Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 2, 103–113 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №2, 103–113

Лопушанська Г.П.[1], Лопушанський А.О.[2]

РЕГУЛЯРНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ

Прямі й обернені задачі для рівнянь із дробовими похідними виникають у різних галузях науки і техніки. Відомі умови класичної розв'язності задачі Коші та крайових задач для дифузійно-хвильових рівнянь із дробовими похідними. Відомі оцінки компонент вектор-функції Гріна задачі Коші для таких рівнянь.

Ми вивчаємо обернену задачу визначення залежної від просторових змінних компоненти правої частини рівняння з дробовою похідною за часом при відомих функціях із простору типу Шварца гладких швидко спадаючих функцій чи зі значеннями в них. Також розглядаємо таку задачу при даних із деякого ширшого простору гладких, спадаючих до нуля на нескінченності функцій чи зі значеннями в них. Знаходимо достатні умови однозначної розв'язності оберненої задачі при інтегральній за часом додатковій умові

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

де u – невідомий розв'язок задачі Коші, η_1 – задана неперервна функція.

Використовуючи метод вектор-функції Гріна, зводимо задачу до розв'язання інтегродиференціального рівняння у певному класі гладких, спадаючих до нуля на нескінченності функцій. Доводимо його однозначну розв'язність.

Відомі різні методи наближеного розв'язання прямих і обернених задач для рівнянь із дробовими похідними, переважно для одновимірного просторового випадку. Із наших результатів випливає метод побудови наближеного розв'язку оберненої задачі в багатовимірному просторовому випадку. Він грунтується на використанні відомих методів чисельного розв'язання інтегродиференціальних рівнянь. Ефективним для побудови чисельного розв'язку одержаного інтегродиференціального рівняння є застосування перетворення Фур'є за просторовими змінними, оскільки перетворення Фур'є компонент вектор-функції Гріна можна явно виписати.

Ключові слова і фрази: рівняння дифузії, похідна дробового порядку, обернена задача, інтегральна за часом умова, простi типу Шварца.

---

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
[2]Жешувський університет, Жешув, Польща
e-mail: *lhp@ukr.net, alopushanskyj@gmail.com*

УДК 517.95
2010 *Mathematics Subject Classification:* 80A23,35S10.

Вступ

Рівняння з дробовими похідними використовують при моделюванні різних фізичних процесів, у біології, геології, геофізиці, медицині, економіці, у моделюванні дифузії в пористих середовищах (див., наприклад, [2, 6, 9, 8, 17, 20, 21] і бібліографію). Різні явища аномальної дифузії (коли процес дифузії не відповідає статистиці Гауса, як зазвичай) привертають все більше уваги.

Умови класичної розв'язності задачі Коші і крайових задач для рівнянь із дробовими похідними одержані в [17, 21, 26, 13, 4, 5, 23, 19, 18, 24, 25] та інших працях. Найбільше робіт по обернених задачах для таких рівнянь, як і для рівнянь із частинними похідними цілих порядків (див., наприклад, [24, 1, 11, 12, 29, 27, 28, 30, 22] і бібліографію) присвячено задачам із невідомими правими частинами у рівняннях.

Використовують різні додаткові умови (так звані умови перевизначення). У [29], використовуючи відомі значення шуканого розв'язку у кінцевий момент часу, побудовано регуляризацію розв'язку оберненої задачі такого вигляду, одержано оцінки різниць регуляризованого і точного розв'язків.

У цій праці, використовуючи інтегральну за часом умову перевизначення, для рівняння з дробовою похідною Капуто-Джрбашяна вивчаємо обернену задачу визначення невідомої, залежної від просторових змінних, функції у правій частині рівняння при заданих початкових даних шуканого розв'язку із просторів типу Шварца гладких швидко спадаючих функцій чи деякого ширшого класу гладких функцій, що спадають до нуля на нескінченності.

Зауважимо, що з використанням інтегральної за часом умови перевизначення у різних функційних просторах одержано однозначну розв'язність оберненої задачі для рівняння дробової дифузії з невідомою, залежною від часу, компонентою правої частини рівняння (у [14, 15]), з невідомим молодшим коефіцієнтом (у [10]), невідомими початковими даними розв'язку (у [16]).

1 Означення й допоміжні факти

Використовуємо позначення: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, $D_x^\alpha v(x,t) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $f*g$ – згортка функцій f і g,

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t) t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, \quad \lambda > 0, \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t), \quad \lambda \le 0,$$

де $\Gamma(\lambda)$ – Гамма-функція, $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда.

Похідна Рімана-Ліувіля $v^{(\beta)}(t)$ дробового порядку визначається формулою

$$v^{(\beta)}(t) = f_{-\beta}(t) * v(t),$$

зокрема,

$$v^{(\beta)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\beta-1} v(\tau) d\tau, \quad \beta \in (n-1, n).$$

Регуляризована (Капуто-Джрбашяна) похідна функції v порядку $\beta \in (n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$ визначається формулою

$$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1-\beta} v^{(n)}(\tau) d\tau,\ t \in [0, T],$$

і тоді

$$D^\beta v(t) = v^{(\beta)}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} f_{j+1-\beta}(t) v^{(j)}(0). \tag{1}$$

При $\beta \in (0,1)$ вивчаємо обернену задачу

$$D_t^\beta u - A(x, D)u = R_1(x) g(t) + R_2(x,t),\ (x,t) \in Q := \mathbb{R}^n \times (0, T], \tag{2}$$

$$u(x, 0) = F_1(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(x,t) \eta_1(t) dt = \Phi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

визначення пари функцій (u, R_1), де F_1, R_2, g, Φ_1, η_1 – задані функції, $A(x, D)u$ – лінійний еліптичний диференціальний вираз другого порядку.

Позначаємо через $S(\mathbb{R}^n)$ простір таких нескінченно диференційовних у $\mathbb{R}^n$ функцій v, що $x^\gamma D^\alpha v$ обмежені в $\mathbb{R}^n$ при всіх мульти-індексах α, γ (простір Шварца гладких швидко спадаючих функцій), через $S_\gamma(\mathbb{R}^n)$ $(\gamma > 0)$ – простір типу $S(\mathbb{R}^n)$ (див. [7, p. 201]):

$$S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \le C_\alpha e^{-a|x|^{\frac{1}{\gamma}}},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \alpha\}$$

із деякими додатними сталими $C_\alpha = C_\alpha(v)$ і $a = a(v)$. Послідовність $v_m(x)$ збігається до нуля (при $m \to +\infty$) у просторі $S_\gamma(\mathbb{R}^n)$, якщо для довільного мульти-індекса α послідовність $D^\alpha v_m(x)$ збігається до нуля рівномірно на довільному компакті $|x| \le C < +\infty$ і при деякому $a > 0$ правильні оцінки

$$|D^\alpha v_m(x)| \le C_\alpha e^{-a|x|^{\frac{1}{\gamma}}},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Відомо (див. [7, p. 211]), що

$$S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \cup_{a>0} S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),$$

де

$$S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \le C_{\alpha,\varepsilon} e^{-(a-\varepsilon)|x|^{\frac{1}{\gamma}}},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \alpha,\ \forall\, \varepsilon > 0\}$$

$$= \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : ||v||_{k,a} = \sup_{|\alpha| \le k, x \in \mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} |D^\alpha v(x)| < +\infty,\ \ \forall k \in \mathbb{N},\ k \ne 1\}.$$

Послідовність $v_m(x)$ збігається до нуля (при $m \to +\infty$) у просторі $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, якщо для довільного мульти-індекса α послідовність $D^\alpha v_m(x)$ збігається до нуля рівномірно на довільному компакті $|x| \le C < +\infty$ і норми $||v_m||_{k,a}$ обмежені для всіх $m, k \in \mathbb{N},\ k \ne 1$.

Вводимо простори

$$\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ v \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) :\ ||v||_{k,(a)} \max\{||v||_{k,a}, ||Av||_{k,a}\} < +\infty\ \forall k \in \mathbb{N}, k \ge 2$$

і кажемо, що послідовність $v_m(x)$ збігається до нуля (при $m \to +\infty$) у $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, якщо для довільного мульти-індекса α послідовність $D^\alpha v_m(x)$ збігається до нуля рівномірно на довільному компакті $|x| \le C < +\infty$ і норми $||v_m||_{k,(a)}$ обмежені для всіх $m, k \in \mathbb{N},\ k \neq 1$.

Нехай

$$C_{2,\beta}(Q) = \{v \in C(Q):\ Av, D_t^\beta v \in C(Q)\},\ C_{2,\beta}(\bar{Q}) = C_{2,\beta}(Q) \cap C(\bar{Q}).$$

Кажемо, що $v \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$, якщо $v \in C_{2,\beta}(\bar{Q})$ і $v(\cdot, t) \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ для кожного $t \in [0, T]$.

Далі вважаємо, що коефіцієнти $A(x, D)$ є мультиплікаторами в $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$.

Означення 1. Пара $(u, R_1) \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ називається розв'язком задачі (2)-(4), якщо вона задовольняє рівняння (2) в Q і умови (3), (4).

Означення 2. Вектор-функція $(G_0(x, t, y, \tau), G_1(x, t, y))$ називається вектор-функцією Гріна задачі Коші (2),(3), якщо при довільних гладких і фінітних F_1, R_1, R_2, g функція

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\big(g(\tau)R_1(y) \tag{5}$$

$$+R_2(y,\tau)\big)dy + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)F_1(y)dy,\ \ (x,t) \in \bar{Q}$$

є класичним (із $C_{2,\beta}(\bar{Q})$) розв'язком цієї задачі.

Така вектор-функцією Гріна існує [3, 26, 4, 25]. Оцінки компонент вектор-функції Гріна одержані в [6, 26, 13, 23]. Зокрема, при $n \ge 3$

$$|G_0(x,t,y,\tau)| \le \frac{C_0|x-y|^{2-n}}{t-\tau} e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}},\ (x,t),(y,\tau) \in Q,\ \ (x,t) \neq (y,\tau),$$

$$|G_1(x,t,y)| \le \frac{C_0 t^{-\beta}}{|x-y|^{n-2}} e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}},\ x,y \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T],$$

де c, C_0 – додатні сталі, зокрема, $c < c_0 = (2-\beta)\left(\frac{\beta^\beta}{4}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}$ для $A(x,D) = \Delta$ [26], і множник $e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}$ можна опустити у випадку $|x-y|^2 < (t-\tau)^\beta$. Відзначимо,що

$$G_1(x,t,y) = \int_0^t f_{1-\beta}(\tau) G_0(x,t,y,\tau)d\tau,\ \ \ (x,t) \in Q.$$

Позначаємо

$$(G_0\varphi)(x,t,\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(y,\tau)dy,\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le \tau < t \le T,$$

$$(G_1\varphi)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)\varphi(y,t)dy,\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T].$$

Лема 1. *Для довільних чисел* $\gamma \ge 1 - \frac{\beta}{2}$, $a > 0$, *функції* $\varphi \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ *існують такі числа* $C > 0$, $a' \in (0, a]$ ($\mathrm{a}' = \mathrm{c}_\gamma \min\{\mathrm{c}\mathrm{T}^{-\frac{\beta}{2\gamma}}, \mathrm{a}\}$ *із* $c_\gamma = 2^{1-\frac{1}{\gamma}}$ *при* $\gamma \in [1 - \frac{\beta}{2}, 1]$, $c_\gamma = 1$ *при* $\gamma \ge 1$, $a' = a$ *при* $\gamma \ge 1$ *і* $aT^{\frac{\beta}{2\gamma}} \le c$), *що для всіх* $k \in \mathbb{N},\ k \ge 2$

$$\|(G_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\|_{k,(a')} \le C(t-\tau)^{\beta-1} \max_{t\in[0,T]} \|\varphi(\cdot,t)\|_{k,(a)}, 0 \le \tau < t \le T, \tag{6}$$

$$\|(G_1\varphi)(\cdot,t)\|_{k,(a')} \le C \max_{t\in[0,T]} \|\varphi(\cdot,t)\|_{k,(a)},\ t\in[0,T].$$

Доведення. Лема доводиться за схемою доведення леми 2 у [14]. □

Теорема 1. *При* $\gamma \ge 1, 0 < aT^{\frac{\beta}{2\gamma}} \le c$, $F_1 \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $R_2 \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$, $g \in C[0,T]$ *існує єдиний розв'язок* $u \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ *задачі Коші* (2), (3). *Він заданий формулою* (5).

Доведення. Існування єдиного класичного (із $C_{2,\beta}(\bar{Q})$) розв'язку задачі Коші і його зображен-ня (5) при $g \in C[0,T]$, обмежених і локально гельдерових у $\mathbb{R}^n$ функціях F_1, R_1, обмеженій і локально гельдеровій за змінними $x \in \mathbb{R}^n$ при кожному $t \in (0,T]$ функції R_2 випливає з результатів [26, 13, 4]. Тому із (5) і леми 1, за припущень теореми одержуємо $u \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$. □

2 Розв'язок оберненої задачі

2.1. Розглянемо задачу (2)-(4) за **припущення** (A):

$$\gamma \ge 1,\ 0 < aT^{\frac{\beta}{2\gamma}} \le c,\ F_1, \Phi_1 \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),\ R_2 \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}), g, \eta_1 \in C[0,T].$$

Нехай $u \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ – розв'язок задачі (2), (3). Беручи до уваги зв'язок (1) між регуляризованою похідною і похідною Рімана-Ліувіля порядку $\beta \in (0,1)$, записуємо задачу (2), (3) у вигляді

$$f_{-\beta}(t) * u(x,t) = (Au)(x,t) + g(t)R_1(x) + R_2(x,t) + f_{1-\beta}(t)F_1(x),\ \ (x,t) \in Q,$$

$$u(x,0) = F_1(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Діючи оператором $f_\beta(t)*$ на обидві частини рівняння, одержуємо

$$u(x,t) = [(Au)(x,t) + g(t)R_1(x) + R_2(x,t)] * f_\beta(t) + F_1(x),\ \ (x,t) \in Q.$$

Використовуючи умову (4), одержуємо

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{T}\int_0^T [(Au)(x,t) * f_\beta(t)]\eta_1(t)dt + g_1R_1(x) + N_1(x,T) + P_1F_1(x),$$

де

$$N_1(x) = N_1(x,T) = \frac{1}{T}\int_0^T [R_2(x,t) * f_\beta(t)]\eta_1(t)dt,\ \ P_1 = P_1(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \eta_1(t)dt,$$

$$g_1 = g_1(T) = \frac{1}{T}\int_0^T (g * f_\beta)(t)\eta_1(t)dt.$$

Звідси, за припущення

$$g_1(T) \ne 0 \tag{7}$$

знаходимо

$$R_1(x) = -\frac{1}{Tg_1(T)}\int_0^T \big[(Au)(x,s) * f_\beta(s)\big]\eta_1(s)ds + v_1(x), \tag{8}$$

де $v_1(x) = \frac{1}{g_1(T)}\Big[\Phi_1(x) - N_1(x,T) - P_1F_1(x)\Big]$, $x \in \mathbb{R}^n$.

За припущень (A) і (7), при $u \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ маємо $R_1 \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$. Справді, $v_1 \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$,

$$||R_1||_{k,(a)} \le \frac{1}{T|g_1|}\int_0^T f_{1+\beta}(s)|\eta_1(s)|ds \max_{\tau\in[0,T]} ||u(\cdot,\tau)||_{k,(a)} + ||v_1||_{k,(a)}.$$

Підставляючи вираз (8) у (5), для знаходження u одержуємо інтегродиференціальне рівняння у просторі $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$

$$u(x,t) = -\frac{1}{Tg_1(T)}\int_0^t g(\tau)d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau) \tag{9}$$

$$\times\Big[\int_0^T \big((Au)(y,s) * f_\beta(s)\big)\eta_1(s)\big)ds\Big]dy + u_0(x,t),$$

$$u_0(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\big[g(\tau)v_1(y) + R_2(y,\tau)\big]dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)F_1(y)dy, \quad (x,t) \in \bar{Q}.$$

Лема 2. *За припущень (A) і* (7) *пара* $(u, R_1) \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ *є розв'язком задачі* (2)-(4) *тоді і тільки тоді, коли u є розв'язком рівняння* (9), R_1 *визначена згідно з* (8).

Доведення. Було показано, що розв'язок $u \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ задачі (2)-(4) задовольняє рівняння (9) і R_1 визначена формулою (8). Навпаки, нехай $u \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ є розв'язком рівняння (9). Тому що (9) збігається з (5), якщо вираз (8) підставити в (5) замість $R_1(x)$, за теоремою 1 функція u задовольняє задачу (2), (3). Покажемо, що u задовольняє умову (4), якщо R_1 визначена згідно з (8).

Нехай це не так і

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1^*(x),$$

$$H_1(x) = \frac{1}{T}\int_0^T [(Au)(x,s) * f_\beta(s)]\eta_1(s)ds,$$

$$H_1^*(x) = \frac{1}{T}\int_0^T [(Au^*)(x,s) * f_\beta(s)]\eta_1(s)ds,$$

$x \in \mathbb{R}^n$, де u^* – розв'язок рівняння (9) з Φ_1^* замість Φ_1 у виразі для v_1. Тоді з (8) одержуємо

$$\Phi_1(x) - \Phi_1^*(x) = H_1(x) - H_1^*(x), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

а, згідно з (9),

$$\Phi_1(x) - \Phi_1^*(x) = \frac{1}{g_1(T)}\int_0^t g(\tau)d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\big[\big(\Phi_1(y) - \Phi_1^*(y)\big) - \big(H_1(y) - H_1^*(y)\big)\big].$$

Отож, $\Phi_1(x) - \Phi_1^*(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. □

Припущення (B):

$$0 < g_{min} \le g(t) \le g_{max}, \; \eta_1(t) \ge 0, \;\; t \in [0,T], \;\; \int_0^T f_{\beta+1}(t)\eta_1(t)dt \ne 0.$$

Теорема 2. *За припущень (A), (B) існує таке $T_1 > 0$, що для довільного $T \in (0, T_1)$ задача (2)-(4) має єдиний розв'язок $(u, R_1) \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$. Крім того, u – розв'язок рівняння (9), R_1 визначена згідно з (8).*

Доведення. При $k \in \mathbb{N}, \; k \ne 1$ визначаємо простори

$$\mathcal{M}_{k,(a)} = \mathcal{M}_{k,(a)}(T) = \{v \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) : ||v||_{\mathcal{M}_{k,(a)}} = \max_{t\in[0,T]} ||v(\cdot,t)||_{k,(a)} < +\infty\}$$

і оператор

$$(\mathbb{K}v)(x,t) = -\frac{1}{Tg_1(T)} \int_0^t g(\tau)d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\Big[\int_0^T \big((Av)(y,s) * f_\beta(s)\big)\eta_1(s)\big)ds\Big]dy$$

$$+u_0(x,t), \quad (x,t) \in Q, \;\; v \in \mathcal{M}_{k,(a)}.$$

Відзначимо, що $\mathcal{M}_{k+p,(a)} \subset \mathcal{M}_{k,(a)}$ для кожного $p \in \mathbb{N}$. Далі через C_i $(i \in \mathbb{Z}_+)$ позначатимемо додатні сталі, також різні сталі іноді позначатимемо однаково, як C чи $C(\cdot)$.

За лемою 1, для довільної $v \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$, $t, s \in [0,T]$ маємо

$$\sup_{|\alpha|\le k, \, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} \big|D_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)(Av)(y,s)dy\big|$$

$$\le C(t-\tau)^{\beta-1} \max_{s\in[0,T]} ||(Av)(\cdot,s)||_{k,a} \le C(t-\tau)^{\beta-1}||v||_{\mathcal{M}_{k,(a)}},$$

$$\sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} \big|D_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)(Av)(y,s)dy\big| \le C \max_{s\in[0,T]} ||(Av)(\cdot,s)||_{k,a} \le C||v||_{\mathcal{M}_{k,(a)}},$$

$$\sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} |D_x^\alpha\big(A(x,D) \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)(Av)(y,s)dy\big)\big| \le C_1(t-\tau)^{\beta-1}||v||_{\mathcal{M}_{k,(a)}},$$

$$\sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} |D_x^\alpha\big(A(x,D) \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)(Av)(y,s)dy\big)\big| \le C_1||v||_{\mathcal{M}_{k,(a)}},$$

$$||u_0||_{\mathcal{M}_{k,(a)}} \le C_1\Big[\max_{t\in[0,T]} \int_0^t g(\tau)(t-\tau)^{\beta-1}d\tau||v_1||_{k,(a)} + ||F_1||_{k,(a)} + T^\beta||R_2||_{\mathcal{M}_{k,(a)}}\Big]$$

$$\le C_2T^\beta\left(||v_1||_{k,(a)} + ||R_2||_{\mathcal{M}_{k,(a)}}\right) + C_1||F_1||_{k,(a)}.$$

Оскільки $(g * f_\beta)(t) \ge g_{min}f_{1+\beta}(t)$, $t \in [0,T]$, а отже, $g_1(T) \ge \frac{g_{min}}{T}\int_0^T f_{\beta+1}(t)\eta_1(t)dt$, то з умови (B) випливає (7). Тоді

$$||\mathbb{K}v||_{\mathcal{M}_{k,(a)}} \le \max_{t\in[0,T]} \frac{C_3}{Tg_1(T)} \int_0^t g(\tau)$$

$$\times(t-\tau)^{\beta-1}d\tau\left[\int_0^T f_{1+\beta}(s)\eta_1(s)ds\right]||v||_{\mathcal{M}_{k,(a)}} + ||u_0||_{\mathcal{M}_{k,(a)}}$$

$$\leq \frac{C_4 T^\beta g_{max}}{g_{min}} ||v||_{\mathcal{M}_{k,(a)}} + ||u_0||_{\mathcal{M}_{k,(a)}},$$

$$||\mathbb{K}v - \mathbb{K}\tilde{v}||_{\mathcal{M}_{k,(a)}} \leq \frac{C_4 T^\beta g_{max}}{g_{min}} ||v - \tilde{v}||_{\mathcal{M}_{k,(a)}}, \ \forall v, \tilde{v} \in \mathcal{M}_{k,(a)}.$$

Отже, існує таке число $T_1 \in (0, T_0]$, що $\mathbb{K} : \mathcal{M}_{k,(a)} \to \mathcal{M}_{k,(a)}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ і є оператором стиску при $T \in (0, T_1)$. За теоремою Банаха про нерухому точку рівняння $u = \mathbb{K}u$ має єдиний розв'язок $u \in \mathcal{M}_{k,(a)}$ для кожного $k = 2, 3, \ldots$. Отже, рівняння (9) має єдиний розв'язок $u \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$. За лемою 2, визначена формулами (9)) і (8) пара (u, R_1) – єдиний розв'язок задачі (2)–(4).

Покажемо єдиність розв'язку задачі (2)-(4). Нехай (u_1, R_{11}), (u_2, R_{12}) – два її розв'язки, $u = u_1 - u_2$, $R_1 = R_{11} - R_{12}$. Тоді пара (u, R_1) задовольняє задачу

$$D_t^\beta u - Au = g(t) R_1(x), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u(x,0) = 0, \ \ \frac{1}{T} \int_0^T u(x,t) \eta_1(t) dt = 0, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

За лемою 2 кожний розв'язок $u(x,t)$ цієї задачі задовольняє рівняння (9) при $u_0(x,t) = 0$, $(x,t) \in \bar{Q}$,

$$R_1(x) = -\frac{1}{T g_1(T)} \int_0^T \big[(Au)(x,s) * f_\beta(s)\big] \big[\eta_1(s) ds, \ \ x \in \mathbb{R}^n\big]. \tag{10}$$

За доведеним, існує таке $T_1 > 0$, що $u(x,t) = 0$ $((x,t) \in Q)$ – єдиний розв'язок рівняння (9) із $u_0(x,t) = 0$ $((x,t) \in Q)$ для кожного $T \in (0, T_1)$. Тоді з (10) одержуємо, що $R_1 = 0$ у $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$. □

Зауваження 1. *Щоб знайти R_1 (за формулою (8)), достатньо розв'язати інтегральне рівняння (9) при достатньо малому значенні $T > 0$. Потім знаходимо розв'язок задачі (2), (3) в Q при довільному скінченному $T > 0$, використовуючи формулу*

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)[R_1(y) g(\tau) + R_2(y,\tau)] dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y) F_1(y) dy, \ (x,t) \in \bar{Q}. \tag{11}$$

2.2. Нехай $C_b(\mathbb{R}^n)$ – простір обмежених функцій в $\mathbb{R}^n$, $C_0(\mathbb{R}^n)$ – простір неперервних функцій із $C_b(\mathbb{R}^n)$, спадаючих до нуля на нескінченності,

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \{v \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap W^2_{q,loc}(\mathbb{R}^n) \, (q > n) : Av \in C_0(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\mathcal{M}(Q) = \{v \in C_{2,\beta}(\bar{Q}) : v(\cdot, t) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \ \ \forall t \in [0,T]\}.$$

Теорема 3. *При $F_1, \Phi_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $R_2 \in \mathcal{M}(Q)$, $g, \eta_1 \in C[0,T]$ та припущенні (B) існує таке число $T_1 > 0$, що для кожного $T \in (0, T_1)$ задача (2)-(4) має єдиний розв'язок $(u, R_1) \in \mathcal{M}(Q) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Крім того, u – розв'язок рівняння (9), R_1 визначена згідно з (8).*

Доведення. Із результатів [13, 4] за умов теореми одержуємо однозначну розв'язність задачі Коші (2), (3) у $\mathcal{M}(Q)$. Існування й єдиність розв'язку $(u, R_1) \in \mathcal{M}(Q) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ оберненої задачі (2)-(4) доводимо за схемою доведення попередньої теореми. $\square$

Приклад 1. *Пара*

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{t^\beta + 1}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad R_1(x) = \frac{2(3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}, \ (x, t) \in Q$$

є розв'язком задачі (2)–(4) *у випадку* $n = 3$, $A(x, D) = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$ *при заданих*

$$g(t) = t^\beta + 1, \eta_1(t) = 1, R_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \Phi_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Маємо $P_1 = 1$, $N_1(x) = \frac{T^\beta}{\beta+1} \frac{1}{1+|x|^2}$, $g_1 = \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{\Gamma(\beta+1)\, T^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+2)} \neq 0$.

Висновки

Знайдено достатні умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення залежної від просторових змінних компоненти правої частини рівняння дифузії з дробовою похідною Джрбашяна-Капуто за часом у просторах типу Шварца гладких швидко спадаючих функцій і ширшому просторі гладких, спадаючих до нуля на нескінченності функцій при додатковій інтегральній умові.

Список літератури

[1] Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. *Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determination condition.* EJDE. 2013, **2013** (270), 1-16.

[2] Baglegy R.L., Torvik P.J. *A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity.* J. Rheol. 1983, **27**, 201-210.

[3] Duan Jun Sheng. *Time- and space-fractional partial differential equations.* J. Math. Phis. 2005, 46 (013504).

[4] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.

[5] Eidelman S.D., Kochubei A.N. *Cauchy problem for fractional diffusion equations.* arXiv:math/0310271v1 [Math AP] 17 Oct 2013

[6] Fudjita Y. *Integrodifferential equations which interpolates the heat equation and the wave equation.* Osaka J. Math. 1990, **27**, 309-321.

[7] Gelfand I.M., Shilov G.E. Generalized Functions, Vol. 2: Spaces of Fundamental and Generalized Functions. AMS Chelsea Publ., 2016.

[8] Guner O., Bekir A. *Exact solutions of some fractional differential equations arising in mathematical biology.* International Journal of Biomathematics. 2015, **8** (01), 1550003. https://doi.org/10.1142/S1793524515500035

[9] Hilfer R. Fractional time equation. In: R. Hilfer (Eds.) Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, Singapore, 2020, 87-130.

[10] Janno J., Kasemets K. *Uniqueness for an inverse problem for a semilinear time-fractional diffusion equation.* Inverse Probl. Imaging. 2017, **11** (1), 125-149. doi: 10.3934/ipi.2017007

[11] Jin B., Rundell W. *A turorial on inverse problems for anomalous diffusion processes.* Inverse Problems. 2015, **31**, 035003. –doi:10.1088/0266-5611/31/3/035003.

[12] Kinash N., Janno Ja. *An Inverse Problem for a Generalized Fractional Derivative with an Application in Reconstruction of Time- and Space-Dependent Sources in Fractional Diffusion and Wave Equations.* Mathematics. 2019, **7** (19). ARTN 1138.10.3390/math7121138.

[13] Kochubei A.N. *Cauchy problem for fractional order evolution equations.* Differential Equations. 1989, **25** (8), 1359-1368 (in Russian).

[14] Lopushanska H., Lopushansky A. *Inverse problem with a time-integral condition for a fractional diffusion equation.* Math. Meth. Appl. Sci. 2019, **42**, 3327–3340. https://doi.org/10.1002/mma.5587.

[15] Lopushansky A., Lopushanska H., Myaus O. *An inverse fractional source problem in a space of periodic spatial distributions.* Fractional differ. calc. 2016, **6** (2), 267-274. http://dx.doi.org/10.7153/fdc-06-17.

[16] Lopushanska H., Lopushansky A., Myaus O. *Inverse problem in a space of periodic spatial distributions for a time fractional diffusion equation.* EJDE. 2016, **2016** (14), 1-9. http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu

[17] Luchko Yu., Mainardi F. *Cauchy and signaling problems for the time-fractional diffusion-wave equation.* ASME, J. Vib. Acoust. 2014, **5** (136). 050904-050904-7.

[18] Mainardi F. *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation.* Appl. Math. Lett. 1996, **9** (6), 23-28.

[19] Matijchuk M.I. *The connection between fundamental solutions of parabolic equations and fractional equations.* Bukovinian Mathematical Journal. 2016, **4** (3-4), 101–114. (in Ukrainian)

[20] Podlubny I. Fractional differential equations. Acad. Press, San Diego, 1999.

[21] Povstenko Y. Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engeneers. Birkhauser, New-York, 2015. ISBN: 978-3-319-17953-7.

[22] Prilepko A.I., Kostin A.B. *On some inverse problems for parabolic equations with finite and integral observation.* Mat. Sb. 1992, **183** (4), 49-68.

[23] Pskhu A.V. *The fundamental solutions of a diffusion-wave equation of fractional order.* Izv. Math. 2009, **73**, 351-392. (in Russian)

[24] Sakamoto K., Yamamoto M. *Initial value/boundary-value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems.* J. Math. Anal. Appl. 2011, **382** (1), 426-447.

[25] Schneider W.R., and Wyss W. *Fractional diffusion and wave equations.* J. Math. Phys. 1989, **30**, 134-144.

[26] Voroshylov A.A., Kilbas A.A. *Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative.* Dokl. Ak. Nauk. 2007, **414** (4), 1-4.

[27] Wang Jun-Gang, Ran Yu-Hong. *An iterative method for an inverse source problem of time-fractional diffusion equation.* Inverse Problems in Science and Engineering. 2018, **26** (10).

[28] Wen J., Cheng J.-F. *The method of fundamental solution for the inverse source problem for the space-fractional diffusion equation.* Inverse Problems in Science and Engineering. 2018, **26** (7), 925-941.

[29] Yang F., Liu X., Li X.-X., Cheng-Ye Ma. *Landweber iterative regularization method for identifying the unknown source of the time-fraction diffusion equation.* Adv. Differ. Equ. 2017, 2017:388. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1423-8.

[30] Zhang Y. and Xu X. *Inverse source problem for a fractional diffusion equation.* Inverse Problems. 2011, **27**, P. 1-12.

Надійшло 04.11.2020

Lopushanska H.P., Lopushansky A.O. *Regular Solution of the Inverse Problem with Integral condition for a Time-Fractional Equation*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 103–113.

Direct and inverse problems for equations with fractional derivatives are arising in various fields of science and technology. The conditions for classical solvability of the Cauchy and boundary-value problems for diffusion-wave equations with fractional derivatives are known. Estimates of components of the Green's vector-function of the Cauchy problem for such equations are known.

We study the inverse problem of determining the space-dependent component of the right-hand side of the equation with a time fractional derivative and known functions from Schwartz-type space of smooth rapidly decreasing functions or with values in them. We also consider such a problem in the case of data from some wider space of smooth, decreasing to zero at infinity functions or with values in them.

We find sufficient conditions for unique solvability of the inverse problem under the time-integral additional condition

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

where u is the unknown solution of the Cauchy problem, η_1 and Φ_1 are the given functions.

Using the method of the Green's vector function, we reduce the problem to solvability of an integrodifferential equation in a certain class of smooth, decreasing to zero at infinity functions. We prove its unique solvability.

There are various methods for the approximate solution of direct and inverse problems for equations with fractional derivatives, mainly for the one-dimensional spatial case. It follows from our results the method of constructing an approximate solution of the inverse problem in the multidimensional spatial case. It is based on the use of known methods of constructing the numerical solutions of integrodifferential equations. The application of the Fourier transform by spatial variables is effective for constructing a numerical solution of the obtained integrodifferential equation, since the Fourier transform of the components of the Green's vector function can be explicitly written.