Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 2, 71–82 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №2, 71–82

Клевчук І.І.

ДОСЛІДЖЕННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З РАЦІОНАЛЬНИМИ ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ

Досліджено поліноміальні і раціональні відображення, еквівалентні кусково-лінійним і такі, що мають інваріантну міру. Показано, що інваріантній множині деякого відображення відповідає множина цілих p-адичних чисел.

Ключові слова і фрази: різницеве рівняння, інваріантна міра, інваріантна множина, комутуючі раціональні відображення, p-адичні числа.

Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: *i.klevchuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Розглянемо неперервне відображення $y = f(x)$ відрізка $[a, b]$ в себе. За допомогою цього відображення можна задати різницеве рівняння $x_{i+1} = f(x_i)$. Нерухомою точкою цього відображення називається таке число x_0, що $f(x_0) = x_0$. Точка x_0 називається періодичною періоду m, якщо $f^m(x_0) = x_0$, $f^i(x_0) \neq x_0$ при $0 < i < m$. Якщо точка x_0 періодична періоду m, то кожна із точок $x_i = f^i(x_0)$, $1 \leq i \leq m-1$, також буде періодичною і точки x_0, x_1, $\ldots$, x_{m-1} утворюють періодичну траєкторію або цикл періоду m.

Ця стаття присвячена дослідженню деяких класів комутуючих відображень, що мають інваріантну міру на відрізку і еквівалентні кусково-лінійним. Аналогічні задачі було розглянуто в [6]. До дослідження інваріантних множин деяких відображень застосовано p-адичні числа. Комутуючі поліноми вивчалися Жюліа і Фату, а комутуючі раціональні функції Ріттом майже сто років назад [1, 2]. Ці результати було узагальнено на випадок відображень в n-вимірному просторі. При дослідженні універсальності Фейгенбаума [4, 8, 9] природно виникають p-адичні числа.

Розглянемо нелінійне відображення із зліченним числом циклів. Це відображення будемо задавати за допомогою деякого полінома Чебишова $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, де $n \geq 2$.

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 37E05, 37E20, 39A28.

© Клевчук І.І., 2020

Розглянемо функцію $H(x) = -\cos\dfrac{\pi(x+1)}{2}$. Ця функція гомеоморфно відображає відрізок $[-1,1]$ в себе. Обернене відображення має вигляд $H^{-1}(y) = 1 - \dfrac{2}{\pi}\arccos y, \quad y \in [-1;1]$.

За допомогою гомеоморфізму H можна побудувати кусково-лінійне відображення f_n, еквівалентне відображенню T_n $f_n(x) = H^{-1}(T_n(H(x)))$.

Значення функції $f_n(x)$ будуть періодично повторюватися на відрізку $[-1,1]$ з періодом $\dfrac{4}{n}$. Отже, графіком функції $f_n(x)$ буде кусково-лінійне зубчате відображення.

Оскільки відображення T_n і f_n спряжені, то спряжені (або еквівалентні) і динамічні системи, породжені цими відображеннями.

Знайдемо нерухомі точки відображення T_n із рівняння $T_n(x) = x$. Останнє рівняння перепишемо у вигляді $\cos(n\arccos x) - \cos\arccos x = 0$. Зобразивши різницю у вигляді добутку, одержимо $\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\arccos x\right)\sin\left(\dfrac{n-1}{2}\arccos x\right) = 0$.

Спочатку розв'яжемо рівняння

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}\arccos x\right) = 0. \tag{1}$$

Звідси одержимо $\dfrac{n+1}{2}\arccos x = r\pi, \quad x = \ cos\dfrac{2r\pi}{n+1}, \quad r \in \mathbb{Z}$. Але $0 \le \arccos x \le \pi$, тому $r \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right\}$.

Розв'яжемо рівняння

$$\sin\left(\frac{n-1}{2}\arccos x\right) = 0. \tag{2}$$

Звідси знаходимо $\dfrac{n-1}{2}\arccos x = l\pi, \quad x = \ cos\dfrac{2l\pi}{n+1}, \quad l \in \mathbb{Z}$. Умова $0 \le \dfrac{2l\pi}{n-1} \le \pi$ виконується, якщо $l \in \left\{0, 1, \ldots \left[\dfrac{n}{2} - 1\right]\right\}$. Значення $x = 1$ задовольняє рівняння (1) і (2), інші розв'язки цих рівнянь не збігаються.

Отже, ми знайшли n дійсних коренів рівняння $T_n(x) = x$ при $n \ge 2$. Розглянемо тепер різницеве рівняння $x_{i+1} = T_n(x_i)$. Ми визначили n нерухомих точок цього рівняння.

Відображення $x \to T_n(x)$ має зліченне число циклів. Поліном n-го степеня не може мати більше циклів періоду m, ніж поліном $T_n(x)$. У цьому унікальність поліномів Чебишова.

Відображення $x \to T_n(x)$ має інваріантну міру

$$\mu(dx) = dH^{-1}(x) = \frac{2dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \tag{3}$$

абсолютно неперервну відносно міри Лебега.

У загальному випадку дослідження поліноміальних відображень становить собою досить складну задачу. Тому далі будемо розглядати відображення

$$f(x) = \lambda x(1-x). \tag{4}$$

Для відображення (4) можна дослідити біфуркацію циклів при зміні параметра λ [4].

Функція (4) відображає при $0 < \lambda \leq 4$ відрізок $[0, 1]$ в себе.

Якщо $0 < \lambda \leq 1$, то на відрізку $[0, 1]$ є тільки одна нерухома точка $x = 0$ і вона притягуюча. При $\lambda > 1$ нерухома точка $x = 0$ стає відштовхуючою і появляється ще одна нерухома точка β_1. Якщо $1 < \lambda \leq 3$, то точка β_1 буде притягуючою. При переході параметра λ через значення $\lambda = 3$ відбувається нова біфуркація: нерухома точка $x = \beta_1$ із притягуючої перетворюється у відштовхуючу і від неї народжується притягуючий цикл періоду 2. При $\lambda > 1 + \sqrt{6}$ відбувається біфуркація народження циклу періоду 4 і т.д.

Відображенню (4) відповідає різницеве рівняння

$$y_{i+1} = \lambda y_i(1 - y_i). \tag{5}$$

Зробивши у рівнянні (5) лінійну заміну $y_i = \dfrac{x_i}{\lambda} + \dfrac{1}{2}$, одержимо рівняння $x_{i+1} = \dfrac{\lambda(\lambda - 2)}{4} - x_i^2$. Позначивши $4a = \lambda(\lambda - 2)$, запишемо останнє рівняння у вигляді

$$x_{i+1} = a - x_i^2. \tag{6}$$

Відзначимо, що при $\lambda = 4$ $(a = 2)$ відображення (4) еквівалентне поліному Чебишова $T_2(x) = 2x^2 - 1$. Крім того, до вигляду (5) або (6) зводиться рівняння з довільною квадратною нелінійністю в правій частині.

За допомогою громіздких обчислень можна знайти значення $a = \dfrac{7}{4}$, при якому відбувається біфуркація циклу періоду 3. Перевіримо це. Позначимо $f(x) = \dfrac{7}{4} - x^2$, тоді для періодичних точок періоду 3 маємо рівняння $f^3(x) - x = 0$, або $x^8 - 7x^6 + \dfrac{119}{8}x^4 - \dfrac{147}{16}x^2 + x - \dfrac{7}{256} = 0$. Щоб виключити нерухомі точки, розділимо ліву частину останнього рівняння на $x - f(x) = x^2 + x - \dfrac{7}{4}$. Тоді одержимо рівняння

$$x^6 - x^5 - \frac{17}{4}x^4 + \frac{10}{4}x^3 + \frac{79}{16}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{1}{64} = 0. \tag{7}$$

Рівняння (7) має кратні корені, тому зобразимо ліву частину цього рівняння у вигляді $(x^3 + bx^2 + cx + d)^2$.

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знаходимо $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = -\dfrac{9}{4}$, $d = \dfrac{1}{8}$. Отже, рівняння (7) еквівалентне рівнянню

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{8} = 0. \tag{8}$$

Рівняння (8) має корені $x_1 \approx 0,0538$, $x_2 \approx 1,747$, $x_3 \approx -1,302$, які утворюють цикл періоду 3 відображення $f(x)$. Позначимо через I_0 відкритий інтервал $I_0 = (-x_1, x_1)$. Легко переконатися (обчисленням на комп'ютері або безпосередньою перевіркою), що

$f^3 I_0 \subset I_0$, оскільки $f^3(0) \in I_0$. Точка x_0 є притягуючою нерухомою точкою відображення f^3 на інтервалі I_0. Для довільної точки $x_0 \in I_0$ виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} f^{3n}(x_0) = x_1.$$

Отже, ми маємо цикл інтервалів періоду 3 з центральним інтервалом I_0. Позначимо через I відрізок $I = [\overline{x}, -\overline{x}]$, де $\overline{x} < 0$ – нерухома точка відображення f. Множина $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} f^{-i} I_0$ складається з тих і тільки тих точок інтервала I, які притягуються циклом періоду 3. Оскільки $mes\ P = mesI$ [4], то цикл x_1, x_2, x_3 притягує майже всі точки із I. Множина $I \backslash P$ гомеоморфна множині Кантора.

Задача знаходження найпростіших відображень, еквівалентних кусково-лінійним відображенням, тісно пов'язана з задачею побудови всіх пар комутуючих раціональних функцій, тобто функцій f_1, f_2 таких, що $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$.

Жюліа і Фату довели, що комутуючими поліномами з точністю до лінійного спряження будуть тільки поліноми z^n, $T_n(x)$, $-T_n(x)$. У першому випадку множиною Жюліа буде одиничне коло $|z| = 1$, у двох інших – відрізок $[-1, 1]$.

Можна довести, що відображення $x \to -T_n(x)$ еквівалентне кусково-лінійному відображенню $x \to -f_n(x)$ з гомеоморфізмом $H(x)$. При парному n поліноми $T_n(x)$ та $-T_n(x)$ еквівалентні. Відображення $x \to -T_n(x)$ має інваріантну міру (3) і зліченне число циклів, які можна знайти наведеним вище методом.

Ріттом [1] було показано, що комутуючі раціональні відображення $f(x)$ степеня, більшого за 1, які не мають спільної ітерації, задовольняють співвідношення $\varphi(\alpha x + \beta) = f(\varphi(x))$, причому функція φ з точністю до дробово-лінійного перетворення може мати вигляд 1) $\varphi(x) = \exp x$; 2) $\varphi(x) = \cos x$; 3) $\varphi(x) = P(x, 1, \tau)$; 4) $\varphi(x) = P^2(x, 1, i)$; 5) $\varphi(x) = P'(x, 1, w)$; 6) $\varphi(x) = (P')^2(x, 1, w)$, де $P(x, w_1, w_2)$ – еліптична функція Вейєрштрасса з періодами w_1, w_2; $i = \sqrt{-1}$, $w = e^{\pi i/3}$, $\operatorname{Im} \tau > 0$.

Інше доведення наведено в [2]. Кожному випадку відповідають свої відображення $\Lambda(x) = \alpha x + \beta$. Наприклад, у випадку 1) маємо $\Lambda(x) = nx$, у випадку 2) $\Lambda(x) = nx$, $\Lambda(x) = nx + \dfrac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|n| > 1$. У випадках 3) – 6) множина Жюліа збігається із $\overline{\mathbb{C}}$.

Виділимо деякі комутуючі раціональні функції, які на відрізку дійсної осі будуть еквівалентними кусково-лінійним відображенням.

Визначимо функцію g співвідношенням $P(nx, 1, \tau) = g(P(x, 1, \tau))$, $\quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$. Еліптичну функцію Вейєрштрасса виразимо через еліптичний синус Якобі $P(x, 1, \tau) = e_3 + \dfrac{\lambda^2}{\operatorname{sn}^2(\lambda x)}$ [3], тоді одержимо $e_3 + \dfrac{\lambda^2}{\operatorname{sn}^2(n\lambda x)} = g\left(e_3 + \dfrac{\lambda^2}{\operatorname{sn}^2(\lambda x)}\right)$.

Функція

$$f(x) = \lambda^2 \left[g\left(e_3 + \frac{\lambda^2}{x}\right) - e_3 \right]^{-1}$$

еквівалентна функції $g(x)$ і задовольняє співвідношення $\operatorname{sn}^2(n\lambda x) = f(\operatorname{sn}^2(\lambda x))$. Така функція $f(x)$ не залежить від вибору сталої λ, тому виберемо замість λ повний еліптичний інтеграл

$$\lambda = K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

тоді

$$\mathrm{sn}^2(nKx) = f(\mathrm{sn}^2(Kx)). \tag{9}$$

Розглянемо так званий нормальний випадок, коли $0 < k < 1$. Тоді функція $H(x) = \mathrm{sn}^2(Kx)$ гомеоморфно відображає відрізок $[0,1]$ в себе. Обернена функція має вигляд

$$H^{-1}(x) = \frac{1}{K} \int\limits_0^{\arcsin\sqrt{x}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

Використовуючи (9), побудуємо функцію $r(x) = H^{-1}(f(H((x))) = H^{-1}\left(\mathrm{sn}^2(nKx)\right)$. Функція $r(x)$ є періодичною на відрізку $[0,1]$ з періодом $\dfrac{2}{n}$, тому графіком функції $r(x)$ буде кусково-лінійне зубчате відображення, еквівалентне розглянутому раніше $f_n(x)$.

Відображення $x \to f(x)$ має абсолютно неперервну інваріантну міру

$$\mu(dx) = dH^{-1}(x) = \frac{dx}{2K\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}.$$

Зауважимо, що аналітичний вираз для функції $f(x)$ можна одержати із теореми додавання. Так, при $n = 2$ знаходимо $f(x) = \dfrac{4x(1-x)(1-k^2x)}{(1-k^2x^2)^2}$.

Аналогічні властивості має відображення $x \to 1 - f(x)$.

Тепер визначимо функцію g співвідношенням $P^2(nx,1,i) = g(P^2(x,1,i))$. Функцію $P(x,1,i)$ виразимо через еліптичний синус $P(x,1,i) = -e_1 + \dfrac{2e_1}{\mathrm{sn}^2\sqrt{2e_1}x}$.

Позначимо $H(x) = \dfrac{e_1^2}{P^2(x,1,i)}$, $\quad f(x) = \dfrac{e_1^2}{g(e_1^2/x)}$, тоді функція $f(x)$ задовольняє співвідношення $H(nx) = f(H(x))$. Виберемо $2e_1 = K^2$, де

$$K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-0,5\sin^2\psi}}.$$

Тоді функція $H(x)$ гомеоморфно відображає відрізок $[0,1]$ в себе. Функція $f(x)$ еквівалентна кусково-лінійному зубчатому відображенню $r(x) = H^{-1}(f(H(x)))$.

За допомогою $H(x)$ можна визначити цикли відображення $x \to f(x)$. Це відображення має абсолютно неперервну інваріантну міру $\mu(dx) = dH^{-1}(x) = \dfrac{dx}{2\sqrt{2}Kx^{3/4}\sqrt{1-x}}$.

При $n = 2$ функція $f(x)$ має вигляд $f(x) = \dfrac{16x(x-1)^2}{(x+1)^4}$.

Відображення (4) відноситься до класу унімодальних відображень. Викладемо методи символічної динаміки для таких відображень.

Нехай $f\colon I \to I$ – унімодальне відображення, $I = I_1 \cup I_2$, на інтервалі I_1 функція $f(x)$ монотонно зростає, на інтервалі I_2 – монотонно спадає, c – точка екстремуму.

Визначимо адресу точки $x \in I$:

$$A(x) = \begin{cases} I_s, & x \in I_s, x \neq c, \\ c, & x = c. \end{cases}$$

Маршрут – це послідовність адрес $A_f(x) = (A_0, A_1, A_2, \ldots)$, де $A_0 = A(x)$, $A_k = A(f^k(x))$, $k \geq 1$. Операцію зсуву σ на просторі односторонніх послідовностей $(A_0, A_1, A_2, \ldots)$ визначимо рівністю $\sigma(A_0, A_1, A_2, \ldots) = (A_1, A_2, \ldots)$. Відображення f і зсув σ зв'язані рівністю $\sigma(A_f(x)) = A_f(f(x))$.

При побудові символічної динаміки корисно враховувати не тільки адреси $A(f^n(x))$, але і зміну орієнтації [4].

Поставимо у відповідність інтервалам I_s знаки $\varepsilon(I_1) = +1$, $\varepsilon(I_2) = -1$, $\varepsilon(c) = 0$. Разом з маршрутом $A_f(x) = (A_0, A_1, A_2, \ldots)$ розглянемо послідовність $\theta_f(x) = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots)$, де $\theta_0 = \varepsilon_0$, $\theta_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1$, $\ldots$, $\theta_n = \varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, $\varepsilon_i = \varepsilon(A_i)$. Знак $\varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$ відповідає локальній поведінці f^n в околі точки x, а саме рівний $+1$, -1, або 0, якщо f^n відповідно зростає, спадає, або має екстремум в точці x.

Можна довести, що відображення $x \to \theta_f(x)$ є монотонним.

Із монотонності випливає, що в кожній точці x існує границя справа $\theta_f(x^+)$ і зліва $\theta_f(x^-)$.

Нехай σ – зсув на множині Σ односторонніх послідовностей з алфавітом $\{-1, 1\}$. Для $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \Sigma$ і $\beta_0 \in \{-1, 1\}$ визначимо $\beta_0\alpha = (\beta_0\alpha_0, \beta_0\alpha_1, \beta_0\alpha_2, \ldots)$. Тоді $\sigma(\theta_f(x)) = \theta_0(x)\theta_f(f(x))$.

Позначимо $C = \bigcup\limits_{i\geq 0} f^{-i}(c)$, $\quad \Sigma' = \theta_f(x)|x \in I \backslash C$. Тоді множина Σ' буде інваріантною відносно перетворення $\sigma' : (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots) \to \theta_0(\theta_1, \theta_2, \ldots)$.

Дамо опис теорії інваріантів перемішування (теорії нідінгів [4]) у зміненій формі.

Для цього символам $\theta_i = +1$ поставимо у відповідність символи $\theta_i = 0$, а символам $\theta_i = -1$ поставимо у відповідність $\theta_i = 1$. Тоді послідовності $\theta_f(x)$ буде відповідати запис деякого числа у двійковій системі числення $x = \theta_0 2^{-1} + \theta_1 2^{-2} + \theta_2 2^{-3} + \ldots$, а перетворенню σ' буде відповідати відображення

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ 2(1-2x), & x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \tag{10}$$

Відзначимо, що відображення $g(x)$ еквівалентне функції $f_2(x)$, а також другому поліному Чебишова $T_2(x)$.

Послідовності $\theta_f(c^-)$ відповідає деяке число $\nu \leq \dfrac{1}{2}$. Деякі значення $\theta_f(y)$ є неприпустимими для функції $f(y)$. Відповідно, для функції $g(x)$ будуть неприпустимими значення $x \in (\nu, 1-\nu)$, а також всі значення x, такі, що $g^n(x) \in (\nu, 1-\nu)$ при деякому $n \geq 0$.

Позначимо $M = \bigcup\limits_{n\geq 0} g^{-n}(\nu, 1-\nu)$, тоді всі значення $x \in [0,1]\backslash M$ є припустимими. Число ν також може набувати не всіх значень.

Назвемо g – припустимим число ν, для якого при всіх $n \geq 0$ виконується нерівність

$$\left| g^n(\nu) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2} - \nu.$$

Зобразимо число x у двійковій системі числення $x = 0, x_1x_2x_3\ldots$, де $x_i = 0$ або 1 і перепишемо відображення (10) у вигляді

$$g(x) = \begin{cases} 0, x_2x_3\ldots x_i\ldots, & x_1 = 0, \\ \\ 0, \bar{x}_2\bar{x}_3\ldots\bar{x}_i\ldots, & x_1 = 1, \end{cases}$$

де $\bar{x}_i = 1 - x_i$.

Структура множини припустимих послідовностей (припустимих чисел) була досліджена Джонкером і Рендом [4].

Розглянемо раціональне число β, $0 \leq \beta \leq \dfrac{1}{2}$, яке у двійковій системі числення $\beta = 0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_m\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_m\ldots$ має мінімальний період m і позначимо

$$\beta^{(1)} = 0, \beta_1\beta_2\ldots\beta_m\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\ldots\bar{\beta}_m\beta_1\beta_2\ldots\beta_m\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\ldots\bar{\beta}_m\ldots.$$

Число β будемо називати періодичним періоду m, число $\beta^{(1)}$ – антиперіодичним періоду m. При $n > 1$ визначимо індуктивно число $\beta^{(n)} = (\beta^{(n-1)})^{(1)}$. Його період рівний $m2^n$.

Кожне періодичне число α є припустимим тоді і тільки тоді, коли $\alpha^{(1)}$ припустиме. Якщо для деякого періодичного α виконується нерівність $\alpha < \beta < \alpha^{(1)}$, то β не є припустимим.

Позначимо через $\mu(k)$ припустиме число, що є мінімальним серед g-припустимих періодичних чисел періоду k.

Виконуються нерівності

$$\begin{gathered} \mu(1) < \mu(2) < \mu(4) < \ldots \mu(2^n) < \ldots < \mu(2^n \cdot 7) < \mu(2^n \cdot 5) < \mu(2^n \cdot 3) < \\ < \ldots < \mu(2 \cdot 7) < \mu(2 \cdot 5) < \mu(2 \cdot 3) < \ldots < \mu(7) < \mu(5) < \mu(3). \end{gathered} \tag{11}$$

Випишемо числа $\mu(2^n)$: $\mu(1) = 0,000\ldots$, $\quad \mu(2) = 0,010101\ldots$,
$\mu(2^2) = 0,011001100110\ldots$, $\mu(2^\infty) = 0,0110100110010110\ldots$.

Визначимо вигляд чисел $\mu(2^nk)$. Нехай $k = 2i+3$, $i \geq 0$. Тоді число $\mu(2^nk)$ утворюється періодичним повторенням скінченного ланцюжка $\alpha(2^nk)$ довжиною 2^nk. При $n = 0$ маємо $\alpha(k) = \alpha(2i+3) = (0110101\ldots01)$, де пара (01) повторюється i раз. При $n \geq 1$ маємо $\alpha(2^nk) = \alpha(2^{n-1}k)\cdot(01)$, де права частина означає ланцюжок, утворений із ланцюжка $\alpha(2^{n-1}k)$ заміною кожної цифри 0 на 01, а цифри 1 на 10.

Згідно з [4] унімодальне відображення, порядок росту якого $s(f)$ більший 1, напівспряжене з кусково-лінійним відображенням

$$F_s(x) = \begin{cases} sx, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ \\ s - sx, & x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

де $1 < s \leq 2$. Точніше, існує монотонне неперервне відображення $\lambda\colon [0,1] \to [0,1]$ таке, що $F_s(\lambda(x)) = \lambda(f(x))$ для всіх $x \in [0,1]$.

Розглянемо диференційовне відображення $f\colon [0,1] \to [0,1]$ таке, що $f(c) = 1$. Тоді f буде еквівалентним $F_2(x)$ або другому поліному Чебишова $T_2(x)$. Нехай функція $\lambda(x)$ диференційовна на інтервалі $(0,1)$. Тоді для нерухомої точки $x_0 \in (0,1)$ функції $f(x)$ виконується рівність $f'(x_0) = -2$. Аналогічно, якщо x_0 – періодична точка періоду m, то диференціюючи рівність $F_2^m(\lambda(x)) = \lambda(f^m(x))$ в точці $x = x_0$, одержимо

$$f'(x_0)f'(x_1)\ldots f'(x_{m-1}) = (-1)^k 2^m, \tag{12}$$

де $x_i = f^i(x_0)$, $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, k – кількість точок циклу, що належать інтервалу I_2. Оскільки періодичні точки такого відображення $f(x)$ розміщені на інтервалі $[0,1]$ всюди щільно, то рівність (12) накладає сильні обмеження на функцію $f(x)$.

Тому функція $\lambda(x)$ така, що $F_2(\lambda(x)) = \lambda(f(x))$ може бути недиференційовною в періодичних точках. Внаслідок цього ускладнюється побудова функції $\lambda(x)$. Оскільки функція $\lambda(x)$ монотонна, то згідно з теоремою Лебега множина точок розриву її похідної має нульову міру Лебега [5].

Знайдемо значення s, при яких відбувається біфуркація циклів відображення F_s періоду k у відповідності з порядком (11). Одна із точок циклу буде збігатися з точкою $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Ітерації точки x_0 будуть попадати на інтервали $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ і $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ у тому ж порядку, що й ітерації точки $\mu(k)$ під дією відображення g.

Тому найменше значення s, при якому існує цикл періоду $k = 2i + 3$, задовольняє рівняння

$$s^{k-1} - s^{k-2} - s^{k-3} + s^{k-4} - s^{k-5} + \ldots + s - 1 = 0. \tag{13}$$

Відзначимо, що знаки коефіцієнтів рівняння (13) чергуються в тому ж порядку, що й цифри 0 і 1 у запису ланцюжка $\alpha(k)$. Рівняння (13) має єдиний розв'язок на інтервалі $(1; 2)$.

Аналогічно можна показати, що біфуркація циклу періоду $m = 2k$, $k = 2i + 3$, відбувається при значенні $s = r$, що задовольняє рівняння

$$(r-1)(r^{2k-2} - r^{2k-4} - r^{2k-6} + r^{2k-8} - r^{2k-10} + \ldots + r^2 - 1) = 0. \tag{14}$$

Зауважимо, що між розв'язком $r \in (1,2)$ рівняння (14) і розв'язком $s \in (1,2)$ рівняння (13) існує простий зв'язок $r = \sqrt{s}$.

Біфуркація циклу періоду $m = 2^n k$, $k = 2i+3$, відбувається при $s = r$, що задовольняє рівняння

$$\begin{gathered}(r-1)(r^2-1)\ldots(r^{2^{n-1}}-1)(r^{2^n(k-1)} - r^{2^n(k-2)} - \\ - r^{2^n(k-3)} + r^{2^n(k-4)} - r^{2^n(k-5)} + \ldots + r^{2^n} - 1) = 0.\end{gathered} \tag{15}$$

При менших значеннях s відображення F_s не має циклів періоду m. Тут зберігається відповідність між коефіцієнтами рівняння (15) і ланцюжком $\alpha(2^n k)$. Розв'язок $r \in (1; 2)$ рівняння (15) можна виразити через розв'язок $s \in (1; 2)$ рівняння (13) за формулою $r = s^{2^{-n}}$. При $s = 2^{2^{-n}}$, $\quad n > 1$, відображення F_s має цикл інтервалів періоду 2^{n-1}.

Для відображення F_s, використовуючи методи символічної динаміки, можна явно виписати всі цикли.

Відзначимо, що $\nu(F_s)$ набуває не всіх припустимих значень. Наприклад, при всіх s маємо $\nu(F_s) \neq \nu^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, де $\nu^{(k)}$ – антиперіодичне число для деякого $\nu \in P'$. Для квадратного відображення (4) або відображення

$$f(x) = a - x^2 \tag{16}$$

$\nu(f)$ буде набувати всіх припустимих значень.

Становить інтерес вивчення відображення (16) при $a = a^* = 1,40155\ldots$. У цьому випадку відображення (16) має цикли періодів усіх степенів двійки і не має циклів інших періодів. При збільшенні a до значення a^* відбуваються біфуркації подвоєння, для яких справджується універсальність Фейгенбаума [8].

При дослідженні унімодальних відображень природним чином виникають p-адичні числа [7]. Наприклад, для відображення (16) при $a = a^*$ виникають 2-адичні числа. Дамо деякі означення p-адичних чисел.

Нехай p – деяке просте число. Для довільного ненульового цілого числа a позначимо через $ord_p a$ кратність входження p у розклад a на прості множники, тобто найбільше ціле невід'ємне число m, для якого $a \equiv 0(mod\, p^m)$. Для довільного раціонального числа $x = \dfrac{a}{b}$ позначимо $ord_p x = ord_p a - ord_p b$.

Визначимо на полі $\mathbb{Q}$ раціональних чисел p-адичну норму

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-ord_p x}, & x \neq 0, \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Норма (17) є неархімедовою.

За допомогою норми (17) можна поповнити поле $\mathbb{Q}$ до поля $\mathbb{Q}_p$ p-адичних чисел, приєднавши до раціональних чисел їх всеможливі границі за нормою (17). Тоді кожне p-адичне число можна записати у вигляді $x = b_{-m}p^{-m} + \cdots + b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots$, де числа b_k, $k \in \{-m, -m+1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots\}$, $m \in \mathbb{Z}$, можуть набувати значень 0, 1, 2, …, $p - 1$. Якщо $b_{-m} \neq 0$, то $|x|_p = p^m$. Нехай $\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p \,\big|\, |a|_p \leq 1\}$. Елементи $b \in \mathbb{Z}_p$ називаються цілими p-адичними числами і можуть бути розкладені в ряд

$$b = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots. \tag{18}$$

Над полем $\mathbb{Q}_p$ природним чином визначаються математичні операції. Наприклад, при додаванні двох цілих p-адичних чисел вигляду (18) треба додати їх i-ті розряди, а одиницю переповнення перенести в $(i+1)$-й розряд.

Відображення (16) при $a = a^*$ набуде вигляду

$$f(x) = a^* - x^2. \tag{19}$$

Позначимо $k = 2^n$, $x_n = f^k(0)$, $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Відображення (19) має цикл інтервалів періоду 2^n, $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ з центральним інтервалом $I_{x_n, x_{n+1}}$, де $I_{x,y}$ рівний $[x, y]$, якщо $x < y$ і $[y,x]$, якщо $x > y$. Наприклад, цикл інтервалів періоду 1 $\{[f^2(0), f(0)]\}$ складається з одного інваріантного інтервала. Цикл інтервалів періоду 2 $\{[f^2(0), f^4(0)], [f^3(0), f(0)]\}$ складається з двох інтервалів, які одержуються, якщо з інтервала $[f^2(0), f(0)]$ викинути інтервал $(f^4(0), f^3(0))$. Цикл інтервалів періоду 4 $\{[f^8(0), f^4(0)], [f^5(0), f(0)], [f^2(0), f^6(0)], [f^3(0), f^7(0)]\}$ одержимо, якщо із інтервала $[f^2(0), f^4(0)]$ викинути інтервал $(f^6(0), f^8(0))$, а із інтервала $[f^3(0), f(0)]$ викинути інтервал $(f^7(0), f^5(0))$. Цю процедуру можна продовжувати до нескінченності. У границі одержимо деяку множину Φ, гомеоморфну стандартній множині Кантора. Ця множина Φ а також цикли періодів 2^n, $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ є інваріантними множинами відображення (19).

Кожному цілому 2-адичному числу

$$k = k_0 + 2k_1 + 2^2 k_2 + \ldots, \tag{20}$$

де $k_i \in \{0, 1\}$, можна поставити у відповідність деякий елемент $x \in \Phi$. Якщо $k_n = 0$ при $n \geq n_0$, то число k буде цілим раціональним числом і йому відповідає елемент $f^k(0) \in \Phi$. Якщо ряд (20) нескінченний, то k можна наблизити в 2-адичній нормі цілими раціональними числами $m_n = k_0 + 2k_1 + \ldots + 2^n k_n$ і вважати, що k відповідає дійсне число $x = \lim\limits_{n\to\infty} f^{m_n}(0)$. Остання границя існує, причому $x \in \Phi$. Відповідність між цілими 2-адичними числами і $x \in \Phi$ є взаємно однозначною.

Відображенню (19) на множині Φ відповідає відображення $h(k) = k + 1$ на множині $\mathbb{Z}_2$ цілих 2-адичних чисел. Відображення h є гомеоморфізмом на множині $\mathbb{Z}_2$, обернене відображення має вигляд $h^{-1}(k) = k - 1$.

Відповідність між деякою інваріантною множиною відображення (16) і множиною $\mathbb{Z}_2$ можна одержати також і при інших значеннях параметра a.

Розглянемо функціональне рівняння

$$f^p(ax) = af(x), \tag{21}$$

де $x \in [-1, 1]$, $f(0) = 1$. В [8, 4] доведено існування унімодального, парного, аналітичного на $[-1, 1]$ розв'язку, причому $a \in (-1, 0)$.

Встановимо деякі властивості розв'язку $f(x)$ рівняння (21).

Лема. *При всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність*

$$f^{pn}(0) = af^n(0). \tag{22}$$

Для доведення використаємо індукцію відносно n. Підставивши в (21) $x = 0$ одержимо $f^p(0) = af(0) = a$. Нехай рівність (22) виконується при $n = k$. Тоді із рівняння (21) знаходимо $f^p(af^k(0)) = af^{k+1}(0)$ або $f^{p(k+1)}(0) = af^{k+1}(0)$. Лема доведена.

Якщо $x_0 \in (0, 1)$ – нерухома точка відображення $x \to f(x)$, то згідно з (21) одержимо $f^p(ax_0) = af(x_0) = ax_0$, а також $f^{p^n}(a^n x_0) = a^n x_0, \quad n \geq 1$, тобто $a^n x_0$ є періодичною точкою відображення $x \to f(x)$ періоду p^n.

Зауважимо, що $f^2(0) < 0$. Справді, якщо $f^2(0) \geq 0$, то $f^k(0) \geq 0$ при всіх $k \geq 1$. Це суперечить нерівності $f^p(0) = a < 0$.

Позначимо через $I_{x,y}$ відрізок $[x, y]$, якщо $x < y$, або відрізок $[y, x]$, якщо $y < x$. Доведемо, що функція $f(x)$ має цикл інтервалів періоду p з центральним інтервалом

$J^{(p)} = I_{f_o^p, f_0^{2p}}$, де $f_0^k = f^k(0)$. Справді, $f_0^p = a < 0$, $f_0^{2p} = af_0^2 > 0$, тому $0 \in J^{(p)}$. Під дією відображення $f(x)$ центральний інтервал $J^{(p)}$ буде послідовно переходити в інтервали $I_{f_0^1, f_0^{p+1}}, \ldots, I_{f_0^{p-1}, f_0^{2p-1}}$.

Аналогічно можна показати, що існує цикл інтервалів періоду p^n, $n \geq 1$, з центральним інтервалом

$$J^{(p^n)} = I_{f_0^{p^n}, f_0^{2p^n}}.$$

Позначимо через A_{p^n} об'єднання інтервалів, що належать циклу інтервалів періоду p^n. Множина

$$\Phi = \bigcap_{n \geq 1} A_{p^n}$$

має структуру множини Кантора. На множині Φ функція $f(x)$ є взаємно однозначною.

Теорема. *Існує гомеоморфізм $H\colon \mathbb{Z}_p \to \Phi$. При цьому*

$$H(b+1) = f(H(b)), \quad H(b-1) = f^{-1}(H(b)), \tag{23}$$

$$H(pb) = aH(b), \tag{24}$$

де $b \in \mathbb{Z}_p$.

Доведення. Для цілого раціонального числа $k = k_0 + k_1 p + \cdots + k_n p^n$, $\quad 0 \leq k_i \leq p-1$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, підставимо $H(k) = f^k(0) \in \Phi$. Нехай $|r - k|_p \leq p^{-m}$, $r \in \mathbb{N}$, тобто $r = k + p^m l$, де $l \in \mathbb{N}$. Тоді одержимо $f^r(0) = f^k(a^m f^l(0))$. Оскільки $\lim\limits_{m \to \infty} a^m f^l(0) = 0$, то відхилення $|f^r(0) - f^k(0)|$ може бути зроблене як завгодно малим при $m \to \infty$. Якщо ряд (18) нескінченний, то b можна наблизити в p-адичній нормі цілим раціональним числом $k_n = b_0 + b_1 p + \cdots + b_n p^n$ і вважати, що $H(b) = \lim\limits_{n \to \infty} f^{k_n}(0)$.

Рівності (23) для $b \in \mathbb{N}$ очевидні, для $b \in \mathbb{Z}_p$ випливають із неперервності. Тотожність (24) випливає із леми і з неперервності. Теорема доведена.

Нехай відображення $g(x)$ еквівалентне розв'язку $f(x)$ рівняння (21). Тоді інваріантній множині відображення $g(x)$ також відповідає множина цілих p-адичних чисел. Наприклад, твердження теореми правильні для відображення $x \to a - x^2$ при відповідних значеннях параметра a. При цьому рівність (24) виконується наближено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ritt J.F.* Permutable rational functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1923. – **23**. – P. 399 – 448.

2. *Eremenko A.E.* On some functional equations connected with iteration of rational function // Leningrad. Math. J. – 1990. – **1**, No. 4. – P. 905 – 919.

3. *Whittaker E.T., Watson G.N.* A Course of Modern Analysis. – Cambridge: Cambridge University Press, 2020. – 595 p.

4. *Sharkovsky A.N., Kolyada S.F., Sivak A.G., Fedorenko V.V.* Dynamics of One-Dimensional Maps. – Amsterdam: Springer, 2013. – 261 p.

5. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. – Moscow: Nauka, 1987. – 544 p.

6. *Klevchuk I.I.* Investigation of difference equations with rational right-hand sides // Nonlinear differential equations and their applications: Collection of scientific works – K.: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 1992. – P. 27 – 40.

7. *Koblitz N.* p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions. – Salisbury: Springer, 2012. – 147 p.

8. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. – 1978. – **19**. – P. 25 – 52.

9. *Sharkovsky A.N., Maistrenko Yu.L., Romanenko E.Yu.* Difference equations and their applications. – Dordrecht: Springer, 2012. – 357 p.

Надійшло 08.12.2020

Klevchuk I.I. *Investigation of difference equations with a rational right-hand sides*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 71–82.

The aim of the present article is to investigate of some properties of solutions of nonlinear difference equations. A period doubling bifurcation in a discrete dynamical system leads to the appearance of deterministic chaos. We use permutable rational functions for study of some classes of one-dimensional mappings. Also n-dimensional generalizations of permutable polynomials may be obtained. We investigate polynomial and rational mappings with invariant measure and construct equivalent piecewise linear mappings. These mappings have countably many cycles. We applied the methods of symbolic dynamics to the theory of unimodal mappings. We use whole p-adic numbers for study the invariant set of some mapping in the theory of universal properties of one-parameter families. Feigenbaum constants play an important role in this theory.