Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 2, 93–102 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №2, 93–102

Лопотко О. В.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПАРНО ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ НЕСКІНЧЕННОГО ЧИСЛА ЗМІННИХ

Доведена модифікація теореми Березанського Ю. М. на випадок обмежених парно-додатно визначених функцій, які задані в $\mathbb{R}^\infty$ та гільбертовому просторі.

Ключові слова і фрази: інтегральне зображення, обмежені парно додатно визначені функції.

Національний лісотехнічний університет, Львів, Україна
e-mail: *lopotko30@gmail.com*

ОБМЕЖЕНІ ПАРНО ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНІ ФУНКЦІЇ В $\mathbb{R}^\infty$ І ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

1 Обмежені парно додатно визначені функції нескінченного числа змінних

У статті одержано модифікація праці [1] на випадок парно додатно визначених (п.д.в.) функцій нескінченної кількості змінних.

Нехай $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \dots$ — простір з з елементами $x = (x_j)_{j=1}^\infty$, $x_j \in \mathbb{R}^1$. Введемо в цьому просторі гауссівські міри $d\omega_1(x) = (p(x_1)dx_1) \otimes (p(x_2)dx_2) \times \dots$, де $p(t) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt$, $t \in \mathbb{R}^1$ і $d\omega_{\frac{1}{2}}(x) = (p_0(x_1)dx_1) \otimes (p_0(x_2)dx_2) \times \dots$, де $p_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $t \in \mathbb{R}^1$. Тоді, якщо $f(x)$ — вимірна і сумовна відносно $d\omega_{\frac{1}{2}}(x)$, то $[f(x+y) + f(x-y)]$ буде вимірною та сумовною відносно $d\omega_1(x)$, причому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \frac{1}{2} \left[f(x+y) + f(x-y) \right] d\omega_1(x) d\omega_1(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} f(x)\, d\omega_1(x). \tag{1}$$

Означення 1. Дійснозначну функцію $k(x)$ $(x \in \mathbb{R}^\infty)$, парну по кожній змінній, вимірну і майже всюди обмежену щодо міри $d\omega_{\frac{1}{2}}(x)$, будемо називати *п.д.в.*, якщо для

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26B40, 31B10.

будь-якої циліндричної функції $u(x) = u_{ц}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($u_{ц} \in C_0^m(\mathbb{R}^m)$) виконується нерівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \frac{1}{2}\left[k(x+y) + k(x-y)\right]\overline{u(x)}u(y)\,d\omega_1(x)d\omega_1(y) \geq 0.$$

$$l_{2,+} = \left\{\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^\infty \,\middle|\, \lambda_j \geq 0; \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^2 < \infty\right\}.$$

Теорема 1. *Для того, щоб функція $k(x)$ ($x \in \mathbb{R}^\infty$) допускала зображення*

$$k(x) = \int\limits_{l_{2,+}} \prod_{j=1}^\infty \operatorname{Cos}\lambda_j x_j\,d\sigma(\lambda), \tag{2}$$

де $d\sigma(\lambda)$ — невід'ємна скінченна міра на σ-алгебрі циліндричних множин із $l_{2,+}$, необхідно і достатньо, щоб функція $k(x)$ була п.д.в. і обмеженою. Рівність (2) розуміємо як рівність майже для всіх $x \in \mathbb{R}^\infty$ щодо міри $d\omega_{\frac{1}{2}}(x)$.

Доведення. Достатність. Добре відомо, що для п.д.в. функції на $\mathbb{R}^1$ має місце інтегральне зображення

$$k(x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \operatorname{Cos}\sqrt{\lambda_1}x_1\,d\chi(\lambda_1) = \int\limits_{-\infty}^{0} \operatorname{Cos}\sqrt{\lambda_1}x_1\,d\chi(\lambda_1) + \int\limits_{0}^{\infty} \operatorname{Cos}\sqrt{\lambda_1}x_1\,d\chi(\lambda_1) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} \operatorname{Cos}\lambda_1 x_1\,d\sigma_1(\lambda_1).$$

Не важко показати, що якщо $k(x_1)$ обмежена, то п.д.в. функція має наступне зображення

$$k(x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} \operatorname{Cos}\lambda_1 x_1\,d\sigma_1(\lambda_1).$$

Доведемо тепер, що для обмежених п.д.в. функцій $k(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R}^n$ буде мати місце таке інтегральне зображення

$$k(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \prod_{j=1}^n \operatorname{Cos}\lambda_j x_j\,d\sigma_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \tag{3}$$

Доведення проведемо методом математичної індукції по n

Нехай

$$k(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} \prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{Cos}\lambda_j x_j\,d\sigma_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}),$$

а

$$k(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \prod_{j=1}^n \operatorname{Cos}\lambda_j x_j\,d\chi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

відповідно до (3) зображення. Тоді, так як $\int\limits_{\mathbb{R}^1} d\chi_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ — міра, зосереджена на $\mathbb{R}^{n-1}_+$, то

$$k(x_1,\dots,x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} \prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{Cos}\lambda_j x_j \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} \operatorname{Ch}\lambda_n x_n \, d\nu_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} \prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{Cos}\lambda_j x_j \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} \operatorname{Cos}\lambda_n x_n \, d\sigma_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n).$$

Поклавши в кожній формулі $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$, одержимо

$$k(0,\dots,0,x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} \operatorname{Ch}\lambda_n x_n \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} d\nu_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} \operatorname{Cos}\lambda_n x_n \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} d\sigma_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n). \tag{4}$$

Але, оскільки $k(x_1,\dots,x_n)$ — обмежена, то перший доданок в (4) повинен дорівнювати нулю. Тобто одержимо зображення (3).

Тепер покажемо, що міри $\{\sigma_n(\cdot)\}$ — узгоджені. Для цього розглянемо зображення

$$k(x_1,\dots,x_{n-1}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} \prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{Cos}\lambda_j x_j \, d\sigma_{n-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}) \tag{5}$$

і

$$k(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \prod_{j=1}^{n} \operatorname{Cos}\lambda_j x_j \, d\sigma_n(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_n). \tag{6}$$

Поклавши в (6) $x_n = 0$, одержимо

$$k(x_1,\dots,x_{n-1},0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{Cos}\lambda_j x_j \, d\sigma_n(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_n). \tag{7}$$

Звідси випливає єдиність мір $d\sigma_{n-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$ і $d\sigma_n(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_n)$, так як $|k(x_1,\dots,x_n)| \le C$. Тоді із (5), (7) одержимо умову узгодженості мір $\{d\sigma_n(\cdot)\}$:

$$\int\limits_{A\times\mathbb{R}^1_+} d\sigma_n(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_n) =$$

$$= \int\limits_A d\sigma_{n-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}),$$

де $A \subset \mathbb{R}^{n-1}_+$, A — борелівська. Але, якщо система мір $\{\sigma(\cdot)\}$ — узгоджена, то за теоремою Колмогорова можна побудувати єдину міру $\sigma(\cdot)$ на $\mathbb{R}^\infty_+$ таку, що $\sigma(B\times\mathbb{R}^1\times\dots)$ для всіх $B \subset \mathbb{R}^n$, B — борелівська. Тобто маємо інтегральне зображення

$$k(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^\infty}\prod_{j=1}^{\infty}\operatorname{Cos}\lambda_j x_j\,d\sigma(\lambda)\quad (x\in\mathbb{R}^\infty)\,.$$

Тепер перейдемо від міри $\sigma(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+^\infty$ до парної по кожній змінній міри $\rho(\cdot)$ на $\mathbb{R}^\infty$, переходячи від мір $\sigma_n(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+^n$ до парних мір $\rho_n(\cdot)$ на $\mathbb{R}^n$ $(n=1,2,\dots)$. В одновимірному випадку покладемо

$$\rho_1(\Delta_+)=\rho_1(\Delta_-)=\frac{1}{2}\sigma_1(\Delta_+);$$
$$\rho_1(\{0\})=\sigma_1(\{0\}),$$

де $\Delta_+=(a,b)$, $\Delta_-=(-b,-a)$ $(a>0,\,b>0)$ — проміжки на осі $\mathbb{R}^1$.

У випадку n змінних формули переходу від мір $\sigma_n(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+^n$ до парної міри $\rho_n(\cdot)$ на $\mathbb{R}^n$ мають такий вигляд:

$$\rho_n\left(\{0\}\times\cdots\times\{0\}\right)=\sigma_n\left(\{0\}\times\cdots\times\{0\}\right),$$
$$\rho_n\Big(\{0\}\times\cdots\times\{0\}\times\Delta_+^{(\kappa)}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}\Big)=$$
$$=\rho_n\Big(\{0\}\times\cdots\times\{0\}\times\Delta_-^{(\kappa)}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2}\sigma_n\Big(\{0\}\times\cdots\times\{0\}\times\Delta_+^{(\kappa)}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}\Big),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\rho_m\Big(\{0\}\times\cdots\times\{0\}\times\Delta_\pm^{(\kappa_1)}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}\times\Delta_\pm^{(\kappa_2)}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}\times\cdots\times$$
$$\times\Delta_\pm^{(\kappa_m)}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2^m}\sigma_m\Big(\{0\}\times\cdots\times\{0\}\times\Delta_+^{(\kappa_1)}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}\times\Delta_+^{(\kappa_2)}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}\times\cdots\times$$
$$\times\Delta_+^{(\kappa_m)}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}\Big),$$

де $\Delta_\pm$ означає або Δ_+, або Δ_-.

$$\rho_n\left(\Delta_\pm^{(1)}\times\Delta_\pm^{(2)}\times\cdots\times\Delta_\pm^{(n)}\right)=\frac{1}{2^n}\sigma_n\left(\Delta_+^{(1)}\times\Delta_+^{(2)}\times\cdots\times\Delta_+^{(n)}\right).$$

Оскільки міри $\rho_n(\cdot)$ на $\mathbb{R}^n$ узгоджені по $n=1,2,\dots$, то за теоремою Колмогорова існує єдина міра ρ на $\mathbb{R}^\infty$ така, що $\rho\left(B\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\times\dots\right)=\rho_n(B)$ для всіх борелівських $B\in\mathbb{R}^n$. Із вищесказаного випливає, що

$$k(x_1,\dots,x_n)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{j=1}^{n}\operatorname{Cos}\lambda_j x_j\,d\sigma_n(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{j=1}^{n}\operatorname{Cos}\lambda_j x_j\,d\rho_n(\lambda)$$

і

$$k(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^\infty}\prod_{j=1}^{\infty}\operatorname{Cos}\lambda_j x_j\,d\sigma(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}^\infty}\prod_{j=1}^{\infty}\operatorname{Cos}\lambda_j x_j\,d\rho(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}^\infty}e^{i\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j x_j\right)}\,d\rho(\lambda).$$

Тоді з теореми 1 випливає, що $\rho(l_2) = 1$. Тому і $\sigma(l_{2,+}) = 1$. Тобто маємо зображення

$$k(x) = \int\limits_{l_{2,+}} \prod_{j=1}^{\infty} \mathrm{Cos}\,\lambda_j x_j \, d\sigma(\lambda) \quad (x \in \mathbb{R}^\infty)\,. \tag{8}$$

Так як при $\lambda \in l_{2,+}$

$$\left\| \prod_{j=1}^{\infty} \mathrm{Cos}\,\lambda_j x_j \right\|_{L_2\left(\mathbb{R}^\infty; d\omega_{\frac{1}{2}}(x)\right)} < \infty,$$

то інтеграл (8) збігається сильно. Достатність доведена.

Необхідність. Із того, що

$$\left\| \prod_{j=1}^{\infty} \mathrm{Cos}\,\lambda_j x_j \times \times \mathrm{Cos}\,\lambda_j y_j \right\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty; d\omega_1(x) \otimes d\omega_1(y))} < \infty,$$

якщо $\lambda \in l_{2,+}$, то із (8) одержимо зображення

$$\frac{1}{2}\left[k(x+y) + k(x-y)\right] = \int\limits_{l_{2,+}} \prod_{j=1}^{\infty} \mathrm{Cos}\,\lambda_j x_j \mathrm{Cos}\,\lambda_j y_j \, d\sigma(\lambda) \;\; (x \in \mathbb{R}^\infty) \tag{9}$$

За допомогою (9) перевіряємо нерівність (1).

Доведемо тепер два останні твердження теореми. Нехай

$$u(x) = u_{\text{ц}}\left(x_1, \ldots, x_m\right) \quad \left(u_{\text{ц}} \in C_o^\infty(\mathbb{R}^m)\right),$$

тоді за допомогою (8), (9), (1) одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \left(\int\limits_{l_{2,+}} \prod_{j=1}^{\infty} \mathrm{Cos}\,\lambda_j x_j \, d\sigma(\lambda) \right) \overline{u(x)} \, d\omega_{\frac{1}{2}}(x) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int\limits_{l_{2,+}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} \mathrm{Cos}\,\lambda_j x_j \right) \overline{u(x)} \, d\omega_{\frac{1}{2}}(x) \right) d\sigma(\lambda) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int\limits_{l_{2,+}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \frac{1}{2} \left[\prod_{j=1}^{n} \mathrm{Cos}\,\lambda_j (x_j + y_j) \overline{u(x_j + y_j)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathrm{Cos}\,\lambda_j (x_j - y_j) \overline{u(x_j - y_j)} \right] d\omega_1(x) \, d\omega_1(y) \right) d\sigma(\lambda) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \frac{1}{2} \left[k(x+y) \overline{u(x+y)} + k(x-y) \overline{u(x-y)} \right] d\omega_1(x) \, d\omega_1(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} k(x) \overline{u(x)} \, d\omega_{\frac{1}{2}}(x).$$

із довільності $u(x)$ випливає рівність (2) $d\mu_{\frac{1}{2}}(x)$ — майже для всіх $x \in \mathbb{R}^\infty$.

Однозначність міри $d\sigma(\lambda)$ із (2) випливає з обмеженості $k(x)$. Теорему 1 доведено.

□

2 Обмежені парно додатно визначені функції в гільбертовому просторі

Нехай H-дійсний сепарабельний гільбертовий простір, e_1 — деякий орт в H і H' — ортогональне доповнення в H до $\{\lambda e_1 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}^1; x = (x_1, x')\,(x_1 \in \mathbb{R}^1, x' \in H')\}$ означає вектор $x_1 e_1 + x'$. Шаром $H_l \subseteq H(0 < l \leq \infty)$ простору H будемо називати множину $\{(x_1, x') \,|(x_1 \in (-l, l), x \in H'); H_\infty = H\}$. Дійснозначну опуклу обмежену парну функцію $k(x)$ $(x \in H)$ будемо називати додатно визначеною (п.д.в.), якщо для будь-яких $x^{(1)}, \ldots, x^{(j)} \in H, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}^1 (n \in N)$ виконується нерівність

$$\sum_{j,k=1}^{N} \frac{1}{2} \left[k(x^{(j)} + x^{(k)}) + k(x^{(j)} - x^{(k)}) \right] \xi_j \overline{\xi_k} \geq 0. \tag{10}$$

j-топологією в H називаємо топологію, яка задана околами нуля виду $\{x \in H \,|(Ax, x)_H < 1\}$, де A — невід'ємні ядерні оператори. Будемо говорити, що функція $k(x)$ $(x \in H)$ неперервна в O в j-топології, якщо вона неперервна в O в топології, індукованій j-топологією на H.

Теорема 2. *Кожна обмежена п.д.в. функція $k(x)$ $(x \in H)$, неперервна в O в j-топології, допускає зображення*

$$k(x) = \int_H \cos(\lambda, x)\, d\rho(\lambda) \quad (x \in H), \tag{11}$$

де $d\rho(\lambda)$ — парна, невід'ємна скінченна міра, означена на деякій σ-алгебрі $\mathcal{B}(H)$ борелівських множин з H. Навпаки, всякий інтеграл виду (11) є обмеженою п.д.в. функцією в H неперервною в O в j-топології. Міра $d\rho(\lambda)$ щодо $k(x)$ визначаєтьcя однозначно.

Із (10) випливають наступні нерівності:

1) Якщо $|k(x)| \leq C$ і $\sup |k(x)| = C$, то $|k(x)| \leq k(0)$. Дійсно, нехай в (10) $N = 2; \xi_1 = -1; \xi_2 = 1; x^{(1)} = x; x^{(2)} = 0$, тоді

$$3k(0) + k(2x) - 4k(x) \geq 0.$$

Звідки випливає що $k(2x) + 3k(0) \geq 4k(x)$ і $k(x) \leq \frac{k(2x)+3k(0)}{4}$. Тому, якщо $|k(x)| \leq C$, то $|k(x)| \leq \frac{3k(0)+C}{4}$ і $\sup |k(x)| \leq \sup \frac{3k(0)+C}{4}$, а значить $C \leq \frac{3k(0)+C}{4}$. Тому $C \leq k(0)$, а значить

$$|k(x)| \leq k(0) \tag{12}$$

2) Для довільної опуклої обмеженої п.д.в. функції виконується нерівність

$$\left| k\left(x^{(1)}\right) - k\left(x^{(2)}\right) \right|^2 \leq 2k(0) \left\{ k(0) - k(x^{(1)} - x^{(2)}) \right\}.$$

Дійсно, оскільки для довільного додатно визначеного ядра $k(x, y)$ справджується нерівність [[6], лема 4.1, ст. 469]

$$|k(x, z) - k(y, z)|^2 \leq k(z, z)(k(x, x) - 2\mathrm{Re}\, k(x, y) + k(y, y)),$$

то покладаючи $k(x,y) = \frac{1}{2}[k(x^{(1)} - x^{(2)}) + k(x^{(1)} + x^{(2)})]$ і $z = 0$ одержимо

$$|k(x^{(1)}) - k(x^{(2)})|^2 \leq$$

$$\leq k(0)(k(0) + \frac{1}{2}k(2x^{(1)}) + \frac{1}{2}k(2x^{(2)}) - k(x^{(1)} - x^{(2)}) - k(x^{(1)} + x^{(2)})).$$

Але $\frac{1}{2}(k(2x^{(1)}) + k(2x^{(2)})) - k(x^{(1)} + x^{(2)}) \leq 0$, так як $k(x)$ — це опукла функція, тому попередня нерівність, враховуючи(12), буде мати вигляд

$$|k(x^{(1)}) - k(x^{(2)})|^2 \leq k(0)\left\{k(0) - k(x^{(1)} - x^{(2)})\right\} \tag{13}$$

Доведення. Існує невід'ємний ядерний оператор A в H такий, що $k(x)(x \in H)$ рівномірно неперервна в такому сенсі: для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при $x^{(1)}, x^{(2)} \in H \left|k(x^{(1)}) - k(x^{(2)})\right| < \varepsilon$ як тільки $(A(x^{(1)} - x^{(2)}), x^{(1)} - x^{(2)}) < \delta$ і $x^{(1)} - x^{(2)} \in H$. Дійсно, завдяки неперервності $k(x)$ в O в j-топології знайдеться послідовність невід'ємних ядерних операторів $(A_\alpha)_{\alpha=1}^\infty$ така, що при $x \in H$ $|k(0) - k(x)| < \frac{1}{\alpha}$, як тільки $(A_\alpha x, x)_H < 1$. Покладемо $A = \sum_{\alpha=1}^\infty C_\alpha A_\alpha + C$, де $C_\alpha > 0$ настільки швидко спадає при $\alpha \to \infty$, що $\sum_\alpha C_\alpha T_r(A_\alpha) < \infty$, C — деякий невід'ємний ядерний оператор з нульовим ядром. Оскільки, $\|A_\alpha\| \leq T_r(A_\alpha)$, то ряд для A збігається по нормі операторів і визначає оператор потрібного типу. Нехай $\varepsilon > 0$. Знайдемо таке α_0 що $\frac{1}{\alpha_0} < \varepsilon$ і покладемо $\delta = C_{\alpha_0}$. Якщо $x^{(1)}, x^{(2)} \in H$ такі що $x^{(1)} - x^{(2)} \in H$ і виконується нерівність $\delta = C_{\alpha_0} > (A(x^{(1)} - x^{(2)}), x^{(1)} - x^{(2)})_H \geq C_{\alpha_0}(A_{\alpha_0}(x^{(1)} - x^{(2)}), x^{(1)} - x^{(2)})$, то $(A_{\alpha_0}(x^{(1)} - x^{(2)}), x^{(1)} - x^{(2)}) < 1$, а значить $|k(0) - k(x^{(1)} - x^{(2)})| < \frac{1}{\alpha_0} < \varepsilon$.

Але для $k(x)$, як взагалі для будь-якої обмеженої п.д.в. функції на деякій комутативній групі справджується нерівність (13), звідки для розглянутих вище $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ одержимо $|k(x^{(1)}) - k(x^{(2)})| < \sqrt{k(0)}\varepsilon$. тобто, неперервність обмеженої п.д.в. функції в O тягне її рівномірну неперервність.

Запровадимо в H скалярний добуток, покладаючи $(x,y)_A = (Ax,y)_H \quad (x,y \in H)$; нехай H_A — поповнення H щодо $(\cdot,\cdot)_A$. Опишемо H_A координатно. Для цього виберемо в H ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора A, і реалізуємо H як простір l_2 при розкладі за цим базисом. Тоді простір H_A буде реалізований як лінійний простір $l_{2;A} = \left\{x \in \mathbb{R}^\infty \middle| \sum_{\mu=1}^\infty a_\mu x_\mu^2 < \infty\right\}$ зі скалярним добутком $(x,y)_A = \sum_{\mu=1}^\infty a_\mu x_\mu y_\mu \quad (x,y,\in l_{2;A})$ (тут $(a_\mu \delta_{\mu,\nu})_{\mu\nu=1}^\infty$ — матриця оператора A в базисі, який
розглядається; $a_\mu > 0$). Істотно, що гаусівська міра $\gamma_\varkappa(l_2)(A) = 1$, $\varkappa = (\varkappa, \varkappa, \dots)$ так як $\sum_{\alpha=1}^\infty a_\alpha = \operatorname{Tr} A < \infty$ [4].

Так як $k(x)$ $(x \in H)$ рівномірно неперервна щодо норми $||\cdot||_A = (\cdot,\cdot)_A^{\frac{1}{2}}$, то за неперервністю може бути поширена до рівномірно неперервної функції $k_1(x)$ на всьому H_A. Переходячи до координатного запису H_A, одержимо, що $k_1(x)$ означена на множині $l_{2;A} \subset \mathbb{R}^\infty$ повної гаусівської міри $\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2\Pi}e^{-\frac{x^2}{2}}}$. З неперервності $k_1(x)$ в топології $l_2(A)$ слідує вимірність $k_1(x)$ $(x \in l_2(A))$ відносно σ-алгебри $\mathcal{C}_\alpha(l_2(A)) = \{\alpha \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) | \alpha \subset l_2(A)\}$. Доозначимо нулем $k_1(x)$ на $\mathbb{R}^\infty \backslash l_2(A)$ в результаті одержимо вимірну і майже всюди обмежену щодо γ_2 функцію $k_2(x) \quad (x \in \mathbb{R}^\infty)$.

Функції $k_2(x)$ д.в. в розумінні [1] з $\omega_1=\gamma_1$, $\omega_{\frac{1}{2}}=\gamma_2$. Дійсно, нехай, наприклад, $l<\infty$. Переходячи в нерівності (10) до границі, виявимо, що вона справедлива і для $k_1(x)$; зараз $x_{(j)}\in l_{2;2l,A}$. Розглянемо деяку циліндричну функцію $u(x)=u_\varphi(x_1,...,x_m)$ $(u_\varphi\in C_0^\infty((-l,l)\mathbb{R}^{m-1})$ і покладемо в цій нерівності $\xi_j=u(x^{(j)})$. Одержимо

$$\sum_{j,k=1}^{N}\frac{1}{2}\left[k_1\left(x^{(j)}+x^{(k)}\right)+k_1\left(x^{(j)}-x^{(k)}\right)\right]u(x^{(j)})\overline{u(x^{(k)})}\geq 0(x^{(j)}\in l_{2;l,A}). \tag{14}$$

Проінтегруємо (14) відносно кожної з точок $x^{(1)},\ldots,x^{(N)}\in l_{2;l,A}$ за мірою γ_1. Оскільки $\gamma_1(\mathbb{R}_l^\infty\backslash l_{2;l,A})=0$, то, якщо замінити $k_1(x)$ на $k_2(x)$ зібрати однакові додатки і скоротити на $\gamma_1(\mathbb{R}_l^\infty)>0$, знайдемо

$$N\int\limits_{\mathbb{R}_l^\infty}\frac{1}{2}\left[k_2(2x)+k_2(0)\right]|u(x)|^2\,d\gamma_1(x)+N(N-1)\int\limits_{\mathbb{R}_l^\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_l^\infty}\frac{1}{2}\left[k_2(x+y)+\right.$$

$$\left.+k_2(x-y)\right]u(y)\overline{u(x)}d\gamma_1(x)d\gamma_1(y))\geq 0.$$

Поділимо цю нерівність на N^2 і здійснимо граничний перехід при $N\to\infty$ В результаті одержимо $\int\limits_{\mathbb{R}_l^\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_l^\infty}\frac{1}{2}[k_2(x+y)+k_2(x-y)]u(y)\overline{u(x)}d\gamma_1(x)d\gamma_1(y))\geq 0$ тоді згідно (12) одержимо, що для $\gamma_2(x)$ — майже всіх $x\in\mathbb{R}_{2l}^\infty$ зображення $k_2(x)=\int\limits_{l_{2,+}}\prod_{\mu=1}^\infty\cos\lambda_\mu x_\mu d\sigma(\lambda)$. Перейдемо тепер від міри $\sigma(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+^\infty=\mathbb{R}_+^1\times\mathbb{R}_+^1\times\ldots$ до парної по кожній змінній міри $\rho(\cdot)$ на $\mathbb{R}^\infty=\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\times\ldots$. Тоді зображення $k_2(x)$ буде мати такий вигляд:

$$k_2(x)=\int\limits_{l_2^+}\prod_{\mu=1}^\infty\cos\lambda_\mu x_\mu d\sigma(\lambda)=\int\limits_{l_2}\prod_{\mu=1}^\infty\cos\lambda_\mu x_\mu d\rho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_{l_2}\cos\left(\sum_{\mu=1}^\infty\lambda_\mu x_\mu\right)d\rho(\lambda), \tag{15}$$

де $d\rho(\lambda)$ — невід'ємна скінченна парна міра на σ-алгебрі $\mathcal{C}_\sigma(l_2)=\{\alpha\cap l_2|$ $\alpha\subset\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)\}$. Рівність розуміємо як рівність майже для всіх $x\in\mathbb{R}_{2l}^\infty$ відносно γ_2.

Остання рівність в (15) вірна. Дійсно, у двовимірному випадку маємо

$$k_2(x_1,x_2)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^2}\mathrm{Cos}\,\lambda_1x_1\mathrm{Cos}\,\lambda_2x_2\,d\sigma_2(\lambda_1,\lambda_2)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{Cos}\,\lambda_1x_1\mathrm{Cos}\,\lambda_2x_2\,d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\mathrm{Cos}\,\lambda_1x_1\mathrm{Cos}\,\lambda_2x_2-\mathrm{Sin}\,\lambda_1x_1\mathrm{Sin}\,\lambda_2x_2\right)\,d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{Cos}\,(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\,d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{Cos}\,(\lambda,x)\,d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2).$$

Нехай $k_2(x_1,\dots,x_{n-1}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{Cos}\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}\lambda_j x_j\right) d\rho_{n-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$, тоді

$$k_2(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Cos}\,\lambda_n x_n \mathrm{Cos}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j x_j\right) d\rho_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\mathrm{Cos}\,\lambda_n x_n \mathrm{Cos}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j x_j\right) - \mathrm{Sin}\,\lambda_n x_n \mathrm{Sin}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j x_j\right)\right] d\rho_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Cos}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\right) d\rho_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Cos}\,(\lambda,x)\, d\rho_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

Спрямовуючи $n\to\infty$, одержимо останню рівність в (15).

Для доведення теореми необхідно вивести, що

$$k_2(z) = \int\limits_{l_2} \cos(\lambda,z)\, d\rho(\lambda) \quad (z\in l_2) \tag{16}$$

(тривіально (16) з (15) не випливає, тому що $\gamma_2(l_2)=0$).

Для цього можна використати [[6], лема 4.2, ст. 471-472], поклавши $f(x)=\cos(\lambda,x)$ і

$$\delta_N(x) = \left(\prod_{\mu=1}^{\infty}(1+2Na_\mu)\right)^{\frac12} e^{-N||x||_A^2} \tag{17}$$

$$\left(x\in\mathbb{R}^\infty;\quad N=1,2,\dots;\int\limits_{\mathbb{R}^\infty}\delta_N(x)\,d\gamma_2(x)=1\right)$$

є δ-подібною, що стягується до O щодо міри $d\gamma_2(x)$ і топології $l_{2;A}$.

Доведемо (16). Нехай $z\in l_2$ фіксоване, з (15) випливає, що для $d\omega_{\frac12}(x)$ — майже всіх $x\in\mathbb{R}^\infty$

$$\frac12[k_2(x+z)+k_2(x-z)] = \frac12\int\limits_{l_2}[\cos(\lambda,x+z)+$$

$$+\cos(\lambda,x-z)]\; d\rho(\lambda) =$$

$$= \int\limits_{l_2}\cos(\lambda,x)\cos(\lambda,z)_{l_2}\, d\rho(\lambda) \tag{18}$$

Тут ми скористалися тим, що при $z\in l_2$ міри $\gamma_2(\Delta)$ і $\gamma_2(\Delta+z)$ абсолютно неперервні одна відносно іншої [4] і справедливою $d\gamma_2(x)$ — майже для всіх $x\in\mathbb{R}^\infty$ рівністю $\frac12[\cos(\lambda,x+z)+\cos(\lambda,x-z)] = \cos(\lambda,x)\cos(\lambda,z)_{l_2}\quad \lambda,z\in l_2$ Із (18) одержуємо $\int\limits_{\mathbb{R}^\infty}[k_2(x+z)+k_2(x-z)]\delta_N(x)d\gamma_2(x) = \int\limits_{l_2} cos(\lambda,x)\delta_N(x)d\gamma_2(x)\cos(\lambda,x)_{l_2}\, d\rho(\lambda)$.

Спрямувавши тут $N\to\infty$ і скориставшись (17), одержимо (16).

Зупинимося на двох останніх твердженнях теореми. Безпосередньо підстановкою (11) в (10) впевнюємося, що інтеграл (11)-обмежена п.д.в. функція на H. Його неперервність в j-топології і однозначність визначення міри $d\rho(\lambda)$ також відомі [5]. Теорему 2 доведено. $\square$

Список літератури

[1] Березанский Ю. М., Гали И. М. *Положительно определенные функций бесконечного числа переменных.* Укр. мат. журн. 1972, **24** (4), 435–463.

[**Unused: 2**] Минлос Р. А. *Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры.* Труды Моск. матем. о-ва 1959, **8**.

[**Unused: 3**] Сазонов В. В. *Замечание о характеристических функционалах.* Теория вероятностей и ее применение 1958, **3** (2).

[4] Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. Москва, Наука, 1967.

[5] Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, том 1. Москва, Наука, 1971.

[6] Березанський Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. Киев, Наук. думка, 1988.

1. Berezansky Yu. M., Gali I. M. *Positive definite functions infinitely many variables in the layer.* Ukr. Math. Jour. 1972, **24** (4), 435–463 (in Russian). 2. Minlos R. A. *Generalized random processes and their continuation to the measure.* Tr. Mosk. Mat. O-va 1959, **8** (in Russian).

3. Sazonov V. V. *Remark on characteristic functionals.* Probability theory and its application 1958, **3** (2) (in Russian).

4. Shilow G. E., Fan Dyk Tin. Integral, measure and derivative on linear spaces. M, «Science», 1967 (in Russian).

5. Gichman I. I., Skorokhod A. V. The theory of random processes, M, «Science», 1971 (in Russian).

6. Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G. Spectral methods in infinite-dimensional analysis. Kiev, «Naukova dumka», 1988 (in Russian).

Надійшло 30.09.2020

Lopotko O. V. *Integral representation of even positive definite bounded functions of an infinite number of variables*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 93–102.

In this article the integral representation for bounded even positive functions $k(x)$ $(x \in \mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots)$ is proved. We understand the positive the positive definite in the integral sense with integration respects to measure $d\theta(x) = p(x_1)dx_1 \otimes p(x_2)dx_2 \otimes \dots$ $\left(p(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}e^{-x^2}\right)$. This integral representation has the form

$$k(x) = \int\limits_{l_2^+} \operatorname{Cos} \lambda_i x_i d\rho(\lambda) \qquad (*)$$

Equality stands to reason for almost all $x \in \mathbb{R}^\infty$. l_2^+ space consists of those vectors $\lambda \in \mathbb{R}_+^\infty = \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}_+^1 \times \dots \left| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty \right.$. Conversely, every integral of form (*) is bounded by even positively definite function $k(x)$ $x \in \mathbb{R}^\infty$.

As a result, from this theorem we shall get generalization of theorem of R. A. Minlos–V. V. Sazonov [2, 3] in case of bounded even positively definite functions $k(x)$ $(x \in H)$, which are continuous in O in j''=topology.