Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 2, 40–55 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №2, 40–55

Громик А.П.[1], Конет І.М.[2], Пилипюк Т.М.[2]

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

Розглянуто випадки задання на гранях клина крайових умов Діріхле і Неймана та їх можливих комбінацій (Діріхле – Неймана, Неймана – Діріхле).

Для побудови розв'язків досліджуваних крайових задач застосовано скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi \in (0;\varphi_0)$, скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $(-l_1;l_2)$ щодо аплікатної змінної z та гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на сегменті $(0;R)$ полярної осі з n точками спряження щодо радіальної змінної r.

Послідовне застосування інтегральних перетворень за геометричними змінними дозволяє звести тривимірні початково-крайові задачі спряження до задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку, єдиний розв'язок якої виписано в замкнутому вигляді.

Застосування обернених інтегральних перетворень відновлює в явному вигляді розв'язки розглянутих параболічних початково-крайових задач через їх інтегральне зображення.

Проаналізовано структуру розв'язку задачі у випадку задання на гранях клина крайових умов Неймана.

Виписано точні аналітичні формули для компонент головних розв'язків і сформульовано теорему про існування єдиного обмеженого класичного розв'язку задачі.

Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер і можуть бути застосовані (з використанням числових методів) при розв'язуванні прикладних задач.

Ключові слова і фрази: параболічне рівняння, початкові умови, крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, гібридні інтегральні перетворення, головні розв'язки.

---

[1] Подільський державний аграрно-технічний університет

[2] Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка.
e-mail: *gapon74@gmail.com, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua*

1. Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, - важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і

УДК 517.958;517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K20.

численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, хімії, біології, медицини, економіки, екології, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь параболічного типу одержано у відомих працях Городецького В.В. [2], Житарашу М.В., Ейдельмана С.Д. [6], Загорського Т.Я. [7], Івасишена С.Д. [8], Ладиженської О.А., Солоннікова В.А., Уральцевої Н.М. [14], Ландіса Є.М. [15], Матійчука М.І. [16], Пукальського І.Д. [18], Фрідмана А. [22], Ейдельмана С.Д. [24] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок, обмеженість, необмеженість тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань, механіки деформівного твердого тіла приводять до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними функціями, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними функціями чи, зокрема, кусково-сталими [4, 5, 19].

Відомо, що крім методу відокремлення змінних (методу Фур'є) та його узагальнень, одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в однорідних середовищах є метод інтегральних перетворень, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

У той же час для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3, 9-12].

У цій статті, яка є логічним продовженням [13], за допомогою методу інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків параболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині $D =$

$\{(t,r,\varphi,z)|\, t>0;\ r\in I_n^+=\bigcup\limits_{j=1}^{n+1} I_j\equiv\bigcup\limits_{j=1}^{n+1}(R_{j-1};R_j);\ R_0=0;\ R_{n+1}=R<+\infty;\ \varphi\in(0;\varphi_0); 0<\varphi_0<2\pi;\ z\in(-l_1;l_2);\ l_j\geq 0;\ l_1+l_2\neq 0\}$ класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [17]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j+$$
$$+\chi_j^2 u_j=f_j(t,r,\varphi,z);\ r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j(t,r,\varphi,z)|_{t=0}=g_j(r,\varphi,z);\ r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s}\right|_{r=0}=0;\ \left.\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1}\right|_{r=R}=g(t,\varphi,z);\ s=0,1; \tag{3}$$

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial z}+p_1\right)u_j\right|_{z=-l_1}=w_j^1(t,r,\varphi);\ \left.\left(\frac{\partial}{\partial z}+p_2\right)u_j\right|_{z=l_2}=w_j^2(t,r,\varphi); \tag{4}$$
$$p_j\geq 0;\ p_1+p_2\neq 0; r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1};$$

одними з крайових умов на гранях клина [13]

$$u_j|_{\varphi=0}=g_{1j}(t,r,z);\ u_j|_{\varphi=\varphi_0}=w_{1j}(t,r,z);\ j=\overline{1,n+1}, \tag{5}$$

$$u_j|_{\varphi=0}=g_{2j}(t,r,z);\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=-w_{2j}(t,r,z);\ j=\overline{1,n+1}, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=g_{3j}(t,r,z); u_j|_{\varphi=\varphi_0}=w_{3j}(t,r,z);\ j=\overline{1,n+1}, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=g_{4j}(t,r,z);\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=-w_{4j}(t,r,z);\ j=\overline{1,n+1} \tag{8}$$

та умовами спряження [12]

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\right|_{r=R_k}=0;\ j=1,2;\ k=\overline{1,n}, \tag{9}$$

де a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k – деякі сталі;

$$c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\neq 0;\ c_{1k}\cdot c_{2k}>0;$$

$$\alpha_{22}^{n+1}\geq 0,\ \beta_{22}^{n+1}\geq 0;\ \alpha_{22}^{n+1}+\beta_{22}^{n+1}\neq 0;$$

$$f(t,r,\varphi,z)=\{f_1(t,r,\varphi,z),\ f_2(t,r,\varphi,z),\ ...,f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\};$$

$$g(r,\varphi,z)=\{g_1(r,\varphi,z),\ g_2(r,\varphi,z),\ ...,g_{n+1}(r,\varphi,z)\};$$

$$w^1(t,r,\varphi)=\{w_1^1(t,r,\varphi),\ w_2^1(t,r,\varphi),\ ...,w_{n+1}^1(t,r,\varphi)\};$$

$$w^2(t,r,\varphi) = \{w_1^2(t,r,\varphi),\, w_2^2(t,r,\varphi),\, ...,\, w_{n+1}^2(t,r,\varphi)\};$$

$$g(t,\varphi,z),\, g_{pj}(t,r,z),\, w_{pj}(t,r,z);\ (p=\overline{1,4};\ j=\overline{1,n+1})$$

– задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t,r,\varphi,z) = \{u_1(t,r,\varphi,z),\, u_2(t,r,\varphi,z),\, ...,\, u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$$

– шукана неперервно диференційовна за змінною t і двічі наперервно диференційовна за геометричними змінними (r,φ,z) функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;

2) якщо $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де λ_1^k, λ_2^k – коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;

3) якщо $\alpha_{11}^k = b_k$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де b_k – коефіцієнти термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Отже, у зазначених випадках 1, 2 (або 1, 3) розглянута параболічна крайова задача математичної фізики моделює процеси теплопровідності в кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

2. Основна частина. Припустимо, що розв’язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [12, 20, 21].

Згідно з [21] визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур’є щодо кутової змінної $\varphi \in (0;\varphi_0)$ за формулами:

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int\limits_0^{\varphi_0} f(\varphi)U_{m,ik}(\varphi)d\varphi \equiv f_{m,ik}, \tag{10}$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \tag{11}$$

де

$$U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi);\ \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0};$$

$$U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi);\ \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0};$$

$$U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi);\ \beta_{m,21} = \beta_{m,12};$$

$$U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi);\ \beta_{m,22} = \beta_{m,11};$$

$\varepsilon_0^{ik} = 0$; $\varepsilon_m^{ik} = 1$ при $ik = 11, 12, 21$; $m = 1,2,3,...$; $\varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2}$; $\varepsilon_m^{22} = 1$ при $m = 1,2,3,...$

При цьому для інтегрального оператора $F_{m,ik}$ виконується тотожність

$$F_{m,ik}\left[\frac{d^2f}{d\varphi^2}\right]=-\beta^2_{m,ik}f_{m,ik}+\Phi_{m,ik};\ i,k=1,2, \tag{12}$$

де

$$\Phi_{m,11}=\frac{\pi m}{\varphi_0}\left[f(0)+(-1)^{m+1}f(\varphi_0)\right];$$

$$\Phi_{m,12}=\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}f(0)+(-1)^m\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,21}=-\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}+(-1)^m\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}f(\varphi_0);$$

$$\Phi_{m,22}=-\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}+(-1)^m\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12), тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'=\{(t,r,z)|t>0;\ r\in I_n^+;\ z\in(-l_1;l_2)\}$ класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t}-\left[a^2_{rj}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu^2_{jm,ik}}{r^2}\right)+a^2_{zj}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_{jm,ik}+$$

$$+\chi^2_j u_{jm,ik}=G_{jm,ik}(t,r,z);\ r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{13}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t,r,z)|_{t=0}=g_{jm,ik}(r,z);\ r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{14}$$

крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z}+p_1\right)u_{jm,ik}\Big|_{z=-l_1}=w^1_{jm,ik}(t,r);\ \left(\frac{\partial}{\partial z}+p_2\right)u_{jm,ik}\Big|_{z=l_2}=w^2_{jm,ik}(t,r); \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial^s u_{1m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=0}=0;\ \left(\alpha^{n+1}_{22}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^{n+1}_{22}\right)u_{n+1,m,ik}\Big|_{r=R}=g_{m,ik}(t,z);\ s=0,1 \tag{16}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha^p_{j1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^p_{j1}\right)u_{pm,ik}-\left(\alpha^p_{j2}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^p_{j2}\right)u_{p+1,m,ik}\right]\Big|_{r=R_p}=0;\ j=1,2;\ p=\overline{1,n}, \tag{17}$$

де $\nu_{jm,ik}=a^{-1}_{rj}a_{\varphi j}\beta_{m,ik}$; $G_{jm,ik}(t,r,z)=f_{jm,ik}(t,r,z)+a^2_{\varphi j}r^{-2}\Phi_{m,ik}(t,r,z)$.

Застосуємо до двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)-(17) скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $(-l_1;l_2)$ щодо змінної z [20]:

$$\Lambda[f(z)]=\int_{-l_1}^{l_2}f(z)v_s(z+l_1)dz\equiv f_s, \tag{18}$$

$$\Lambda^{-1}[f_s] = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \frac{v_s(z+l_1)}{||v_s(z+l_1)||^2} \equiv f(z), \tag{19}$$

$$\Lambda_s\left[\frac{d^2f}{dz^2}\right] = -\gamma_s^2 f_s + v_s(0)\left(-\frac{df}{dz} + p_1 f\right)\Big|_{z=-l_1} +$$

$$+v_s(l)\left(\frac{df}{dz} + p_2 f\right)\Big|_{z=l_2}; \ l = l_1 + l_2. \tag{20}$$

У формулах (18)-(20) використовується спектральна функція (ядро перетворення)

$$v_s(z+l_1) = \frac{\gamma_s \cos\gamma_s(z+l_1) + p_1 \sin\gamma_s(z+l_1)}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}},$$

квадрат норми якої

$$||v_s(z+l_1)||^2 \equiv \int_{-l_1}^{l_2} v_s^2(z+l_1)dz = \frac{l}{2} + \frac{(p_1+p_2)(\gamma_s^2 + p_1p_2)}{2(\gamma_s^2+p_1^2)(\gamma_s^2+p_2^2)}.$$

При цьому

$$v_s(0) = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2+p_1^2}}; \ v_s(l) = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2+p_2^2}};$$

$\{\gamma_s\}_{s=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча полідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння $\mathrm{ctg}(\gamma l) = \dfrac{\gamma^2 - p_1p_2}{\gamma(p_1+p_2)}$, які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_s, який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) крайовій задачі (13)-(17) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t,r)|t>0;\ r \in I_n^+\}$ класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B-параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik,s}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{\nu_{jm,ik}}[u_{jm,ik,s}] + \left(a_{zj}^2\gamma_s^2 + \chi_j^2\right)u_{jm,ik,s} =$$

$$= \Phi_{jm,ik,s}(t,r); \ r \in I_j; \ j = \overline{1, n+1} \tag{21}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik,s}(t,r)|_{t=0} = g_{jm,ik,s}(r); \ r \in I_j; \ j = \overline{1,n+1}, \tag{22}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^p u_{1m,ik,s}}{\partial r^p}\Big|_{r=0} = 0; \ \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1,m,ik,s}\Big|_{r=R} = g_{m,ik,s}(t); \ p = 0,1 \tag{23}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p\right)u_{pm,ik,s} - \left(\alpha_{j2}^p\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p\right)u_{p+1,m,ik,s}\right]\Big|_{r=R_p} = 0; \ j = 1,2; \ p = \overline{1,n}, \tag{24}$$

де

$$B_{\nu_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}$$

– класичний диференціальний оператор Бесселя [16],

$$\Phi_{jm,ik,s}(t,r) = G_{jm,ik,s}(t,r) + a_{zj}^2 v_s(0) w_{jm,ik}^1(t,r) + a_{zj}^2 v_s(l) w_{jm,ik}^2(t,r).$$

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)-(24) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на кусково-однорідному сегменті I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [12]:

$$H_{pn}[f(r)] = \int_0^R f(r)V(r,\lambda_p)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda_p), \tag{25}$$

$$H_{pn}^{-1}[\tilde{f}(\lambda_p)] = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_p)\frac{V(r,\lambda_p)}{||V(r,\lambda_p)||^2} \equiv f(z), \tag{26}$$

$$H_{pn}\Big[B_{(m,ik)}[f(r)]\Big] = -\lambda_p^2\tilde{f}(\lambda_p) - \sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r,\lambda_p)\sigma_k rdr +$$

$$+a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}V_{n+1}(r,\lambda_p)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1}f\right)\Bigg|_{r=R}. \tag{27}$$

У формулах (25)-(27) застосовуються, виписані в [12], спектральна функція $V(r,\lambda_p)$, вагова функція $\sigma(r)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{rj}^2\Theta(r-R_{j-1})\Theta(R_j - r)B_{\nu_{jm,ik}},$$

де α_k – деякі сталі, $\Theta(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Запишемо диференціальні рівнянння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{r1}^2 B_{\nu_{1m,ik}} + q_{1s}^2\right) u_{1m,ik,s}(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{r2}^2 B_{\nu_{2m,ik}} + q_{2s}^2\right) u_{2m,ik,s}(t,r) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{r,n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m,ik}} + q_{n+1,s}^2\right) u_{n+1,m,ik,s}(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1m,ik,s}(t,r) \\ \Phi_{2m,ik,s}(t,r) \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_{n+1,m,ik,s}(t,r) \end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$\left.\begin{bmatrix} u_{1m,ik,s}(t,r) \\ u_{2m,ik,s}(t,r) \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1,m,ik,s}(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1m,ik,s}(r) \\ g_{2m,ik,s}(r) \\ \dots\dots\dots \\ g_{n+1,m,ik,s}(r) \end{bmatrix}, \tag{29}$$

де $q_{js}^2 = a_{zj}^2\gamma_s^2 + \chi_j^2$; $j = \overline{1, n+1}$, $s = 1, 2, 3, \dots$.

Інтегральний оператор H_{pn}, який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{pn}[\cdots] = \Bigg[\int_0^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda_p)\sigma_1 rdr \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda_p)\sigma_2 rdr$$

$$\left.\int\limits_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda_p)\sigma_n r dr \int\limits_{R_n}^{R} \cdots V_{n+1}(r,\lambda_p)\sigma_{n+1} r dr\right] \tag{30}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt}+\lambda_p^2+\alpha_j^2+q_{js}^2\right)\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda_p)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\Phi}_{jm,ik,s}(t,\lambda_p)+$$

$$+a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}V_{n+1}(R,\lambda_p)g_{m,ik,s}(t), \tag{31}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda_p)\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}_{jm,ik,s}(\lambda_p), \tag{32}$$

де

$$\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda_p)=\int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} u_{jm,ik,s}(t,r)V_j(r,\lambda_p)\sigma_j r dr;\ j=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{\Phi}_{jm,ik,s}(t,\lambda_p)=\int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \Phi_{jm,ik,s}(t,r)V_j(r,\lambda_p)\sigma_j r dr;\ j=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{g}_{jm,ik,s}(\lambda_p)=\int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} g_{jm,ik,s}(r)V_j(r,\lambda_p)\sigma_j r dr;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $max\{q_{1s}^2,\ q_{2s}^2,\cdots,q_{n+1,s}^2\}=q_{1s}^2$ і покладемо всюди $\alpha_j^2=q_{1s}^2-q_{js}^2;\ j=\overline{1,n+1}$.

Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{u}_{m,ik,s}}{dt}+\Delta(\lambda_p,\gamma_s)\tilde{u}_{m,ik,s}=\tilde{T}_{m,ik,s}(t,\lambda_p), \tag{33}$$

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda_p)|_{t=0}=\tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda_p), \tag{34}$$

де

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda_p)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda_p);\ \Delta(\lambda_p,\gamma_s)=\lambda_p^2+a_{z1}^2\gamma_s^2+\chi_1^2;$$

$$\tilde{T}_{m,ik,s}(t,\lambda_p)=\tilde{\Phi}_{m,ik,s}(t,\lambda_p)+a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}V_{n+1}(R,\lambda_p)g_{m,ik,s}(t);$$

$$\tilde{\Phi}_{m,ik,s}(t,\lambda_p)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\Phi}_{jm,ik,s}(t,\lambda_p);\ \tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda_p)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}_{jm,ik,s}(\lambda_p).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (33), (34) є функція

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda_p)=N(t,\lambda_p,\gamma_s)\tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda_p)+\int\limits_0^t N(t-\tau,\lambda_p,\gamma_s)\tilde{T}_{m,ik,s}(\tau,\lambda_p)d\tau, \tag{35}$$

де розв'язуюча функція (функція Коші) має вигляд $N(t,\lambda_p,\gamma_s)=exp(-\Delta(\lambda_p,\gamma_s)t)$.

Оскільки суперпозиція операторів H_{pn} та H_{pn}^{-1} є одиничним оператором ($H_{pn}\circ H_{pn}^{-1}=H_{pn}^{-1}\circ H_{pn}=I$), то оператор H_{pn}^{-1}, як обернений до оператора (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{pn}^{-1}[\cdots]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{p=1}^{\infty}\cdots\frac{V_1(r,\lambda_p)}{||V(r,\lambda_p)||^2}\\ \sum\limits_{p=1}^{\infty}\cdots\frac{V_2(r,\lambda_p)}{||V(r,\lambda_p)||^2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum\limits_{p=1}^{\infty}\cdots\frac{V_{n+1}(r,\lambda_p)}{||V(r,\lambda_p)||^2}\end{bmatrix} \tag{36}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda_p)]$, де функція $\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda_p)$ визначена формулою (35). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)-(24):

$$u_{jm,ik,s}(t,r)=\sum_{p=1}^{\infty}\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda_p)\frac{V_j(r,\lambda_p)}{||V(r,\lambda_p)||^2};\ j=\overline{1,n+1}. \tag{37}$$

Застосувавши послідовно до функцій $u_{jm,ik,s}(t,r)$, визначених формулами (37), обернені оператори Λ_s^{-1} та $F_{m,ik}^{-1}$, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned}u_{j,ik}(t,r,\varphi,z)=&\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+\\&+\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+\\&+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_{-l_1}^{l_2}Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau+\\&+\sum_{p=1}^{n+1}a_{zp}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}[W_{jp,1}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z)w_p^1(\tau,\rho,\alpha)+\\&+W_{jp,2}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z)w_p^2(\tau,\rho,\alpha)]\sigma_p\rho d\alpha d\rho d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_{-l_1}^{l_2}W_{jr}^{ik}(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z,\xi)g(\tau,\alpha,\xi)d\xi d\alpha d\tau;\ j=\overline{1,n+1},\end{aligned} \tag{38}$$

які визначають єдині розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}N(t,\lambda_q,\gamma_s)\times$$

$$\times\frac{V_j(r,\lambda_q)V_p(\rho,\lambda_q)}{||V(r,\lambda_q)||^2}\frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{||v_s(z+l_1)||^2}U_{m,ik}(\varphi)U_{m,ik}(\alpha);\ j,p=\overline{1,n+1}$$

матриці впливу (функції впливу),

функції Гріна

$$Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}N(t-\tau,\lambda_q,\gamma_s)\times$$

$$\times\frac{V_j(r,\lambda_q)V_p(\rho,\lambda_q)}{||V(r,\lambda_q)||^2}\frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{||v_s(z+l_1)||^2}\Phi_{m,ik}(\tau,\rho,\xi)U_{m,ik}(\varphi),$$

компоненти $W_{jp,1}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)=E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,-l_1)$ нижньої аплікатної матриці Гріна (нижні аплікатні функції Гріна), компоненти $W_{jp,2}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)=E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,l_2)$ верхньої аплікатної матриці Гріна (верхні аплікатні функції Гріна) та компоненти $W_{jr}^{ik}(t,r,\varphi,\alpha,z,\xi)=a_{n+1}^2R\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}E_{j,n+1}^{ik}(t,r,R,\varphi,\alpha,z,\xi)$ радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) розглянутих параболічних початково-крайових задач.

Проаналізуємо формули (38) в залежності від типу крайових умов на гранях кусково-однорідного клиновидного суцільного циліндра. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (8). У цьому випадку функції Гріна

$$Q_{jp}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_m^{22}N(t-\tau,\lambda_q,\gamma_s)\times$$

$$\times\frac{V_j(r,\lambda_q)V_p(\rho,\lambda_q)}{||V(r,\lambda_q)||^2}\frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{||v_s(z+l_1)||^2}\times$$
$$\times\left[-g_{4p}(\tau,\rho,\xi)+(-1)^{m+1}w_{4p}(\tau,\rho,\xi)\right]\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.$$

Визначимо тангенціальні функції Гріна, породжені крайовими умовами (8), за формулами:

$$\Psi_{jp,1}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=-\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_m^{22}N(t-\tau,\lambda_q,\gamma_s)\times$$

$$\times\frac{V_j(r,\lambda_q)V_p(\rho,\lambda_q)}{||V(r,\lambda_q)||^2}\frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{||v_s(z+l_1)||^2}\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},$$

$$\Psi_{jp,2}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\varepsilon_m^{22}N(t-\tau,\lambda_q,\gamma_s)\times$$

$$\times\frac{V_j(r,\lambda_q)V_p(\rho,\lambda_q)}{||V(r,\lambda_q)||^2}\frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{||v_s(z+l_1)||^2}\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},$$

Тоді розв'язок задачі (1)-(4), (8), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,22}(t,r,\varphi,z)=\sum_{p=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_0^{\varphi_0}\int\limits_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{22}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_0^{\varphi_0}\int\limits_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{22}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+ \tag{39}$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int\limits_0^t\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_{-l_1}^{l_2}\left[\Psi_{jp,1}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)g_{4p}(\tau,\rho,\xi)+\right.$$

$$\left.+\Psi_{jp,2}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)w_{4p}(\tau,\rho,\xi)\right]\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{zp}^2\int\limits_0^t\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_0^{\varphi_0}\left[W_{jp,1}^{22}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z)w_p^1(\tau,\rho,\alpha)+\right.$$

$$\left.+W_{jp,2}^{22}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z)w_p^2(\tau,\rho,\alpha)\right]\sigma_p\rho d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{\varphi_0}\int\limits_{-l_1}^{l_2}W_{jr}^{22}(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z,\xi)g(\tau,\alpha,\xi)d\xi d\alpha d\tau;\ j=\overline{1,n+1},$$

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j(r,\varphi,z)$, $w_j^s(t,r,\varphi)$, $(s=1,2)$, $g_{4j}(t,r,z)$, $w_{4j}(t,r,z)$,$(j=\overline{1,n+1})$ задовольняють умови:

1) неперервно диференційовні за змінною t і двічі неперервно диференційовні за геометричними змінними;

2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;

3) справджують умови спряження, а функція $g(t,\varphi,z)$ також задовольняє умови 1-2, то параболічна початково-крайова задача спряження (1)-(4), (8), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (39).

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jp}^{22}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)$ і функцій Гріна $\Psi_{jp,s}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)$, $W_{jp,s}^{22}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)$ $(s=1,2)$, $W_{jr}^{22}(t,r,\varphi,\alpha,z,\xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_{j,22}(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (39), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (8) та умови спряження (9) в сенсі теорії узагальнених функцій [23].

Єдиність розв'язку (39) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1)-(4), (8), (9).

Методами з [1, 23] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (39) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі (1) - (4), (8), (9).

Випадки крайових умов (5) - (7) на гранях клина $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$ аналізуються аналогічно.

4. Зауваження.

1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

2. Випадок зміни φ в межах $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ зводиться до розглянутого заміною $\varphi' = \varphi - \varphi_1$ ($\varphi_0 \equiv \varphi_2 - \varphi_1$).

3. Параметри α_{22}^{n+1}, β_{22}^{n+1} дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні $r = R$ крайової умови 1-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} \to 0$; $\beta_{22}^{n+1} \to 1$), 2-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} \to 1$; $\beta_{22}^{n+1} \to 0$) та 3-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} \to 1$; $\beta_{22}^{n+1} \equiv h > 0$).

4. Параметри p_1, p_2 дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площинах $z = -l_1$, $z = l_2$ крайових умов 1-го роду ($p_1 \to +\infty$; $p_2 \to +\infty$), 2-го роду ($p_1 \to 0$; $p_2 \to 0$) та їх можливих комбінацій.

5. Аналіз формул (38) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $w_j^s(t, r, \varphi)$, $(s = 1, 2)$, $g_{pj}(t, r, z)$, $w_{pj}(t, r, z)$, $(p = \overline{1, 4}; j = \overline{1, n+1}$, $g(t, \varphi, z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

5. Висновки. За допомогою методу класичних інтегральних перетворень Фур'є та гібридного інтегрального перетворення типу Ганкеля 1-го роду у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач у кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі. Одержані інтегральні зображення розв'язків носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

Список літератури

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.* Москва: Физматгиз, 1958. 274 с.

2. Городецький В.В. *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу.* Чернівці: Рута, 1998. 225 с.

3. Громик А.П., Конет І.М., Ленюк М.П. *Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах.* Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011. 200 с.

4. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. *Модели и методы решения задач в неоднородных средах.* Киев: Наук. думка, 2001. 606 с.

5. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. *Модели и методы решения задач с условиями сопряжения.* Киев: Наук. думка, 1998. 614 с.

6. Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д. *Параболические граничные задачи.* Кишинев: Штиинца. 1992. 327 с.

7. Загорский Т.Я. *Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа.* Львов: Изд-во ЛГУ, 1961. 115 с.

8. Ивасишен С.Д. *Матрица Грина параболических задач.* Киев: Вища школа, 1990. 199 с.

9. Конет І.М. *Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах.* Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013. 120 с.

10. Конет І.М., Пилипюк Т.М. *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах.* Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2016. 244 с.

11. Конет І.М., Ленюк М.П. *Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях.* Чернівці: Прут, 2001. 312 с.

12. Конет І.М., Пилипюк Т.М. *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах.* Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2017. 80 с.

13. Конет І.М., Пилипюк Т.М. *Параболічні крайові задачі в необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.* Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2019. Вип. 20. С. 26-40.

14. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Москва: Наука, 1967. 736 с.

15. Ландис Е.М. *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.* Москва: Наука, 1971. 288 с.

16. Матійчук М.І. *Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями.* Чернівці: Прут, 2003. 248 с.

17. Перестюк М.О., Маринець В.В. *Теорія рівнянь математичної фізики.* Київ: Либідь, 2006. 424 с.

18. Пукальський І.Д. *Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями.* Чернівці: Рута, 2008. 253 с.

19. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. *Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах.* Киев: Наук. думка, 1991. 432 с.

20. Снеддон И. *Преобразования Фурье.* Москва: ИЛ, 1955. 668 с.

21. Трантер К. Дж. *Интегральные преобразования в математической физике.* Москва: Гостехтеориздат, 1956. 204 с.

22. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* Москва: Мир, 1968. 428 с.

23. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс.* Москва: Наука, 1965. 328 с.

24. Эйдельман С.Д. *Параболические системы.* Москва: Наука, 1964. 444 с.

References

1. I. Gelfand and G. Shilov *Some questions in the theory of differential equations.* Moscow: Fizmatgiz, 1958. 274 p.

2. V. Gorodetsky *Boundary properties in the layer of smooth solutions of equations of parabolic type.* Chernivtsi: Ruta, 1998. 225 p.

3. A. Gromyk, I. Konet, and M. Leniuk *The temperature fields in the piece-homogeneous spatial environments.* Kamenets-Podilsky: Abetka-Svit, 2011. 200 p.

4. V. Deineka and I. Sergienko *Models and methods for solving problems in heterogeneous environments.* Kiev: Nauk. Dumka, 2001. 606 p.

5. V. Deineka, I. Sergienko, and V. Skopetsky *Models and methods of solving of problems with conjugate conditions.* Kyiv: Naukova Dumka, 1998. 614 p.

6. N. Zhitarashu, S. Eidelman *Parabolic boundary value problems.* Kishinev: Shtiintsa. 1992. 327 p.

7. T. Zagorskiy *Mixed problems for systems of partial differential equations of the parabolic type.* Lvov University Press, 1961. 115 p.

8. S. Ivasishen *Green's matrix of parabolic problems.* Kiev: Vyscha Shkola, 1990. 199 p.

9. I. Konet *Hyperbolic boundary-value problems of mathematical physics in piecewise homogeneous spacial environments.* Kamenets-Podilsky: Abetka-Svit, 2013. 120 p.

10. I. Konet and T. Pylypiuk *Parabolic boundary value problems in piecewise homogeneous environments.* Kamenets-Podilsky: Abetka-Svit, 2016. 244 p.

11. I. Konet and M. Leniuk *Stationary and nonstationary temperature fields in cylindrical-circular areas.* Chernivtsi: Prut, 2001. 312 p.

12. I. Konet and T. Pylypiuk *Parabolic boundary value problems in piecewise homogeneous cylindrical-circular media.* Kamenets-Podilsky: Abetka-Svit, 2017. 80 p.

13. I. Konet and T. Pylypiuk *Parabolic boundary value problems in an unbounded piecewise homogeneous wedge-shaped solid cylinder.* Mathematical and computer modeling. Series: Physical and Mathematical Sciences: Coll. Science. pr. – Kamyanets-Podilsky: Kamyanets-Podil. nat. Univ. I. Ohiienko, 2019. Issue. 20. pp. 26-40.

14. O. Ladyzenskaya, V. Solonnikov, and N. Ural'ceva *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*. Moscow: Nauka, 1967. 736 p.

15. E. Landis *Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type*. Moscow: Nauka, 1971. 288 p.

16. M. Matiychuk *Parabolic and elliptic boundary value problems with features*. Chernivtsi: Prut, 2003. 248 p.

17. M. Perestiuk and V. Marynets' *The theory of equations of mathematical physics*. Kyiv: Lybid', 2006. 424 p.

18. I. Pukalskyi *The boundary value problems for unevenly parabolic and elliptic equations with degeneration and singularities*. Chernivtsi: Ruta, 2008. 253 p.

19. I. Sergienko, V. Skopetsky, and V. Deineka *Mathematic modeling and the study of processes in heterogeneous environments*. Kyiv: Naukova Dumka, 1991. 432 p.

20. I. Sneddon *Fourier transforms*. Moscow: IL, 1955. 668 p.

21. K. Tranter *Integral transformations in mathematical physics*. Moscow: Gostehteorizdat, 1956. 204 p.

22. A. Friedman *Partial differential equations of parabolic type*. Moscow: Mir, 1968. 428 p.

23. G. Shilov *Mathematical analysis. Second special course*. Moscow: Nauka, 1965. 328 p.

24. S. Eidel'man *Parabolic Systems*. Moscow: Nauka, 1964. 444 p.

Надійшло 09.11.2020

Gromyk A.P., Konet I.M., Pylypyuk T.M. *Parabolic boundary value problems in a piecewise homogeneous wedge-shaped solid cylinder*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 40–55.

The unique exact analytical solutions of parabolic boundary value problems of mathematical physics in piecewise homogeneous wedge-shaped solid cylinder were constructed at first time by the method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of main solutions (matrices of influence and Green matrices).

The cases of assigning on the verge of the wedge the boundary conditions of Dirichlet and Neumann and their possible combinations (Dirichlet – Neumann, Neumann – Dirichlet) are considered.

Finite integral Fourier transform by an angular variable $\varphi \in (0; \varphi_0)$, a Fourier integral transform on the Cartesian segment $(-l_1; l_2)$ by an applicative variable z and a hybrid integral transform of the Hankel type of the first kind on a segment $(0; R)$ of the polar axis with n points of conjugation by an radial variable r were used to construct solutions of investigated initial-boundary value problems.

The consistent application of integral transforms by geometric variables allows us to reduce the three-dimensional initial boundary-value problems of conjugation to the Cauchy problem

for a regular linear inhomogeneous 1st order differential equation whose unique solution is written in a closed form.

The application of inverse integral transforms restores explicitly the solution of the considered problems through their integral image.

The structure of the solution of the problem in the case of setting the Neumann boundary conditions on the wedge edges is analyzed.

Exact analytical formulas for the components of the main solutions are written and the theorem on the existence of a single bounded classical solution of the problem is formulated.

The obtained solutions are algorithmic in nature and can be used (using numerical methods) in solving applied problems.