Івасишен С.Д., Коренюк Н. І.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПІВПРОСТОРОВИХ ОДНОРІДНИХ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ ТА НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

Розглядаються розв'язки однорідного модельного рівняння типу Фоккера–Планка–Колмогорова нормального марковського процесу, які визначені в області $\{(t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | 0 < t \le T, -\infty < x_j < \infty, j \in \{1, \dots, n-1\}, x_n > 0\}$, при $x_n = 0$ задовольняють однорідні умови Діріхле або Неймана і належать до спеціальних вагових L_p-просторів Лебега. Установлюються зображення таких розв'язків у вигляді інтегралів Пуассона, ядрами яких є однорідні функції Ґріна.

Ключові слова і фрази: параболічне рівняння зі зростаючими коефіцієнтами, півпросторова задача Діріхле, півпросторова задача Неймана, однорідна функція Ґріна, ваговий L_p-простір, інтегральне зображення розв'язків.

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна
e-mail: *ivasyshen.sd@gmail.com, nataturchina@gmail.com*

Вступ

Рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова нормальних марковських процесів є параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти є сталими [3] (с. 177–179). До такого типу належить рівняння

$$(Lu)(t,x) := \partial_t u(t,x) - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l}u(t,x) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j \partial_{x_j} u(t,x) - a_0 u(t,x) -$$

$$-b\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u(t,x)) = f(t,x), t > 0, x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

в якому a_{jl}, a_j, a_0 і b – задані дійсні числа, причому $b \neq 0$, а матриця $A_0 := (a_{jl})_{j,l=1}^n$ симетрична та додатно визначена.

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K20.

© Івасишен С.Д., Коренюк Н. І., 2020

У праці [1] для рівняння (1) наведено результати дослідження фундаментального розв'язку, коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші. Статті [4, 5] присвячені побудові та дослідженню властивостей вектор-функції Ґріна півпросторових крайових задач Діріхле і Неймана для рівняння (1). У праці [2] ці результати застосовуються до повного описання певних класів розв'язків таких однорідних задач для частинного випадку рівняння (1), а саме коли $a_{jl} = a^2\delta_{j,l}, a_j = 0$, де $a \neq 0$ і $\delta_{j,l}$ – символ Кронекера. Зокрема, в [2] сформульовано без доведення теорему про інтегральне зображення розв'язків цього частинного випадку рівняння (1).

У даній статті наводиться з повним доведенням теорема про інтегральне зображення розв'язків однорідного рівняння (1), які належать до досить широких вагових просторів функцій і задовольняють однорідні умови Діріхле або Неймана.

1 Постановка задач і допоміжні відомості

Користуватимемося такими позначеннями: $\mathbb{Z}_+^n$ – сукупність усіх n-вимірних мультиіндексів $k := (k_1, \ldots, k_n)$; $|k| := k_1 + \cdots + k_n$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$; $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x' := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, де, як звичайно, $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний дійсний евклідовий простір, n – задане натуральне число; $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$, $\mathbb{R}_0^n := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0$; $\Pi_H^+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \in H, x \in \mathbb{R}_+^n\}$, $\Pi'_H := \{(t, x') \in \mathbb{R}^n | t \in H, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}^1$; $\partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$ і $x \in \mathbb{R}^n$, де $\partial_y^l := \frac{\partial^l}{\partial y^l}$, l – натуральне число, $y \in \mathbb{R}^1$; $q(t) := \frac{1}{2b}(e^{2bt} - 1)$, $E_c(t, x, \xi) := \exp\{-c(q(t))^{-1}|e^{bt}x - \xi|\}, t > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n, c > 0$, де b – коефіцієнт з рівняння (1).

Нехай Ω – область в $\mathbb{R}^n$ з межею S, $\vec{\nu}(y)$ – орт зовнішньої стосовно Ω нормалі до S у точці $y \in S$, $\nu_j(y), j \in \{1, \ldots, n\}$, – координати вектора $\vec{\nu}(y)$. Як відомо [5], конормаллю для рівняння (1), коефіцієнти групи старших членів якого утворюють матрицю A_0, у точці $y \in S$ називається вектор

$$\vec{\nu}_{A_0}(y) := \left(\sum_{j=1}^n a_{j1}\nu_j(y), \ldots, \sum_{j=1}^n a_{jn}\nu_j(y) \right), \tag{2}$$

а конормальною похідною у точці $y \in S$ від функції $u(t, x), t > 0, x \in \Omega$, називається функція

$$\partial_{\vec{\nu}_{A_0}(y)} u(t, x) := \sum_{j,l=1}^n a_{jl}\nu_j(y)\partial_{x_l} u(t, x), t > 0, x \in \Omega. \tag{3}$$

Якщо $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, то $S = \mathbb{R}_0^n$ і для будь-якого $y \in \mathbb{R}_0^n$ $\nu_j(y) = 0, j \in \{1, \ldots, n-1\}, \nu_n(y) = -1$. Тоді формули (2) і (3) набувають відповідно вигляду

$$\vec{\nu}_{A_0}(y) = (-a_{n1}, \ldots, -a_{nn}), y \in \mathbb{R}_0^n,$$

і

$$\partial_{\vec{\nu}_{A_0}(y)} u(t, x) := -\sum_{l=1}^n a_{nl}\partial_{x_l} u(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_0^n.$$

Нехай L – диференціальний вираз з (1), а L^* – відповідний йому спряжений вираз, тобто вираз

$$(L^*v)(\tau,\xi) := -\partial_\tau v(\tau,\xi) - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l} v(\tau,\xi) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\partial_{\xi_j} v(\tau,\xi) - a_0 v(\tau,\xi) +$$
$$+ b\sum_{j=1}^{n} \xi_j \partial_{\xi_j} v(\tau,\xi). \quad (4)$$

Правильною є така дивергентна рівність:

$$(vLu - uL^*v)(\tau,\xi) = \partial_\tau(uv)(\tau,\xi) - \sum_{j=1}^{n}\partial_{\xi_j}\sum_{l=1}^{n} a_{jl}(v\partial_{\xi_l}u - u\partial_{\xi_j}v)(\tau,\xi) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n-1}\partial_{\xi_j}(a_j uv)(\tau,\xi) - b\sum_{j=1}^{n}\partial_{\xi_j}(\xi_j uv)(\tau,\xi). \quad (5)$$

Зінтегрувавши рівність (5) за $\tau \in (t_1,t_2), t_1 < t_2$, і за $\xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^n_+$, для підходящих функцій u і v отримаємо формулу Ґріна–Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{\Omega} (vLu - uL^*v)(\tau,\xi)d\xi = \int_{\Omega} (uv)|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} d\xi -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{S} \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(v\partial_{\xi_l}u - u\partial_{\xi_j}v)(\tau,\xi)\nu_j d_\xi S -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{S} \sum_{j=1}^{n-1}(a_j uv)(\tau,\xi)\nu_j d_\xi S - b\int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{S} \sum_{j=1}^{n} \xi_j (uv)(\tau,\xi)\nu_j d_\xi S. \quad (6)$$

Розглядатимемо такі крайові задачі:

$$(Lu)(t,x) = 0, (t,x) \in \Pi^+_{(0,T]}, \quad (7)$$
$$(B^{(l)}u)(t,x)|_{x_n=0} = 0, (t,x') \in \Pi'_{(0,T]}, \quad (8_l)$$
$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n_+, \quad (9)$$

в яких T – задане додатне число, $l \in \{1,2\}, B^{(1)} = 1$ ((8_1) умова Діріхле) і $B^{(2)} = \partial_{\vec{\nu}_{A_0}}$ ((8_2) умова Неймана).

Для задач (7), (8_l), (9), у статті [5] побудовано однорідні функції Ґріна, тобто такі функції $G_0^{(l)}$, що для довільних гладких і фінітни функцій φ розв'язки цих задач зображуються у вигляді

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, (t,x) \in \Pi^+_{(0,T]}. \quad (10)$$

Для функцій $G_0^{(l)}$ встановлено оцінки

$$|\partial_x^k \partial_\xi^r G_0^{(l)}(t,x,\xi)| \leq C_{kr}(q(t))^{-(n+|k|+|r|)/2} E_c(t,x,\xi),$$
$$0 < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+^n, \qquad (11)$$

в яких k і r – довільні мультиіндекси з $\mathbb{Z}_+^n, l \in \{1,2\}$, C_{kr} і c – деякі додатні сталі. Ці функції мають властивості (нормальність, формула згортки та ін.), характерні для нормальних параболічних крайових задач, якими є задачі (7), (8_l), (9).

2 Спеціальні вагові простори

Означимо спеціальні вагові простори Φ_p^a, $p \in [1,\infty]$, функцій чи узагальнених мір φ, які, будучи взяті за початкові дані в (9), забезпечують коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задач (7), (8_l), (9) у сімействах вагових L_p-просторів функцій, які при $|x| \to \infty$ мають експоненціальний ріст максимального порядку 2 із залежним від t типом.

Використовуватимемо вагові функції, норми та простори, подібні до тих, які означено й застосовано в [1].

Якщо вважати, що функція φ з умови (9) задовольняє нерівність

$$|\varphi(x)| \leq C \exp\left\{a|x|^2\right\}, \ x \in \mathbb{R}_+^n, \qquad (12)$$

де $a \geq 0$, і за такої початкової функції побудувати розв'язок задачі (7), (8_l), (9) за допомогою формули (10), то цей розв'язок, взагалі кажучи, володіє оцінкою

$$|u(t,x)| \leq C \exp\left\{k(t,a)|x|^2\right\}, (t,x) \in \Pi_{(0,T]}^+.$$

Використовуючи формулу (10) та оцінки (11) і (12), отримаємо, що для знаходження функції k треба оцінити зверху функцію

$$f(\xi) := -c_0(q(t))^{-1}\left|e^{bt}x - \xi\right|^2 + a|\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}_+^n,$$

при фіксованих $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}^+$, $a \geq 0$ і $c_0 \in (0,c)$, де стала c з оцінки (11). Оскільки

$$f(\xi) \leq -c_0(q(t))^{-1}\left(e^{bt}|x| - |\xi|\right)^2 + a|\xi|^2,$$

то досить знайти максимум функції

$$f_0(r) := -c_0(q(t))^{-1}\left(e^{bt}|x| - r\right)^2 + ar^2, r \geq 0.$$

Цей максимум, як легко переконатися, дорівнює $\frac{c_0 a e^{2bt}}{c_0 - aq(t)}|x|^2$, якщо $a \geq 0$ вибрати так, щоб $q(T) < \frac{c_0}{a}$.

Отже, справджується оцінка

$$-c_0(q(t))^{-1}\left|e^{bt}x - \xi\right|^2 + a|\xi|^2 \leq k(t,a)|x|^2 \leq \hat{k}(t,a)|x|^2,$$
$$t \in (0,T], \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+^n, \qquad (13)$$

де функції k і $\hat{k}$ визначені формулами

$$k(t,a) := \frac{c_0 a e^{2bt}}{c_0 - aq(t)}, \hat{k}(t,a) := \frac{c_0 a e^{2|b|t}}{c_0 - aq(t)}, t \in [0,T].$$

Зауважимо, що $k(0,a) = \hat{k}(0,a) = a$, $k(t,a) = \hat{k}(t,a)$, $t \in [0,T]$, якщо $b > 0$, і $k(t,a) < \hat{k}(t,a), t \in [0,T]$, при $b < 0$; функція $\hat{k}$ монотонно зростає від значення $\hat{k}(0,a)$ до $\hat{k}(T,a)$; функція k має напівгрупову властивість

$$k(t-\tau, k(\tau,a)) = k(t,a), 0 \le \tau \le t \le T. \tag{14}$$

Введемо вагові функції

$$\Psi_\nu(t,x) := \exp\{\nu k(t,a)|x|^2\}, \hat{\Psi}_\nu(t,x) := \exp\{\nu \hat{k}(t,a)|x|^2\},$$
$$(t,x) \in \Pi^+_{(0,T]}, \nu \in \{-1,1\}, \tag{15}$$

за допомогою яких описується поведінка при $|x| \to \infty$ елементів означених нижче просторів.

Зауважимо, що на підставі (13)–(15) справджуються такі нерівності:

$$\hat{\Psi}_{-1}(t,x) \le \Psi_{-1}(t,x) \le \Psi_1(t,x) \le \hat{\Psi}_1(t,x), (t,x) \in \Pi^+_{(0,T]},$$
$$E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\Psi_1(\tau,x) \le \Psi_1(t,x) \le \hat{\Psi}_1(t,x),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Використовуватимемо для функцій $u : \Pi^+_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ при кожному $t \in [0,T]$ такі вагові норми:

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} := \|u(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\hat{k}(t,a)} := \left\|u(t,\cdot)\hat{\Psi}_{-1}(t,\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, p \in [1,\infty].$$

Зауважимо, що з (16) випливає нерівність

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\hat{k}(t,a)} \le \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}, \ t \in [0,T], p \in [1,\infty].$$

Позначимо через $L_p^{k(t,a)}$, $p \in [1,\infty]$, і Φ_p^a, $p \in (1,\infty]$, простори вимірних за Лебегом функцій $\varphi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}$ зі скінченними відповідно нормами $\|\varphi(\cdot)\|_p^{k(t,a)}$ і $\|\varphi(\cdot)\|_p^a := \|\varphi(\cdot)\|_p^{k(0,a)}$. Говоритимемо, що функція $u : \Pi^+_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ належить до простору $L_p^{k(\cdot,a)}$, якщо $u(t,\cdot) \in L_p^{k(t,a)}$ для кожного $t \in [0,T]$ і $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} < \infty$.

Нехай $\mathcal{B}$ – σ-алгебра борельових множин півпростору $\mathbb{R}^n_+$, а M – сукупність усіх зліченно адитивних функцій $\nu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|$. Через Φ_1^a позначимо сукупність усіх узагальнених борельових мір $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ таких, що функція

$$\nu(A) = \int\limits_A \Psi_{-1}(0,x) d\varphi(x), A \in \mathcal{B},$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\varphi \in \Phi_1^a$

$$\|\varphi\|_1^a := \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \Psi_{-1}(0,x) d\,|\varphi|\,(x) < \infty,$$

де $|\varphi|$ – повна варіація φ.

Використовуватимемо ще такі простори: W_1^a – простір усіх вимірних за Лебегом функцій $\eta : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма $\left\|\eta(\cdot)\hat{\Psi}_1(T,\cdot)\right\|_{L_1(\mathbb{R}_+^n)}$; W_0^a – простір усіх неперервних функцій $\eta : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{C}$ таких, що $\hat{\Psi}_1(T,x)\,|\eta(x)| \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$.

3 Основний результат

Однорідні функції Ґріна $G_0^{(l)}$ задач (7), (8_l), (9) породжують оператори Пуассона $P_p^{(l)}, p \in [1,\infty], l \in \{1,2\}$, за такими формулами:

$$(P_p^{(l)}\varphi)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, (t,x) \in \Pi_{(0,T]}^+, \varphi \in \Phi_p^a, p \in (1,\infty];$$

$$(P_1^{(l)}\varphi)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)d\varphi(\xi), (t,x) \in \Pi_{(0,T]}^+, \varphi \in \Phi_1^a. \tag{17}$$

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай u – розв'язок рівняння (7) в $\Pi_{(0,T]}^+$, який задовольняє крайову умову (8_l) та умову*

$$\exists\ p \in [1,\infty]\ \exists\ a \in [0, c_0/q(T)) : \sup_{t\in(0,T]} \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} < \infty. \tag{18}$$

Тоді існує елемент $\varphi \in \Phi_p^a$ такий, що u зображується у вигляді

$$u = P_p^{(l)}\varphi. \tag{19}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що для розв'язку u, який задовольняє умови теореми, справджується рівність

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t-h,x,\xi)u(h,\xi)d\xi \tag{20}$$

для довільної точки $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}^+$ і будь-якого $h \in (0, t/2)$.

Щоб довести це твердження, користуватимемося формулою Ґріна–Остроградського (6). Нехай $V_R := (0,T] \times K_R^+$, $K_R^+ := \{x \in \mathbb{R}_+^n | |x| < R\}$, S_R^+ – межа півкулі K_R^+; ζ – досить гладка на $[0,\infty)$ незростаюча функція така, що $\zeta = 1$ на $[0,1/2], \zeta = 0$ на $[3/4,\infty)$; $\zeta_R(x) := \zeta(|x|/R)$; (t,x) – довільно фіксована точка з $V_{R_0/4}$, де R_0 – довільно взяте додатне число. Покладемо в формулі (6) замість $t_1, t_2, \Omega, S, u(\tau,\xi)$ і $v(\tau,\xi)$ відповідно

$h, t-\varepsilon, K_R^+, S_R^+, u(\tau,\xi)$ і $G_0^{(l)}(t-\tau,x,\xi)\zeta_R(\xi)$, де $R \geq R_0, 0 < h < t/2$, а u – розв'язок рівняння (7), який задовольняє умови теореми. Використавши властивості функцій $G_0^{(l)}$ і ζ_R, отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(\varepsilon,x,\xi)\zeta_R(\xi)u(t-\varepsilon,\xi)d\xi =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t-h,x,\xi)\zeta_R(\xi)u(h,\xi)d\xi -$$
$$- \int\limits_h^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{K_{3R/4}^+ \setminus K_{R/2}^+} L^*(G_0^{(l)}(t-\tau,x,\xi)\zeta_R(\xi))u(\tau,\xi)d\xi,$$

а після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ і врахування властивостей $G_0^{(l)}$ прийдемо до рівності

$$u\,(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}\,(t-h,x,\xi)\,\zeta_R\,(\xi)\,u\,(h,\xi)\,d\xi -$$
$$- \int\limits_h^{t} d\tau \int\limits_{K_{3R/4}^+ \setminus K_{R/2}^+} L^*\left(G_0^{(l)}\,(t-\tau,x,\xi)\,\zeta_R\,(\xi)\right) u\,(\tau,\xi)\,d\xi =: I_1^{(R)} - I_2^{(R)}. \tag{21}$$

Перейдемо в (21) до границі при $R \to \infty$. Інтеграл $I_1^{(R)}$ при цьому прямує до інтеграла

$$I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}\,(t-h,x,\xi)\,u\,(h,\xi)\,d\xi.$$

Справді, за допомогою нерівностей (11), (16) і

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (q(t))^{-n/2} E_c(t,x,\xi)d\xi \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-c|y|^2\}dy =: C,$$
$$t \in (0,T], x \in \mathbb{R}_+^n,$$

маємо

$$\left|I_1 - I_1^{(R)}\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t-h,x,\xi)(1-\varsigma_R(\xi))u(h,\xi)\,d\xi\right| \le$$

$$\le C \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus K_{R/2}^+} (q(t-h))^{-n/2} E_{c-c_0}(t-h,x,\xi)\left(E_{c_0}(t-h,x,\xi)\Psi_1(h,\xi)\right) \times$$

$$\times (|u(h,\xi)|\,\Psi_{-1}(h,\xi))d\xi \le C\|u(h,\cdot)\|_p^{k(h,a)}\Psi_1(t,x) \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus K_{R/2}^+} (q(t-h))^{-n/2} E_{(c-c_0)/2}(t-h,x,\xi)\, E_{(c-c_0)/2}(t-h,x,\xi)\,d\xi \le$$

$$\le C\|u(h,\cdot)\|_p^{k(h,a)}\Psi_1(t,x)\exp\left\{-\frac{c-c_0}{2q(t-h)}\left(\frac{R}{4}\right)^2\right\} \underset{R\to\infty}{\to} 0. \tag{22}$$

Тут і далі через C позначено різні сталі, бо їх величини нас не цікавлять, та використано те, що для $x \in K_{R_0/4}^+ \subset K_{R/4}^+$, $\xi \in \mathbb{R}_+^n \setminus K_{R/2}^+$ і досить великих R $\left|e^{b(t-h)}x - \xi\right| \ge \left(|\xi| - e^{b(t-h)}|x|\right)^2 \ge \left(\frac{R}{2} - e^{|b|(t-h)}\frac{R_0}{4}\right)^2 \ge \left(\frac{R}{4}\right)^2$, якщо $R > e^{|b|(t-h)}R_0$, і, отже,

$$E_{(c-c_0)/2}(t-h,x,\xi) \le \exp\left\{-\frac{c-c_0}{2q(t-h)}\left(\frac{R}{4}\right)^2\right\}.$$

Співвідношення (22) встановлено для $p=\infty$. Коли $p<\infty$, то треба користуватися нерівністю Гельдера.

Тепер доведемо, що $I_2^{(R)} \underset{R\to\infty}{\to} 0$. Оскільки згідно з властивістю нормальності $G_0^{(l)}$ $L^*(G_0^{(l)}(t-\tau,x,\xi)) = 0$ при $\tau < t$ і $\xi \in \mathbb{R}_+^n$, то

$$L^*\left(G_0^{(l)}\zeta_R(\xi)\right) = -\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(\partial_{\xi_j}G_0^{(l)}\partial_{\xi_l}\zeta_R + \partial_{\xi_l}G_0^{(l)}\partial_{\xi_j}\zeta_R + G_0^{(l)}\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l}\zeta_R -$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1} a_j G_0^{(l)}\partial_{\xi_j}\zeta_R + b\sum_{j=1}^{n}\xi_j G_0^{(l)}\partial_{\xi_j}\zeta_R.$$

Скориставшись оцінками (11) для $G_0^{(l)}$, $\partial_{\xi_j}G_0^{(l)}$, $\partial_{\xi_l}G_0^{(l)}$ і тим, що

$$\left|\partial_{\xi_j}\zeta_R(\xi)\right| \le \frac{C}{R}, \left|\xi_j\partial_{\xi_j}\zeta_R\right| \le C, \left|\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l}\zeta_R(\xi)\right| \le \frac{C}{R^2},$$
$$\{j,l\} \subset \{1,\ldots,n\},\ \xi \in K_{3R/4}^+ \setminus K_{R/2}^+,$$

для $R \ge 1$ отримаємо оцінку

$$\left|L^*(G_0^{(l)}(t-\tau,x,\xi)\,\zeta_R(\xi))\right| \le C(q(t-\tau))^{-\frac{(n+1)}{2}}E_c(t-\tau,x,\xi),$$
$$h \le \tau < t \le T,\ \xi \in K_{3R/4}^+ \setminus K_{R/2}^+.$$

За допомогою цієї оцінки так само, як і при оцінюванні $I_1 - I_1^{(R)}$, маємо

$$I_2^{(R)} \le C \sup_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \Psi_1(t,x) \exp\left\{-\frac{c-c_0}{2q(t)}\left(\frac{R}{4}\right)^2\right\} \times$$

$$\times \int_h^t (q(t-\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} (q(t-\tau))^{-\frac{n}{2}} E_{(c-c_0)/2}(t-\tau,x,\xi)\, d\xi =$$

$$= C \sup_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \Psi_1(t,x) \int_0^{t-h} (q(\beta))^{-\frac{1}{2}} d\beta \exp\left\{-\frac{(c-c_0)}{2q(t)}\left(\frac{R}{4}\right)^2\right\} \underset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Отже, після переходу в (21) до границі при $R\to\infty$ отримаємо рівність (20).

Твердження теореми доведемо спочатку для $p\in(1,\infty]$. З умови (18) для заданого розв'язку u випливає, що послідовність функцій

$$\left\{u(1/\nu,\ x)\,\Psi_{-1}(1/\nu,\ x),\ x\in\mathbb{R}_+^n : \nu\ge 1\right\} \tag{23}$$

обмежена в просторі $L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right)$. Простір $L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ізометричний простору, спряженому з простором $L_{p'}(\mathbb{R}_+^n), p' := p/(p-1)$. Якщо використати теорему про слабку компактність обмеженої множини в спряженому просторі, то одержимо, що послідовність (23) слабко компактна в $L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right)$. Тому існує її підпослідовність

$$\left\{u(1/\nu(r),\ x)\,\Psi_{-1}(1/\nu(r),\ x),\ x\in\mathbb{R}_+^n : r\ge 1\right\} \tag{24}$$

і функція $\chi\in L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ такі, що для будь-якої функції $\eta\in L_{p'}(\mathbb{R}_+^n)$

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+^n} \eta(\xi)\,\Psi_{-1}(1/\nu(r),\ \xi)\,u(1/\nu(r),\ \xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}_+^n}\eta(\xi)\,\chi(\xi)\,d\xi. \tag{25}$$

Покладемо $\varphi(\xi) := \chi(\xi)\,\Psi_1(0,\xi),\ \xi\in\mathbb{R}_+^n$. Тоді $\varphi\in L_p^a$ і співвідношення (25) записується у вигляді

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+^n} \eta(\xi)\,\Psi_{-1}(1/\nu(r),\ \xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}_+^n}\eta(\xi)\,\Psi_{-1}(0,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{26}$$

Нехай (t,x) – довільно фіксована точка області $\Pi_{(0,T]}^+$ і

$$\eta(\xi) := G_0^{(l)}(t,x,\xi)\,\Psi_1(0,\xi),\xi\in\mathbb{R}_+^n. \tag{27}$$

З оцінки

$$|\eta(\xi)| \le C(q(t)\ )^{-n/2} E_{c-c_0}(t,x,\xi)\,\Psi_1(t,x),\xi\in\mathbb{R}_+^n, \tag{28}$$

яка одержується за допомогою нерівностей (11) і (16), випливає, що $\eta\in L_{p'}(\mathbb{R}_+^n)$. Тому на підставі рівності (26) маємо

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\,\Psi_{-1}(1/\nu(r),\ \xi)\,\Psi_1(0,\ \xi)\,u(1/\nu(r),\ \xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{29}$$

Припустимо, що $1/\nu(r) \le t/2,\ r \ge 1$. Згідно з формулою (20) з $h = 1/\nu(r)$ маємо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0^{(l)}(t - 1/\nu(r), x, \xi)\, u(1/\nu(r),\ \xi)\, d\xi. \tag{30}$$

За допомогою цієї рівності запишемо

$$u(t,x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Delta_h^0 G_0^{(l)}(t-h,x,\xi)\,|_{h=1/\nu(r)} u(1/\nu(r),\ \xi)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\,(1 - \Psi_{-1}(1/\nu(r),\ \xi))\,\Psi_1(0,\xi)\,u(1/\nu(r),\ \xi)\,d\xi +$$

$$+ \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\,\Psi_{-1}(1/\nu(r),\ \xi)\ \Psi_1(0,\xi)\,u(1/\nu(r),\ \xi)\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi \right) =: K_1^{(r)} + K_2^{(r)} + K_3^{(r)},\ r \ge 1, \tag{31}$$

де

$$\Delta_h^0 G_0^{(l)}(t-h,x,\xi) := G_0^{(l)}(t-h,x,\xi) - G_0^{(l)}(t,x,\xi).$$

Щоб одержати зображення (19), досить довести, що для $j \in \{1,2,3\}$

$$\lim_{r\to\infty} K_j^{(r)} = 0. \tag{32}$$

З (29) випливає (32) для $j = 3$. Доведемо (32) для $j = 2$. За допомогою нерівності Гельдера та умови (18) маємо

$$\left|K_2^{(r)}\right| \le \|u(1/\nu(r), \cdot)\|_p^{k(1/\nu(r),a)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} F_r(\xi)\,d\xi \right)^{1/p'} \le$$

$$\le C \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} F_r(\xi)\,d\xi \right)^{1/p'}, \tag{33}$$

де

$$F_r(\xi) := \left|G_0^{(l)}(t,x,\xi)\right|^{p'} |\Psi_1(1/\nu(r),\ \xi) - \Psi_1(0,\ \xi)|^{p'},\ \xi \in \mathbb{R}^n_+, r \ge 1.$$

Вивчимо властивості функцій $F_r,\ r \ge 1$. З оцінки (11) і нерівності (16) випливають нерівності

$$(F_r(\xi))^{1/p'} \le C(q(t))^{-\frac{n}{2}} E_{-c_0}(t,x,\xi)\,(E_{c_0}(t,x,\xi)\,\Psi_1(1/\nu(r),\xi) +$$
$$+ E_{c_0}(t,x,\xi)\,\Psi_1(0,\xi) \le C(q(t))^{-\frac{n}{2}} E_{-c_0}(t,x,\xi)\,(B(t,x,1/\nu(r)) + \Psi_1(t,x)),$$

де

$$B\left(t,x,1/\nu\left(r\right)\right):=\exp\left\{\frac{c_0 e^{2|b|t}\hat{k}\left(1/\nu\left(r\right),a\right)|x|^2}{c_0-\hat{k}\left(1/\nu\left(r\right),a\right)q\left(t\right)}\right\}.$$

Тут $r\geq r_0$, де r_0 взято так, щоб $q\left(t\right)<\frac{c_0}{\hat{k}(1/\nu(r),a)}$. Оскільки для будь-яких $r\geq r_0$ $B\left(t,x,1/\nu\left(r\right)\right)\leq B\left(t,x,1/\nu\left(r_0\right)\right)$, то

$$\left(F_r\left(\xi\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\leq C(q\left(t\right))^{-\frac{n}{2}}E_{c-c_0}\left(t,x,\xi\right)\left(B\left(t,x,1/\nu\left(r_0\right)\right)+\Psi_1\left(t,x\right)\right),\xi\in\mathbb{R}^n,r\geq r_0,$$

звідки випливає існування у послідовності $\left\{F_r\left(\xi\right),r\geq r_0\right\}$ інтегровної мажоранти. А оскільки для кожного $\xi\in\mathbb{R}^n_+$ $\lim\limits_{r\to\infty}F_r\left(\xi\right)=0$, то на підставі теореми Лебега про мажорантну збіжність

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}F_r\left(\xi\right)d\xi=0.$$

Звідси з урахуванням (33) одержуємо (32) для $j=2$.

Доведемо (32) для $j=1$. Оскільки для $p=\infty$ безпосередньо, а для $p\in(1,\infty)$ за допомогою нерівності Гельдера маємо

$$|K_1^{(r)}|\leq J_{1p}^{(r)}\|u(1/\nu(r),\cdot)\|_p^{k(1/\nu(r),a)},$$
$$J_{1p}^{(r)}:=\|\Delta^0_{1/\nu(r)}G_0^{(l)}(t-1/\nu(r),x,\cdot)\Psi_1(1/\nu(r),\cdot)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n_+)},$$

то на підставі умови (18) співвідношення (32) для $j=1$ буде доведено, якщо встановимо, що

$$J_{1p}^{(r)}\underset{r\to\infty}{\to}0. \tag{34}$$

При доведенні співвідношення (34) використовуватимемо таке твердження: для довільно фіксованих $(t,x)\in\Pi^+_{(0,T]}$ існують такі сталі $C_1>0$, $c_1\in(0,c)$ ($c-$ стала з оцінки (11)) і число r_0 таке, що $1/r(\nu_0)\in(0,t/2)$ та будь-яких $r>r_0$ і $\xi\in\mathbb{R}^n_+$ справджуються нерівності

$$\left|G_0^{(l)}\left(t-1/\nu(r),x,\xi\right)\right|\leq C_1(q\left(t/2\right))^{-n/2}E_{c_1}\left(t,x,\xi\right), \tag{35}$$

$$E_{c_0}\left(t,x,\xi\right)\Psi_1\left(1/\nu(r),\xi\right)\leq\exp\left\{\frac{c_0 e^{2|b|t}\hat{k}\left(1/\nu(r_0),a\right)|x|^2}{c_0-\hat{k}\left(1/\nu(r_0),a\right)q\left(t\right)}\right\}\leq C_1. \tag{36}$$

Доведемо це твердження. На підставі оцінки (11) і того, що $q\left(t/2\right)<q\left(t-1/\nu(r)\right)<q\left(t\right)$, маємо

$$|G_0^{(l)}\left(t-1/\nu(r),x,\xi\right)|\leq Cq(t/2)^{-n/2}\exp\{-c(q\left(t\right))^{-1}\left|e^{b(t-1/\nu(r))}x-\xi\right|^2\}.$$

Звідси випливає оцінка (35), якщо врахувати наступне. Оскільки для $c>0$ існують додатні сталі C_1' і $c_1<c$ такі, що для будь-яких $\{u,v\}\subset\mathbb{R}^n_+$, $|v|\leq1$, виконується нерівність $\exp\left\{-c|u-v|^2\right\}\leq\ \exp\left\{-c_1|u|^2\right\}$, то

$$\exp\{-c(q\left(t\right))^{-1}\left|e^{b(t-1/\nu(r))}x-\xi\right|^2\}=\exp\{-c(q\left(t\right))^{-1}|(e^{bt}x-\xi)-$$
$$-(e^{bt}-e^{b(t-1/\nu(r))})x|^2\}\leq C_1'\exp\{-c_1(q\left(t\right))^{-1}\left|e^{bt}x-\xi\right|^2\}=C_1'E_{c_1}\left(t,x,\xi\right),$$

якщо r_0 вибрати так, щоб для всіх $r > r_0$ виконувалась нерівність $\left|(e^{bt} - e^{b(t-1/\nu(r))})x\right| \leq 1$.

Доведення оцінки (36) подібне до доведення (16) і використовує властивості функцій k і $\hat{k}$. Справді, маємо

$$E_{c_0}(t,x,\xi)\,\Psi_1(1/\nu(r),\xi) \leq \exp\left\{\frac{c_0 e^{2|b|t} k\,(1/\nu(r),a)\,|x|^2}{c_0 - k\,(1/\nu(r),a)\,q\,(t)}\right\} \leq$$
$$\leq \exp\left\{\frac{c_0 e^{2|b|t}\hat{k}\,(1/\nu(r),a)\,|x|^2}{c_0 - \hat{k}\,(1/\nu(r),a)\,q\,(t)}\right\} \leq \exp\left\{\frac{c_0 e^{2|b|t}\hat{k}\,(1/\nu(r_0),a)\,|x|^2}{c_0 - \hat{k}\,(1/\nu(r_0),a)\,q\,(t)}\right\} \leq C_1,$$

якщо r_0 вибрати так, щоб $q\,(t) < c_0(\hat{k}(1/\nu(r_0),a))^{-1} \leq c_0/a$.

За допомогою оцінок (11), (35) і (36) одержуємо

$$\left|\Delta^0_{1/\nu(r)} G_0^{(l)}\,(t-1/\nu(r),x,\xi)\,\Psi_1\,(1/\nu(r),\xi)\right| \leq C(q(t/2)\ )^{-n/2} E_{c_1}\,(t,x,\xi)\,\Psi_1\,(1/\nu(r),\xi) =$$
$$= C(q\,(t/2))^{-n/2} E_{c_1-c_0}\,(t,x,\xi)\,(E_{c_0}\,(t,x,\xi)\,\Psi_1\,(1/\nu(r),\xi)) \leq$$
$$\leq C(q\,(t/2))^{-n/2} E_{c_1-c_0}\,(t,x,\xi)\,,\ r > r_0.$$

Враховуючи цю нерівність і те, що на підставі неперервності функції $G_0^{(l)}$ $\Delta^0_{1/\nu(r)} G_0^{(L)}\,(t-1/\nu(r),x,\xi)\,\Psi_1\,(1/\nu(r),\xi) \underset{r\to 0}{\to} 0$, за допомогою теореми Лебега про мажоранту збіжність отримуємо співвідношення (34) для $p \in (1,\infty]$.

Нехай тепер $p = 1$. З умови (18) випливає, що послідовність (23) обмежена в просторі $L_1\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. Цей простір не є спряженим до жодного іншого банахового простору, але він вкладається у простір M усіх узагальнених мір $\nu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, які мають скінченну повну варіацію $|\nu|$. Якщо для ν ввести норму за формулою $\|\nu\| := |\nu|$, то M стає банаховим простором. Цей простір ізометричний простору, спряженому до простору $C_0\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ усіх комплекснозначних неперервних функцій на $\mathbb{R}^n_+$, які прямують до нуля на нескінченності, з рівномірною нормою. З обмеженості в $L_1\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ послідовності (23) випливає обмеженість відповідної послідовності узагальнених мір в M і, звідси, слабка компактність останньої. Тому існують такі підпослідовність (24) та узагальнена міра $\nu \in M$, що для будь-якої функції $\eta \in C_0\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ справджується рівність

$$\lim_{r\to\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \eta\,(\xi)\,\Psi_{-1}\,(1/\nu\,(r)\,,\ \xi)\ u\,(1/\nu\,(r)\,,\ \xi)\,d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \eta\,(\xi)\,d\nu\,(\xi)\,. \right. \tag{37}$$

Для обмежених множин $A \in \mathcal{B}$ покладемо

$$\varphi\,(A) := \int\limits_A \Psi_1\,(0,x)\,d\nu\,(\xi)\,.$$

Тоді

$$\int\limits_A \Psi_{-1}\,(0,x)\,d\varphi\,(x) = \nu\,(A)\,.$$

Якщо A – необмежена множина з $\mathcal{B}$, то розглянемо монотонно неспадну послідовність обмежених множин $A_k \in \mathcal{B},\ k \geq 1$, таку, що $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$, і тоді покладемо

$$\int\limits_A \Psi_{-1}(0,x)\, d\varphi(x) := \lim_{k\to\infty} \int\limits_{A_k} \Psi_{-1}(0,x)\, d\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = \nu(A).$$

Означена таким способом узагальнена міра φ належить до простору Φ_1^a і рівність (37) записується у вигляді

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \eta(\xi)\, \Psi_{-1}(1/\nu(r),\ \xi)\, u(1/\nu(r),\ \xi)\, d\xi =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \eta(\xi)\, \Psi_{-1}(0,\xi)\, d\varphi(\xi),\ \eta \in C_0(\mathbb{R}^n). \tag{38}$$

З оцінки (28) випливає, що функція (27) належить до простору $C_0\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ для будь-якої фіксованої точки $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}^+$. Тому на підставі (38) одержуємо, що

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\, \Psi_{-1}(1/\nu(r),\ \xi)\, \Psi_1(0,\xi)\, u(1/\nu(r),\ \xi)\, d\xi =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\, d\varphi(\xi). \tag{39}$$

Подальші міркування такі самі, як у випадку $p > 1$. За допомогою формули (30) записуємо рівність

$$u(t,x) - \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\, d\varphi(\xi) = K_1^{(r)} + K_2^{(r)} + \hat{K}_3^{(r)}, \tag{40}$$

де $K_1^{(r)}$ і $K_2^{(r)}$ ті самі, що й в (31), а

$$\hat{K}_3^{(r)} := \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\, \Psi_{-1}(1/\nu(r),\ \xi)\, \Psi_1(0,\xi)\, u(1/\nu(r),\ \xi)\, d\xi -$$
$$- \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\, d\varphi(\xi).$$

Враховуючи рівності (32) для $j \in \{1,2\}$ і те, що на підставі (39) $\lim\limits_{k\to\infty} \hat{K}_3^{(r)} = 0$, з (40) одержуємо потрібне зображення (19).

Отже, доведено існування функції $\varphi \in \Phi_p^a$ при $p \in (1,\infty]$ та узагальненої міри $\varphi \in \Phi_1^a$ при $p = 1$ таких, що заданий розв'язок u, який задовольняє умови теореми, є інтегралом Пуассона відповідно функції або узагальненої міри φ. $\square$

Зауваження 1. *Якщо детально дослідити властивості операторів Ґріна (17), то можна довести, що формулою (19) визначається єдиний розв'язок рівняння (7), який належить до простору* $L_p^{k(\cdot,a)}$, *задовольняє крайову умову* (8_l) *у звичайному сенсі, а початкову умову (9) в такому сенсі*

при $1 < p < \infty$ $\lim\limits_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\hat{k}(t,a)} = 0;$

при $p = 1$ $\forall \eta \in W_0^a : \lim\limits_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \eta(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \eta(x)d\varphi(x);$

при $p = \infty$ $\forall \eta \in W_1^a : \lim\limits_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \eta(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \eta(x)\varphi(x)dx.$

Зауваження 2. *Із теореми 1 і зауваження 1 випливає, що для зображення розв'язків задачі (7),* (8_l)*, (9) у вигляді (19) з* $\varphi \in \Phi_p^a$ *необхідно й досить, щоб виконувалась умова (18) із заданими* p *і* a.

4 Висновки

Доведена в статті теорема про інтегральні зображення розв'язків однорідних задач Діріхле та Неймана для рівняння типу Фоккера–Планка–Колмогорова нормального марковського процесу може істотно використовуватися для описання множин початкових значень і характеризації широких класів розв'язків розглянутих задач.

Список літератури

[1] Заболотько Т. О., Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. *Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування.* Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер. матем. 2012, **2** (2–3), 81–89.

[2] Івасишен С. Д., Турчина Н. І. *Характеризація розв'язків крайових задач для модельного рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова нормального марковського процесу.* Наук. вісті НТУУ "КПІ"2015, **4** (102), 63–68.

[3] Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. Москва, Сов. радио, 1977, 488 с.

[4] Турчина Н. І., Івасишен С. Д. *Вектор-функції Ґріна крайових задач для модельного рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова нормального марковського процесу.* Буковинський мат. журн. 2014, **2** (1), 118–124.

[5] Турчина Н. І. *Про вектор-функції Ґріна півпросторових задач Діріхле та Неймана для параболічних рівнянь другого порядку з особливостями і виродженнями.* Буковинський мат. журн. 2019. Т. 7, № 2. С. 117–132. https://doi.org/10.31861/bmj2019.02.117.

Список літератури

[1] Zabolot'ko T. O., Ivasyshen S. D., Pasichnyk G. S. *On the fundamental solution of the Cauchy problem for some parabolic equations with increasing coefficients and applications.* Scientific Herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University. Series of Math. 2012. **2** (2–3), 81–89.

[2] Ivasyshen S. D., Turchyna N. I. Characterizition solutions of boudary value problems for the model Fokker–Planck–Kolmogorov equation of a normal Markovian process. Naukovi visti NTUU "KPI"2015, **4** (102), 63–68.

[3] Tikhonov V.I., Mironov M.A. Markovian processes. Moscow, Sov. radio 1977, 488 p.

[4] Turchyna N. I., Ivasyshen S. D. *Green's vector function of boundary value problems for the model Fokker–Planck–Kolmogorov equation of a normal Markovian process.* Bukovinian Math. J. 2014, **2** (1), 118–124.

[5] Turchyna N. I. Bukovinian Math. J. About Green's vector functions of Dirichlet and Neumann semi-space problems for second-order parabolic equations with specificities and degenerations. Bukovinian Math. J. 2019, **7** (2), 117–132. https://doi.org/10.31861/bmj2019.02.117.

Надійшло 31.08.2020

Ivasyshen S.D., Koreniuk N. I. *Integral representation of solutions of half-space homogeneous Dirichlet and Neumann problems for an equation of Fokker-Planck-Kolmogorov type of normal Markov process*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 56–70.

Solutions of a homogeneous model equation of the Fokker–Planck–Kolmogorov type of a normal Markov process are consider. They are defined in $\{(t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | 0 < t \leq T, -\infty < x_j < \infty, j \in \{1, \ldots, n-1\}, x_n > 0\}$ and for $x_n = 0$ satisfy the homogeneous Dirichlet or Neumann conditions and relate to special weighted Lebesgue L_p-spaces $L_p^{k(\cdot,a)}$. The representation of such solutions in the form of Poisson integrals is established. The kernels of these integrals are the homogeneous Green's functions of the considered problems, and their densities belong to specially constructed sets Φ_p^a of functions or generalized measures. The results obtained will be used to describe solutions of the problems from spaces $L_p^{k(\cdot,a)}$. Thus, the well-known Eidelman-Ivasyshen approach will be implemented for the considered problems. According to this approach, if the initial data are taken from the set Φ_p^a, then there is only one solution to the problem from the space $L_p^{k(\cdot,a)}$. It is represented as a Poisson integral. Conversely, for any solution from the space $L_p^{k(\cdot,a)}$ there is only one element $\varphi \in \Phi_p^a$ such that this solution can be represented as a Poisson integral with density φ. In this case, it becomes clear in what sense the initial condition is satisfied.