq 0$;

г) оператори $T_{s,t}\,(0 \leq s \leq t \leq T)$ — стискуючі, тобто вони не збільшують норму елемента;

Властивість а) є наслідком виконання для розв'язку системи інтегральних рівнянь (22) очевидного співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} V_p(s,t,\varphi_n) = V_p(s,t,\varphi)\,(s \in [0,t),\ p = 1, \ldots, 2n)$ і теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.

Напівгрупова властивість операторів $T_{s,t}$ є наслідком теореми 2 про єдиність розв'язку задачі (1)-(4). Справді, для того, щоб знайти $u(s,x,t) = T_{s,t}\varphi(x)$, коли дано, що $\lim_{s\uparrow t} u(s,x,t) = \varphi(x)$, можна спочатку розв'язати задачу у часовому проміжку $[\tau,t]$, а потім розв'язати її у часовому проміжку $[s,\tau]$ з тією "початковою" функцією $u(\tau,x,t) = T_{\tau,t}\varphi(x)$, яку було отримано; інакше кажучи, $T_{s,t}\varphi(x) = T_{s,\tau}(T_{\tau,t}\varphi)(x)$, $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$, або $T_{s,t} = T_{s,\tau}T_{\tau,t}$.

Доведемо властивість в). Нехай функція $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ невід'ємна при всіх $x \in \mathbb{R}$. Беручи до уваги властивість а), для доведення в) достатньо обмежитися випадком, коли функція φ є фінітною. З теореми 1 випливає, що для такої функції φ функція $T_{s,t}\varphi(x)$, яка представляє розв'язок задачі (1)-(4), є обмеженою та неперервною в області $(s,x) \in [0,t) \times \mathbb{R}$ і для всіх $0 \leq s \leq t \leq T$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} T_{s,t}\varphi(x) = 0$. Далі, якщо $\varphi \equiv 0$, то твердження леми є очевидним. Розглянемо випадок, коли функція φ не скрізь дорівнює нулеві. Позначимо через γ мінімум $T_{s,t}\varphi(x)$ в області $(s,x) \in \overline{S}_t$ і припустимо, що $\gamma < 0$. Згідно з принципом максимуму для параболічних рівнянь [12] маємо, що в умовах наших припущень значення γ досягається лише при $s \in (0,t)$ і $x = r_i(s)\,(i = 1, \dots, n)$. Нехай $s = s_0$, $x_0 = r_{i_0}(s_0)\,(i = i_0)$ для яких $T_{s_0,t}\varphi(x_0) = \gamma$. Тоді

$$\int\limits_{D_{s_0}^{(i_0)} \cup D_{s_0}^{(i_0+1)}} [T_{s_0,t}\varphi(x_0) - T_{s_0,t}\varphi(y)]\mu(s_0, dy) < 0,$$

що суперечить умові (4). Отримана суперечність вказує на те, що $\gamma \geq 0$, що й потрібно було довести.

Нарешті, виконання для операторів $T_{s,t}$ властивості г) є простим наслідком властивості в) і того факту, що $T_{s,t}1 \equiv 1$ при $0 \leq s \leq t \leq T$.

З властивостей а)-г) випливає, що двопараметрична сім'я операторів $T_{s,t}$, визначена формулою (31), є напівгрупою Феллера, яка описує на прямій $\mathbb{R}$ деякий неоднорідний марковський процес (див. [13, с. 79, теор. 2.1]).

Отже, ми довели таке твердження:

Теорема 3. *Нехай виконуються умови I-VI. Тоді двопараметрична сім'я операторів $T_{s,t}\,(0 \leq s \leq t \leq T)$, визначена формулою (31), є напівгрупою Феллера, яка породжує на прямій $\mathbb{R}$ такий неоднорідний марковський просес, що в кожній з областей $D_s^{(i)}\,(i = 1, \dots, n+1)$ він збігається із заданим там дифузійним процесом, керованим оператором $\frac{1}{2}b_i(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_i(s,x)\frac{\partial}{\partial x}$, а його поведінка при потраплянні на спільну межу цих областей $x = r_i(s)\,(i = 1, \dots, n)$ описується умовами спряження (4).*

Список літератури

[**1**] Feller W. *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations.* Ann. of Math. 1952, **55** (3), 468–519. doi:10.2307/1969644

[**2**] Вентцель А.Д. *Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка.* Докл. АН СССР 1956, **111** (2), 269–272.

[**3**] Langer H., Schenk W. *Knotting of onedimentional Feller processes.* Math. Nachr. 1983, **113** (1), 151–161. doi:10.1002/mana.19831130115

[**4**] Портенко М.І. Процеси дифузії в середовищах з мембранами. Інститут математики НАН України, Київ, 1999.

[**5**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *On Feller semigroup generated by solution of nonlocal parabolic conjugation problem.* Carpathian Math. Publ. 2018, **10** (2), 333–345. doi:10.15330/cmp.10.2.333-345

[**6**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *One-dimensional diffusion processes with moving membrane: partial reflection in combination with jump-like exit of process from membrane.* Electron. J. Probab. 2020, **25** (41), 1–21. doi:10.1214/20-EJP443

[**7**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *One-dimensional Wiener process with the properties of partial reflection and delay.* Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 534–544. doi:10.15330/cmp.13.2.534-544

[**8**] Скубачевский А.Л. *О полугруппах Феллера для многомерных диффузионных процессов.* Докл. АН 1995, **341** (2), 173–176.

[**9**] Пилипенко А.Ю. *Об отображении Скорохода для уравнений с отражением с возможностью скачкообразного выхода из границы.* Укр. мат. журн. 2011, **63** (9), 1241–1256.

[**10**] Бадерко Е.А. *Краевые задачи для параболического уравнения и граничные интегральные уравнения.* Дифференц. уравнения 1992, **28** (1), 17–23.

[**11**] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Наука, Москва, 1967.

[**12**] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. Мир, Москва, 1968.

[**13**] Дынкин Е.Б. Марковские процессы. Физматгиз, Москва, 1963.

Список літератури

[**1**] Feller W. *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations.* Ann. of Math. 1952, **55** (3), 468–519. doi:10.2307/1969644

[**2**] Wentzell A.D. *Semigroups of operators that correspond to a generalized differential operator of second order.* Dokl. AN SSSR 1956, **111** (2), 269–272. (in Russian)

[**3**] Langer H., Schenk W. *Knotting of onedimentional Feller processes.* Math. Nachr. 1983, **113** (1), 151–161. doi:10.1002/mana.19831130115

[**4**] Portenko M.I. Diffusion processes in media with membranes. Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 1999. (in Ukrainian)

[**5**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *On Feller semigroup generated by solution of nonlocal parabolic conjugation problem.* Carpathian Math. Publ. 2018, **10** (2), 333–345. doi:10.15330/cmp.10.2.333-345

[**6**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *One-dimensional diffusion processes with moving membrane: partial reflection in combination with jump-like exit of process from membrane.* Electron. J. Probab. 2020, **25** (41), 1–21. doi:10.1214/20-EJP443

[**7**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *One-dimensional Wiener process with the properties of partial reflection and delay.* Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 534–544. doi:10.15330/cmp.13.2.534-544

[**8**] Skubachevskii A.L. *On Feller semigroups for multidimensional diffusion processes.* Dokl. AN 1995, **341** (2), 173–176. (in Russian)

[**9**] Pilipenko A.Yu. *On the Skorokhod mapping for equations with reflection and possible jump-like exit from a boundary.* Ukr. Mat. Zhurn. 2011, **63** (9), 1241–1256. (in Russian)

[**10**] Baderko E.A. *Boundary value problems for a parabolic equation and boundary integral equations.* Differents. Uravneniya 1992, **28** (1), 17–23. (in Russian)

[**11**] Ladyzhenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. Linear and quasilinear equations of parabolic type. Nauka, Moscow, 1967. (in Russian)

[**12**] Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Mir, Moscow, 1968. (in Russian)

[**13**] Dynkin E.B. Markov processes. Fizmatgiz, Moscow, 1963. (in Russian)

Надійшло 28.03.2022

Shevchuk R.V., Savka I.Ya. *The nonlocal conjugation problem for a linear second order parabolic equation of Kolmogorov's type with discontinuous coefficients*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 249–264.

In this paper, we construct the two-parameter Feller semigroup associated with a certain one-dimensional inhomogeneous Markov process. This process may be described as follows. At

the interior points of the finite number of intervals $(-\infty, r_1(s))$, $(r_1(s), r_2(s)), \ldots,$ $(r_n(s), \infty)$ separated by points $r_i(s)\,(i = 1, \ldots, n)$, the positions of which depend on the time variable, this process coincides with the ordinary diffusions given there by their generating differential operators, and its behavior on the common boundaries of these intervals is determined by the Feller-Wentzell conjugation conditions of the integral type, each of which corresponds to the inward jump phenomenon from the boundary.

The study of the problem is done using analytical methods. With such an approach, the problem of existence of the desired semigroup leads to the corresponding nonlocal conjugation problem for a second order linear parabolic equation of Kolmogorov's type with discontinuous coefficients. The main part of the paper consists in the investigation of this parabolic conjugation problem, the peculiarity of which is that the domains on the plane, where the equations are given, are curvilinear and have non-smooth boundaries: the functions $r_i(s)\,(i = 1, \ldots, n)$, which determine the boundaries of these domains satisfy only the Hölder condition with exponent greater than $\frac{1}{2}$. Its classical solvability in the space of continuous functions is established by the boundary integral equations method with the use of the fundamental solutions of the uniformly parabolic equations and the associated potentials. It is also proved that the solution of this problem has a semigroup property. The availability of the integral representation for the constructed semigroup allows us to prove relatively easily that this semigroup yields the Markov process.