Літовченко В.А.

ПРО ПРИРОДУ ОДНОГО КЛАСИЧНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Робота присвячена дослідженню загальної природи одного класичного параболічного псевдодиференціального рівняння з оператором М.Ріса дробового диференціювання, що діє за просторовою змінною. При відповідних значеннях порядку дробового диференціювання, це рівняння відоме ще як рівняння ізотропної супердифузії. Воно є природній узагальненням класичного рівняння дифузії. Відомо також, що фундаментальний розв'язок задачі Коші для цього рівняння є густиною розподілу ймовірностей стійких симетричних випадкових процесів П.Леві. У роботі показано, що фундаментальний розв'язок цього рівняння є розподілом ймовірностей сили локального впливу рухомих об'єктів у нестаціонарному гравітаційному полі, в якому взаємодія між масами підпорядкована відповідному потенціалу М.Ріса. При цьому, класичному випадку гравітації Ньютона відповідає відомий нестаціонарний розподіл Ж.Хольцмарка.

Ключові слова і фрази: класичне рівняння дифузії, псевдодиференціальне рівняння з оператором Ріса, потенціал Ріса, стійкі симетричні випадкові процеси Леві, розподіл Хольцмарка, фундаментальний розв'язок, задача Коші, нестаціонарні гравітаційні поля, локальний вплив рухомих об'єктів.

Yu. Fed'kovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *v.litovchenko@chnu.edu.ua*

Вступ

Розглянемо класичне рівняння дифузії

$$\partial_t u(t;x) - b\triangle_x u(t;x) = 0,\ \ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{1}$$

в якому $\Pi_{(0;T]} := (0;T] \times \mathbb{R}^n$, $\triangle_x$ – n-вимірний оператор Лапласа, що діє за просторовою змінною x, а $b > 0$ – фіксований параметр. Фундаментальним розв'язком задачі Коші для (11) є функція

$$G(t;x) = \mathbb{F}\big[e^{-bt|\xi|^2}\big](t;x) \equiv (\sqrt{4\pi bt})^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{4bt}}, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2}$$

УДК 519.21, 517.937
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35R11, 60G22, 26A33.

де $\mathbb{F}$ – оператор перетворення Фур'є, а $|\cdot|$ – евклідова норма в $\mathbb{R}^n$. Рівняння (11) відіграло важливу роль у створенні класичної теорії параболічних рівнянь з частинними похідними, тобто диференціальних рівнянь, фундаментальний розв'язок задачі Коші для яких відносно змінної x має типові для $G(t;\cdot)$ властивості поведінки на нескінченності [1, 2, 3, 4]. Такі рівняння виникають при вивченні різноманітних природничих процесів, пов'язаних з дифузією й тепломасообміном.

Рівняння (11) має відношення й до теорії випадкових процесів. Функція $G(t;\cdot)$ – щільність ймовірнісного переходу випадкового процесу Вінера [5] – джерела багатьох дифузійних процесів.

Класичне рівняння дифузії (11) також знаходиться у витоках сучасної теорії параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ПДР) з однорідними точков-негладкими символами псевдодиференціювання. Замінивши в конструкції рівняння (11) оператор Лапласа $-\triangle_x$ на оператор Ріса [6] дробового диференціювання $A_\alpha := (-\triangle_x)^{\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha > 0$, одержимо клас ПДР

$$\partial_t u(t;x) + bA_\alpha u(t;x) = 0, \ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{3}$$

із відповідним символом псевдодиференціювання $|\cdot|^\alpha$, який при $\alpha = 2$ містить вихідне рівняння (11). Зокрема, тому (3) при відовідних α успадкувало назву "рівняння ізотропної супердифузії" [7, с. 251].

Функція

$$G_\alpha(t;x) = \mathbb{F}\big[e^{-bt|\xi|^\alpha}\big](t;x), \tag{4}$$

є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (3). Вивченням властивостей цієї функції займалося багато дослідників [8, 9, 10, 11, 12]. При цьому з'ясувалося, що на відміну від класичного випадку $\alpha = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, функція $G_\alpha(t;\cdot)$ при непарних значеннях α має вже не експоненціальне спадання на нескінченності, а степеневе.

При деяких α рівняння (3) знаходить важливе застосування в теорії випадкових процесів. Оператор A_α при $\alpha \leq 2$ є інфінітезимальним оператором симетрично стійкого процесу П. Леві з перехідною функцією G_α [13, 14]. Яскравими представниками таких процесів є випадкові процеси Коші ($\alpha = 1$), Хольцмарка ($\alpha = 3/2$), Гауса–Вінера ($\alpha = 2$) та ін. У сучасній літературі наведено багато прикладів реальних застосувань розподілів Коші, Гауса, Хольцмарка та Перето в астрономії, ядерній фізиці, економіці, соціології, у промисловій та військовій галузях [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Кожне з них характеризує стохастичні особливості ПДР (3) при тому чи іншому значенні $\alpha \in (0;2]$.

У даній роботі встановлено загальну стохастичну природу рівняння (3) при $\alpha \in (0;2)$. Показано, що фундаментальний розв'язок G_α задачі Коші для цього рівняння за певних умов на параметр b є розподілом ймовірностей сили F локального впливу рухомих об'єктів у системі, в якій зв'язок між об'єктами описується потенціалом Ріса. Зазначимо, що випадку класичної Ньютонівської гравітації відповідає рівняння (3) при $\alpha = 3/2$ (нестаціонарна задача Хольцмарка).

1 Задача про локальний вплив рухомих об'єктів

У вакуумному Евклідовому середовищі $\mathbb{R}^3$ розглядається зліченна система об'єктів Z_j, які вільно рухаються, при цьому, в кожному з них зосереджена певна маса m_j. Вважатимемо, що взаємодія між масами в системі підпорядкована потенціалу М.Ріса [6], тобто гравітаційний вплив між її двома довільними об'єктами маси M і m описується степеневим законом

$$F = G\frac{Mm}{|r|^{\beta}}r^{\circ}, \quad \beta > 0. \tag{5}$$

Тут F – сила взаємодії, G – вагова стала, r – вектор відстані між цими об'єктами, а $r^{\circ} := r/|r|$ – орт вектора r.

Задача полягає в дослідженні сили $F(t)$ впливу в момент часу t на одиницю маси об'єкта Z_0 цієї системи його близьким оточенням.

Оскільки $F(t)$ – величина з відносно швидкими, різькими відхиленнями, викликаними миттєвою зміною локального розподілу об'єктів з оточення Z_0, то доцільно розглядати $F(t)$ як випадкову величину.

Знайдемо розподіл $W^t_{\beta}(F)$ для сили $F(t)$ за наступних припущень. Вважатимемо, що розподіл об'єктів у оточенні Z_0 піддається флуктуаціям і, що об'єкти з різною масою m зустрічаються в системі з деяким цілком визначеним, емпірично встановленим законом. При цьому, в кожен момент часу t флуктуації густини об'єктів підпорядковані умові сталості їх середньої густини на одиницю об'єму:

$$n(t; r; m) \equiv n(t).$$

Нехай розглядуваний об'єкт Z_0 знаходиться в початку координат системи коориднат простору $\mathbb{R}^3$, а його сферичне оточення радіуса R на момент часу t містить $N(t)$ об'єктів. Тоді, згідно з вище зазначеним,

$$F(t) = G\sum_{j=1}^{N(t)} \frac{p_j}{|r_j|^{\beta+1}}r_j \equiv \sum_{j=1}^{N(t)} F_j$$

і

$$N(t) = \frac{4}{3}\pi R^3 n(t). \tag{6}$$

Спочатку для фіксованого t розглянемо розподіл $W^t_{\beta,R}(F)$ у сферичному околі радіуса R, що охоплює $N(t)$ об'єктів системи і знайдемо ймовірність $W^t_{\beta,R}\big(F_{\circ}\big)dF_{\circ}$ того, що величина $F(t)$ потрапляє в куб $[F_{\circ}(t); F_{\circ}(t) + dF_{\circ}(t)] \subset \mathbb{R}^3$. Застосувавши відомий метод Маркова характеристичних функцій [20, с. 152], одержимо:

$$W^t_{\beta,R}\big(F_{\circ}(t)\big) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi, F_{\circ}(t))}A_R(\xi)d\xi,$$

де

$$A_R(\xi) := \prod_{j=1}^{N(t)} \int_0^{+\infty} \Bigg(\int_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,F_j)}\tau_j(t; r_j; p_j)dr_j\Bigg)dp_j.$$

Тут $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток у $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{K}_R(0)$ – куля радіуса R з центром у початку координат, а $\tau_j(t;r_j;p_j)$ – розподіл ймовірностей того, що в момент часу t j-тий об'єкт з потенціалом-масою p_j знаходиться в положенні r_j. Якщо тепер урахувати, що мають місце лише флуктуації, сумісні з просторовою сталістю середньої густини, то тоді

$$\tau_j(t;r_j;p_j) = \frac{3\tau(t;p)}{4\pi R^3},$$

де $\tau(t;p)$ – частота, з якою зустрічаються об'єкти з різним потенціалом у момент часу t.

Звідси приходимо до рівності

$$A_R(\xi) = \left(\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,\eta)}\tau(t;p)dr\right)dp\right)^{N(t)},$$

в якій

$$\eta := Gpr/|r|^{\beta+1}. \tag{7}$$

Спрямувавши тепер $R\to+\infty$ і $N(t)\to+\infty$, згідно з (6) одержимо:

$$W_\beta^t(F) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F(t))}A(t;\xi)d\xi, \tag{8}$$

де

$$A(t;\xi) := \lim_{R\to\infty}\left[\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,\eta)}\tau(t;p)dr\right)dp\right]^{4\pi R^3 n(t)/3}.$$

Оскільки для каждого t

$$\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} \tau(t;p)dr\right)dp = 1,$$

то

$$A(t;\xi) = \lim_{R\to\infty}\left[1-\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} (1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)dr\right)dp\right]^{4\pi R^3 n(t)/3}. \tag{9}$$

Далі, абсолютна збіжність у (9) інтеграла зі змінною інтегрування r на всьому просторі $\mathbb{R}^3$ при $\beta > 3/2$ дозволяє записати рівність (9) у вигляді

$$A(t;\xi) = \lim_{R\to\infty}\left[1-\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)dr\right)dp\right]^{4\pi R^3 n(t)/3},$$

а відтак, дістати зображення

$$A(t;\xi) = e^{-n(t)B_\beta(t;\xi)}, \tag{10}$$

в якому

$$B_\beta(t;\xi) := \int\limits_0^{+\infty} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^3} (1 - e^{i(\xi,\eta)}) \tau(t;p) dr \Bigg) dp.$$

Знайдемо значення інтегрального виразу з попередньої рівності. Для цього в його внутрішньому інтегралі перейдемо від змінної r до η згідно з правилом (7), а відтак, до сферичної системи координат з віссю апплікат, спрямованою в напрямку вектора ξ, одержимо:

$$B_\beta(t;\xi) = \frac{4\pi (G|\xi|)^{3/\beta} < m^{3/\beta} >}{\beta} \int\limits_0^{+\infty} (\rho - \sin\rho) \rho^{-2-3/\beta} d\rho.$$

Тут $< m^{3/\beta} >$ – середнє значення величини $m^{3/\beta}$, що відповідає розглядуваному закону розподілу об'єктів у даній системі.

Зазначимо, що інтеграл з останньої рівності збігається лише при $\beta > \frac{3}{2}$. Зінтегрувавши його частинами, прийдемо до зображення

$$B_\beta(\xi;t) = \frac{4\beta\pi \mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)} (G|\xi|)^{3/\beta} < m^{3/\beta} >, \quad t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^3, \beta > 3/2, \tag{11}$$

в якому

$$\mathrm{I}(\beta) := \begin{cases} \frac{\beta}{3-\beta} \Gamma(2 - 3/\beta) \cos \frac{(2-3/\beta)\pi}{2}, & \frac{3}{2} < \beta < 3, \\ \frac{\pi}{2}, & \beta = 3, \\ \Gamma(1 - 3/\beta) \sin \frac{(1-3/\beta)\pi}{2}, & \beta > 3 \end{cases}$$

(тут $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера).

Об'єднуючи рівності (8), (10) і (11), остаточно знаходимо, що

$$W_\beta^t(F) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi, F(t))} e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}} d\xi,$$

де

$$a_\beta(t) := \frac{4\beta\pi \mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)} G^{3/\beta} n(t) < m^{3/\beta} > .$$

Отже, правильне твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються всі припущення, зроблені в цьому пункті. Тоді для каждого* $\beta > 3/2$ *функция*

$$W_\beta^t(F) = \mathbb{F}^{-1}\Big[e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}} \Big](t;F), \tag{12}$$

є розподілом ймовірностей сили $F(t)$ *локального впливу рухомих об'єктів у системі з взаємодією, підпорядкованою степеневому закону* (5).

2 Зв'язок з псевдодиференціальним рівнянням

Порівнюючи рівності (4) і (12), замітимо подібність структури розподілу ймовірностей $W_\beta^t(\cdot)$ та фундаментального розв'язку $G_\alpha(\cdot)$ задачі Коші для ПДР (3). Ця подібність наштовхує на думку, що функція $W^t_\beta(\cdot)$ є розв'язком рівняння (3) при $\alpha = 3/\beta$ з відповідним коефіцієнтом b. Переконаємось у цьому.

Припустимо, що коефіцієнт локальної флуктуації $a_\beta(\cdot)$ на проміжку $(0;T]$ є додатним і неперервно диференційовним. Безпосередньо з [11] випливає, що для всіх $\beta > 3/2$ функція $W^t_\beta(x)$ на множені $(0;T]\times\mathbb{R}^3$ диференційовна за t і нескінченно диференційовна за змінною x, причому для її похідних виконуються оцінки:

$$|\partial^k_x W^t_\beta(x)| \le c_1 t(t^{\frac{\beta}{3}} + |x|)^{-(3+|k|+\frac{3}{\beta})}; \tag{13}$$

$$|\partial_t\partial^k_x W^t_\beta(x)| \le c_2 t^{\beta-1}(t^{\frac{\beta}{3}} + |x|)^{-(3+|k|+\frac{3}{\beta})},$$

з деякими додатними сталими c_1 і c_2.

Оцінка (13) забезпечує належність $W^t_\beta(\cdot)$ до класу Лебега $L_1(\mathbb{R}^3)$ при кажном фіксованому $t \in (0;T]$, що в свою чергу гарантує існування перетворення Фур'є функції $W^t_\beta(\cdot)$ та виконання при $t \in (0;T]$ і $\xi \in \mathbb{R}^3$ рівності

$$\mathbb{F}[W^t_\beta(x)](t;\xi) = e^{-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}}. \tag{14}$$

Зафіксуємо довільно $t \in (0;T]$ і для $\triangle t \ne 0$ розглянемо

$$W^{t+\triangle t}_\beta(x) - W^t_\beta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}}\Big(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} - 1\Big)d\xi. \tag{15}$$

Згідно з теоремою Лагранжа про скінченні прирости, маємо

$$a_\beta(t+\triangle t) - a_\beta(t) = a'_\beta(t+\theta\triangle t)\triangle t, \quad \theta \in (0;1).$$

Звідси, врахувавши неперервність $a'_\beta(\cdot)$, дістанемо покомпактну рівномірну збіжність:

$$\Big(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} - 1\Big)/\triangle t \underset{\triangle t\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}_0(R)}{\rightrightarrows}} - a'_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}} \quad (\forall R > 0). \tag{16}$$

Крім цього, скориставшись ще раз теоремою Лагранжа, знайдемо:

$$\Big|\Big(e^{-\big(a'_\beta(t+\theta\triangle t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}\big)\triangle t} - 1\Big)/\triangle t\Big| = \big|a'_\beta(t+\theta\triangle t)\big||\xi|^{\frac{3}{\beta}} e^{-a'_\beta(t+\theta\triangle t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}(\hat\theta\triangle t)} \le a|\xi|^{\frac{3}{\beta}} e^{a|\triangle t||\xi|^{\frac{3}{\beta}}},$$

$$\hat\theta \in (0;1), a := \sup_{t\in[0;T]}|a'_\beta(t)|.$$

Тоді для всіх $0 < |\triangle t| \le a_\beta(t)/(2a)$ і $\xi \in \mathbb{R}^3$ виконуються оцінки:

$$e^{-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}}\Big|\Big(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} - 1\Big)/\triangle t\Big| \le a|\xi|^{\frac{3}{\beta}} e^{-(a_\beta(t)-a|\triangle t|)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} \le$$

$$\le 4ae^{-\frac{a_\beta(t)}{4}|\xi|^{\frac{3}{\beta}}}\sup_{\rho>0}\{\rho e^{-\rho}\}. \tag{17}$$

Співвідношення (16) і (17) забезпечують правильність рівності

$$\lim_{\triangle t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}}\frac{e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} - 1}{\triangle t}d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}}\times$$

$$\times \lim_{\triangle t \to 0} \left\{ \frac{e^{-(a_\beta(t+\triangle t) - a_\beta(t))|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} - 1}{\triangle t} \right\} d\xi,$$

згідно з якою з (15) приходимо до

$$\partial_t W_\beta^t(x) = -\frac{a'_\beta(t)}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{\frac{3}{\beta}} e^{-i(x,\xi) - a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} d\xi, \quad t \in (0;T],\ \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Урахувавши тепер (14), остаточно знайдемо:

$$\partial_t W_\beta^t(x) = -a'_\beta(t) \mathbb{F}^{-1}\big[|\xi|^{\frac{3}{\beta}} \mathbb{F}[W_\beta^t](t;\xi)\big](t;x), \quad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Таким чином, розподіл $W_\beta^t(\cdot)$ при $\beta > 3/2$ є класичним розв'язком рівняння

$$\partial_t u(t;x) + a'_\beta(t) A_\alpha u(t;x) = 0, \quad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{18}$$

дробового порядку $\alpha = 3/\beta$.

Далі, з'ясуємо питання про існування граничного значення розподілу $W_\beta^t(\cdot)$ у точці $t = 0$. Спочатку розглянемо випадок $a_\beta(0) \neq 0$. Згідно з рівністю (14) та відомою формулою перетворення Фур'є згортки елементів класу $L_1(\mathbb{R}^3)$, маємо:

$$\mathbb{F}[W_\beta^t](t;\xi) = e^{-\int_0^t a'_\beta(\tau)d\tau |\xi|^\alpha} \cdot e^{-a_\beta(0)|\xi|^\alpha} = \mathbb{F}[\hat{G}_\alpha](t;\xi) \cdot \mathbb{F}[W_\beta^0](t;\xi) = \mathbb{F}[\hat{G}_\alpha * W_\beta^0](t;\xi),$$

або, що те саме,

$$W_\beta^t(x) = \big(\hat{G}_\alpha * W_\beta^0\big)(t;x), \quad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$\hat{G}_\alpha(t;\cdot) := \mathbb{F}^{-1}\left[e^{-\int_0^t a'_\beta(\tau)d\tau |\xi|^\alpha}\right](t;\cdot).$$

Для кожної неперервної обмеженої на $\mathbb{R}^3$ функції $\varphi(\cdot)$ виконується граничне співвідношення [11]

$$\big(\hat{G}_\alpha * \varphi\big)(t;\cdot) \underset{t \to +0}{\to} \varphi(\cdot). \tag{19}$$

Звідси, врахувавши нескінченну диференційовність та омеженість на $\mathbb{R}^3$ функції $W_\beta^0(\cdot)$, приходимо до виконання співвідношення

$$W_\beta^t(\cdot) \underset{t \to +0}{\to} W_\beta^0(\cdot). \tag{20}$$

Таким чином, розподіл $W_\beta^t(\cdot)$ – класичний розв'язок задачі Коші (18), (20).

Нехай тепер $a_\beta(0) = 0$, тоді

$$a_\beta(t) = \int\limits_0^t a'_\beta(\tau) d\tau, \quad t \in (0;T].$$

Звідси, згідно з (14), одержимо рівність

$$W_\beta^t(\cdot) = \hat{G}_\alpha(t;\cdot), \quad t \in (0;T]. \tag{21}$$

Співвідношення (19) характеризує властивість "δ-подібності" функції $\hat{G}_\alpha(t;\cdot)$ у просторі S' розподілів Шварца [23]:

$$\hat{G}_\alpha(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\to} \delta(\cdot) \tag{22}$$

(тут $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака). Тому при $a_\beta(0) = 0$ розподіл $W^t_\beta(\cdot)$ є розв'язком задачі Коші (18), (22), який у звичайному розумінні задовольняє рівняння (18), а початкову умову (22) – у сенсі слабкої збіжності в просторі S'.

Підсумуємо вищезазначене у вигляді наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай $\beta > 3/2$ і $a_\beta(\cdot)$ – додатна непрервно диференційовна функція на проміжку $[0;T]$, тоді розподіл ймовірностей $W^t_\beta(\cdot)$ на множині $(0;T]\times\mathbb{R}^3$ є класичним розв'язком задачі Коші* (18), (20) *при $a_\beta(0) \neq 0$. А у випадку $a_\beta(0) = 0$, $W^t_\beta(\cdot)$ – фундаментальний розв'язок цієї задачі для рівняння* (18).

Зауваження 1. Рівність (21) розкриває фізичний зміст фундаментального розв'язку задачі Коші для ПДР (18): $\hat{G}_\alpha$ – *первинний розподіл ймовірностей локального впливу на розглядуваний об'єкт з боку його рухомого оточення, який характеризує цей процес з самого початку його винекнення, тобто з того моменту, коли в оточенні об'єкта вперше з'явилися елементи локального впливу.*

Зауваження 2. *ПДР* (18) *перетворюється у класичне рівняння дифузії при $\beta = 3/2$. Проте значення $\beta = 3/2$ хоча і є граничним для інтервала $(3/2;+\infty)$ збіжності випадкових процесів локального впливу рухомих об'єктів, але цій множижні не належить. Це означає, що процес класичної дифузії відбувається за законами, які мають дещо іншу природу ніж закони випадкових завихрень локального впливу рухомих об'єктів, хоча вони гранично близькі.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] Petrowsky I. *Über das Cauchyche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen* Math. Sbornik 1937, **2**(5), 815–870.

[2] Shilov G.E. *On conditions of correctness of Cauchy's problem for systems of partial differential equations with constant coefficients* Uspekhi Mat. Nauk 1955, **10**(4), 89–100. (*Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами* Успехи мат. наук 1955, **10**(4), 89–100 (in Russian))

[3] Litovchenko V.A., Dovzhytska I.M. *Stabilization of solutions to Shilov-type parabolic systems with nonnegative genus* Siberian Mathematical Journal 2014, **55** 276—283. https://doi.org/10.1134/S0037446614020104

[4] Shirota T. *O Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients* Osaka Mathem. Journ. 1957, **8**(1), 43–59.

[5] Wiener N. *Differential space* J. Math. and Phys. 1923, **2**, 131–174.

[6] Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Amsterdam: Gordon and Breach, 1993.

[7] Uchaikin V.V.Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, 2013.

[8] Ya.M. Drin' and S.D. Eidelman *Necessary and sufficient conditions for stabilization of solutions of the Cauchy problem for parabolic pseudo-differential equations* In: Approximate Methods of Mathematical

Analysis, Kiev Gos. Ped. Inst. Kiev, 1974, 60–69. (*Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений* Приближенные методы математического анализа 1974, 60–69 (in Russian)).

[9] M.V. Fedoryuk *Asymptotic properties of Green's function of a parabolic pseudodifferential equation* Diff. Equations 1978, **14**, 923–927. *Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения* Дифф. уравн. 1978, **14**(7), 1296–1301 (in Russian)).

[10] A.N. Kochubei *Parabolic pseudodifferential equations, hypersingular integrals, and Markov processes* Math. USSR Izvestiya 1989, **33**, 233–259. (*Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы* Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988, **52**(5), 909–934 (in Russian)).

[11] Litovchenko V.A. *Cauchy problem with Riesz operator of fractional differentiation* Ukr. Math. J. 2005, **57**(12), 1936–1957. https://doi.org/10.1007/s11253-006-0040-6

[12] Litovchenko V.A. *The Cauchy problem for one class of parabolic pseudodifferential systems with nonsmooth symbols* Sib. Math. J. 2008, **49**, 300–316. https://doi.org/10.1007/s11202-008-0030-z

[13] Levy P. Calcul des probabilities. Gauthier–Villars et Cie, Paris, 1925.

[14] Zolotarev V.M. One-dimensional stable distributions. Nauka, Moscow, 1983. (Одномерные устойчивые распределения. Наука, Москва, 1983 (in Russian)).

[15] Mandelbrot B. *The Pareto-Levy law and the distribution of income* Internat. Econ. Rev. 1960, **1**, 79–106.

[16] Sobel'man I.I. An Introduction to the Theory of Atomic Spectra. In: International Series in Natural Philosophy, **40**, 1972. https://doi.org/10.1016/C2013-0-02394-8

[17] Kac M. Probability and Related Topics in Physical Sciences. Mir, Moscow, 1965. (Вероятность и смежные вопросы в физике. Мир, Москва, 1965 (in Russian)).

[18] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2, 2^{nd} Edition. Wiley Series in Probability and Statistic, 1991. https://www.wiley.com/en-us/9780471257097

[19] Nikiforov A.F., Novikov V.G., Uvarov V.B. Quantum-Statistical Models of Hot Dense Matter Methods for Computation Opacity and Equation of State. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2005. DOI https://doi.org/10.1007/b137687

[20] T.A. Agekyan Probability Theory for Astronomers and Physicists. Nauka, Moscow, 1974. (Теория вероятностей для астрономов и физиков. Наука, Москва, 1974 (in Russian)).

[21] Holtsmark J. Ü*ber die Verbreiterung von Spektrallinier* Annalen der Physik 1919, **58**, 577–630.

[22] Chandrasekhar S. *Stohastic problems in physics and astronomy* Reviews of modern Physics 1943, **15**(1), 1–89.

[23] Schwartz L. Theorie des distributions. **1**. Hermann, Paris, 1951.

Надійшло 23.11.2020

Litovchenko V.A. *On the nature of a classical pseudodifferential equation*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 83–92.

The work is devoted to the study of the general nature of one classical parabolic pseudodifferential equation with the operator M.Rice of fractional differentiation. At the corresponding values of the order of fractional differentiation, this equation is also known as the isotropic superdiffusion equation. It is a natural generalization of the classical diffusion equation. It is also known that the fundamental solution of the Cauchy problem for this equation is the density distribution of probabilities of stable symmetric random processes by P.Levy. The paper shows that the fundamental solution of this equation is the distribution of probabilities of the force of local influence of moving objects in a nonstationary gravitational field, in which the interaction between masses is subject to the corresponding potential of M.Rice. In this case, the classical case of Newton's gravity corresponds to the known nonstationary J.Holtsmark distribution.