Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 2, 24–39 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №2, 24–39

Городецький В.В., Колісник Р.С., Мартинюк О.В.

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу рівнянь параболічного типу з початковою умовою, яка задається в просторі узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

Ключові слова і фрази: нелокальна багатоточкова за часом задача, простір узагальнених функцій, фундаментальний розв'язок, рівняння параболічного типу.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *o.martynyuk@chnu.edu.ua*

1 Вступ

У теорії задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь та систем рівнянь на даний час одержано досить повні результати з питань коректної розв'язності, інтегрального зображення розв'язків та дослідження їх властивотей. При цьому часто початкові умови – початкові функції – мають особливості в одній або кількох точках і допускають регуляризацію у певних просторах узагальнених функцій типу розподілів Соболєва-Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій та ін. Отже, задача Коші для вказаних рівнянь має природну постановку і в класах початкових умов, які є узагальненими функціями скінченного або нескінченного порядків.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими або залежними лише від часової змінної коефіцієнтами часто використовуються простори типу S, введені І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим в [1]. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \to \infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}$, $\alpha > 0$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. У працях [2, 3, 4, 5, 6] встановлено, що простори типу S та S', топологічно спряжені до просторів типу S, є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовими змінними.

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55, 46T30.

Узагальненням задачі Коші для таких рівнянь є нелокальна багатоточкова за часом задача з умовою $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші), при цьому така умова трактується у класичному або слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція. Нелокальні за часом задачі відносяться до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (див., наприклад, [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]).

У даній статті досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівнянь з частинними похідними параболічного типу в просторах типу S та S', при цьому одержано результати, близькі до відомих у теорії задачі Коші для таких рівнянь з початковими умовами в просторах узагальнених функцій типу ультрарозподілів [4, 5]. Досліджено властивості фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі, доведено коректну розв'язність задачі, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу S'.

1. Простори типу S та S'. І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов у монографії [1] ввели простори нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які є підпросторами простору $S \equiv S(\mathbb{R})$ Л. Шварца швидко спадних на нескінченності функцій. Означимо деякі з них.

Для довільних $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \,\Big|\, \exists c > 0\ A > 0\ B > 0\, \forall \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \le c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}.$$

Простір S_α^β можна охарактеризувати ще й так [1, с. 210]: S_α^β складається з тих і лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(m)}(x)| \le c_1 B_1^m m^{m\beta} \exp\{-c_2|x|^{1/\alpha}\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c_1, B_1, c_2, залежними від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \le c_3 \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, c_3, a, b > 0, \{x,y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β нетривіальні, якщо $\alpha + \beta \ge 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, для довільних α, $\beta > 0$ правильною є рівність $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$ [2, с. 143–145].

Топологічна структура у просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову

$$\forall \overline{A} > A\ \forall \overline{B} > B: \ \ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \le c\overline{A}^k \overline{B}^m k^{k\alpha} m^{m\beta},\ x \in \mathbb{R}, \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k\varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k(B+\rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}}, \{\delta,\rho\} \subset \Big\{1, \frac{1}{2}, \dots\Big\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S^{\beta,B_1}_{\alpha,A_1}$ неперервно вкладається в $S^{\beta,B_2}_{\alpha,A_2}$ і $S^{\beta}_{\alpha} = \bigcup S^{\beta,B}_{\alpha,A}$.

Мультиплікатором у просторі S^{β}_{α} називається функція $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, якщо $g\psi \in S^{\beta}_{\alpha}$ для довільної функції $\psi \in S^{\beta}_{\alpha}$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором з S^{β}_{α} в S^{β}_{α}.

У просторах S^{β}_{α} визначена і є неперервною операція зсуву аргумента T_x: $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi+x)$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [1, с. 171, 172]) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду $(\varphi(x+h)-\varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x)$, $h \to 0$, справджуються для кожної функції $\varphi \in S^{\beta}_{\alpha}$ в сенсі збіжності за топологією простору S^{β}_{α}. У S^{β}_{α} визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими [1] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні); вони пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула $F[S^{\beta}_{\alpha}] = S^{\alpha}_{\beta}$, де

$$F[S^{\beta}_{\alpha}] := \Big\{\psi: \ \psi(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{i\sigma x}dx, \ \varphi \in S^{\beta}_{\alpha}\Big\},$$

при цьому оператор F: $S^{\beta}_{\alpha} \to S^{\alpha}_{\beta}$ э неперервним.

Символом $(S^{\beta}_{\alpha})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на відповідному просторі основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Якщо $f \in (S^{\beta}_{\alpha})'$, то до цього ж простору належать також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, зсув $f(ay+b)$, $a \neq 0$, добуток αf, де α – мультиплікатор у просторі основних функцій.

Оскільки в основному просторі S^{β}_{α} визначена операція зсуву аргумента T_x, то згортку узагальненої функції $f \in (S^{\beta}_{\alpha})'$ з основною функцією φ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\rangle \equiv \langle f_\xi, \varphi(x-\xi)\rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$$

(тут $\langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)$ позначає дію функціонала f на основну функцію $T_{-x}\check{\varphi}(\xi)$ як функцію аргумента ξ). Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргумента в просторі S^{β}_{α} випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Нехай $f \in (S^{\beta}_{\alpha})'$. Якщо $f * \varphi \in S^{\beta}_{\alpha}$, $\forall \varphi \in S^{\beta}_{\alpha}$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S^{β}_{α} випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S^{β}_{α}, то функціонал f називається згортувачем у просторі S^{β}_{α}.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S^{\beta}_{\alpha})'$ визначається за допомогою співвідношення $\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle$, $\forall \varphi \in S^{\alpha}_{\beta}$. Звідси випливає, що $F[f] \in (S^{\alpha}_{\beta})'$, якщо $f \in (S^{\beta}_{\alpha})'$, при цьому оператор F: $(S^{\beta}_{\alpha})' \to (S^{\alpha}_{\beta})'$ є лінійним і неперервним. Якщо узагальнена функція $f \in (S^{\beta}_{\alpha})'$ – згортувач у просторі S^{β}_{α}, то для довільної функції $\varphi \in S^{\beta}_{\alpha}$ правильною є формула $F[f*\varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$, при цьому $F[f]$ – мультиплікатор у просторі S^{α}_{β}.

2 Основні результати

Розглянемо рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t = P\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x), \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

де $P(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комлпексних чисел, який задовольняє умову "параболічності" [4]

$$\exists c > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{Re} P(x) \leq -c|x|^{2b}.$$

Зауважимо, що $|e^{P(x)}| = e^{\operatorname{Re} P(x)} \leq e^{-c|x|^{2b}}$,

$$\exists c_1 > 0 \ \forall z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : \ |e^{P(z)}| \leq e^{|P(z)|} \leq e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Тоді з огляду на теореми 1–3 з [1, с. 252–260], які є узагальненнями теореми Фрагмена-Ліндельофа, дістанемо, що ціла функція $e^{P(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, у комплексній площині задовольняє нерівність

$$|e^{P(z)}| \leq c_0 e^{-c_2|\sigma|^{2b} + c_3|\tau|^{2b}}, \ c_0, \, c_2, \, c_3 > 0. \tag{2}$$

З останньої нерівності та характеристики просторів S_α^β випливає, що $e^{P(\sigma)}$ є елементом простору S_α^β, де $1/\alpha = 2b$, тобто $\alpha = 1/(2b)$ і $1/(1-\beta) = 2b$, тобто $\beta = 1 - 1/(2b)$. Введемо позначення $p = 2b$, $1/q = 1 - 1/p$ (тобто $q = p(p-1) \equiv 2b/(2b-1)$), $1/p + 1/q = 1$. Отже, при вказаних обмеженням на поліном $P(\sigma)$ маємо, що $e^{P(\sigma)} \in S_{1/p}^{1/q}$.

Наприклад, якщо $P(-i\partial/\partial x) = -i(-i\partial/\partial x)^2 = \partial^2/\partial x^2$, тобто $P(\sigma) = -\sigma^2$, то рівняння (1) перетворюється в рівняння теплопровоідності $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$, при цьому функція $e^{-\sigma^2}$ є елементом простору $S_{1/2}^{1/2}$. Справді,

$$|e^{-z^2}| = |e^{-(\sigma+i\tau)^2}| = e^{-\sigma^2+\tau^2}, z \in \mathbb{C},$$

звідки й випливає, що $e^{-\sigma^2} \in S_{1/2}^{1/2}$.

Поставимо задачу: знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє нелокальну башатоточкову за часом умову

$$\mu u(0,x) - \mu_1 u(t_1,x) - \cdots - \mu_m u(t_m,x) = f(x), f \in S_{1/q}^{1/p}, \tag{3}$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$, де $u(0,x) := \lim\limits_{t \to +0} u(t,x)$, $\{\mu, \, \mu_1, \, \ldots, \, \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,T]$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа, причому $0 < t_1 < \cdots < t_m \leq T$, $\mu > m\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k$. Розв'язок задачі (1), (3) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)]$. Застосувавши формально до (1) перетворення Фур'є, знайдемо, що розв'язок задачі (1), (3) дається формулою

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} v(t,\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

де $v(t,\sigma) = c\exp\{tP(\sigma)\}$, $c = c(\sigma) = F[f]\Big(\mu - \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{t_kP(\sigma)\}\Big)^{-1}$. Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)]$, $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{tP(\sigma)\}, \quad Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{t_kP(\sigma)\}\Big)^{-1} \equiv \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_kQ_1(t_k,\sigma)\Big)^{-1}.$$

Тоді

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{i\sigma\xi}d\xi\Big)e^{-i\sigma x}d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\Big((2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{-i\sigma(x-\xi)}d\sigma\Big)f(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x)*f(x), \quad (t,x)\in\Omega.$$

Коректність проведених тут перетворень випливає з властивостей функції G, які наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції аргументу σ.

Із (2) випливає оцінка

$$|e^{tP(z)}| = |e^{P(z)}|^t \le \tilde{c}e^{-a_1t\sigma^{2b}+b_1t\tau^{2b}}, a_1 = c_2, b_1 = c_3, \tag{4}$$

$\tilde{c} = 1$, якщо $c_0 \in (0,1]$ і $\tilde{c} = c_0^T$, якщо $c_0 > 1$.

Лема 1. *Для функції $Q_1(t,\sigma) = \exp\{tP(\sigma)\}$, $t\in(0,T]$, $\sigma\in\mathbb{R}$, та її похідних (за змінною σ) правильними є оцінки*

$$|D_\sigma^sQ_1(t,\sigma)| \le c_1A_1^st^{s/p}s^{s/q}\exp\{-a_2t\sigma^p\},\ s\in\mathbb{Z}_+, p = 2b, q = p/(p-1), \tag{5}$$

де сталі $c_1, A_1, a_2 > 0$ не залежать від t.

Доведення. Внаслідок інтегральної формули Коші

$$D_\sigma^sQ_1(t,\sigma) = \frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{Q_1(t,z)}{(z-\sigma)^{s+1}}dz,\ s\in\mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $\sigma\in\mathbb{R}$. Використовуючи (4), отримуємо нерівності

$$|D_\sigma^sQ_1(t,\sigma)| \le \frac{s!}{R^s}\max_{z\in\Gamma_R}|Q_1(t,z)| \le \tilde{c}\frac{s!}{R^s}\exp\{-a_1t\sigma_0^p + b_1tR^p\},$$

де σ_0 – точка максимума функції $\exp\{-a_1t\xi^p\}$, $\xi\in[\sigma-R,\ \sigma+R]$. Зауважимо, що

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0, \ \text{якщо } |\sigma|\le R, \\ \sigma+R, \ \text{якщо } \sigma\le -R, \\ \sigma-R, \ \text{якщо } \sigma\ge R. \end{cases}$$

Далі скористаємося твердженням з [15, с. 144]: для довільних $\alpha > 0$ і $\gamma > 0$ існує стала $\beta > 0$ така, що для всіх x і ξ справджується нерівність $-\alpha(\xi - x)^p \le \gamma x^p - \beta \xi^p$. Поклавши тут $\xi = \sigma$, $x = R$, прийдемо до нерівності $-\alpha(\sigma - R)^p \le \gamma R^p - \beta \sigma^p$. Отже,

$$\exp\{-a_1 t\sigma_0^p\} \le \exp\{-a_2 t\sigma^p + a_3 tR^p\}, a_2, a_3 > 0.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le \tilde{c}\frac{s!}{R^s}\exp\{-a_2 t\sigma^p + b_2 tR^p\}, b_2 = b_1 + a_3.$$

Для кожного $s \in \mathbb{Z}_+$ функція $g_{t,s}(R) = R^{-s}\exp\{b_2 tR^p\}$ є диференційовною на $(0, +\infty)$, до того ж

$$\lim_{R\to+\infty} g_{t,s}(R) = +\infty,\ s \in \mathbb{Z}_+;\ \lim_{R\to+0} g_{t,s}(R) = \begin{cases} +\infty, & s \in \mathbb{N}, \\ 1, & s = 0. \end{cases}$$

Оскільки $g_{t,s}(R) > 0$, $R \in (0, +\infty)$, то ця функція досягає свого інфімуму, який знайдемо за допомогою методів диференціального числення:

$$\inf_{R>0} g_{t,s}(R) = \omega^s t^{s/p} s^{-s/p}, \omega = (pb_2 e)^{1/p}, p = 2b.$$

Таким чином,

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le \tilde{c}s!\inf_R g_{t,s}(R)\exp\{-a_2 t\sigma^p\} = \tilde{c}s!\omega^s t^{s/p} s^{-s/p}\exp\{-a_2 ts^p\}, s \in \mathbb{Z}_+.$$

Врахувавши формулу Стірлінга, знайдемо, що при фіксованому $s \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le c_1 A_1^s t^{s/p} s^{s/q}\exp\{-a_2 ts^p\}, (t,\sigma) \in \Omega,$$

де сталі $c_1 A_1, a_2 > 0$ не залежать від t. Лема доведена. □

Лема 2. *Функція Q_2 – мультиплікатор у просторі $S_{1/p}^{1/q}$.*

Доведення. З урахуванням (4) виконуються нерівності

$$Q_1(t_k,\sigma) \le \tilde{c}\exp\{-a_1 t_k\sigma^p\} \le 1, k \in \{1,\dots,m\}, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\mu > \sum\limits_{k=1}^m \mu_k$, то

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma) \le \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k < 1.$$

Далі, використовуючи поліноміальну формулу, знаходимо, що

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^\infty \mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k P(\sigma)}\right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\left(\mu_1 e^{t_1 P(\sigma)}\right)^{r_1}\dots\left(\mu_m e^{t_m P(\sigma)}\right)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!} \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m} Q_1(\lambda,\sigma),$$

де $\lambda := t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m$, $Q_1(\lambda,\sigma) = e^{\lambda P(\sigma)}$. Звідси та з (5) випливають нерівності

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le c_1 A_1^s s^{s/q} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_0^r \lambda^{s/p}}{r_1!\dots r_m!} \exp\{-\lambda a_1 \sigma^p\} \le$$

$$\le c_1 A_1^s s^{s/q} t_m^{s/p} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} r^{s/p} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!}, \ s \in \mathbb{N},$$

де $\mu_0 = \max\{\mu_1, \ldots \mu_m\}$. Далі скористаємося тим, що

$$\sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!} = m^r.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le c' A_1^s s^{s/q} \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^{s/p} = \tilde{c}_1 A_2^s s^{s/q}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

де $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$ (бо $\mu > m \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$), $c' = c_1 \mu^{-1}$, $\tilde{c}_1 = c' \sum\limits_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^{s/p}$, $A_2 = A_1 t_m^{1/p}$. З останньої нерівності та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $S_{1/p}^{1/q}$. Лема доведена. □

На підставі лем 1, 2 робимо висновок, що функція $Q_1(t,\sigma)$, як функція σ, є елементом простору $S_{1/p}^{1/q}$ (при кожному $t > 0$). Урахувавши (5), (6) та формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma) = \left| \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l Q_1(t,\sigma) D_\sigma^{s-l} Q_2(\sigma) \right| \le$$

$$\le c_1 \tilde{c}_1 \sum_{l=0}^{s} C_s^l A_1^l t^{l/p} l^{l/q} A_2^{s-l} (s-l)^{(s-l)/q} \exp\{-a_2 t \sigma^p\} \le$$

$$\le \tilde{b} \tilde{B}^s t^{\nu s/p} s^{s/q} \exp\{-a_2 t \sigma^p\}, \ \sigma \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}_+, \tag{7}$$

де $\tilde{b} = c_1 \tilde{c}_1$, $\tilde{B} = 2\max\{A_1, A_2\}$, $\nu = 0$, якщо $0 < t \le 1$ і $\nu = 1$, якщо $t > 1$.

Звідси випливає, що $G(t,\cdot) = F^{-1}[Q(t,\cdot)]$ є елементом простору $S_{1/q}^{1/p}$, оскільки $F^{-1}[S_{1/p}^{1/q}] = S_{1/q}^{1/p}$. Виділимо в оцінках похідних функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t. Для цього скористаємося спввідношенням

$$x^k D_x^s F[g](x) = i^{k+s} F[(\sigma^s g(\sigma))^{(k)}] = i^{k+s} \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s g(\sigma))^{(k)i} e^{ix\sigma} d\sigma, \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+, g \in S_{1/p}^{1/q}.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s} (-1)^s \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma.$$

Із результатів, наведених в [1, с. 243] випливає, що послідовність $m_{ks} = k^{k/q}s^{s/p}$ задовольняє нерівність

$$ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \leq \gamma(k+s), \quad \gamma > 0.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (7) та останню нерівність, знайдемо, що

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| = \left|\sum_{p=0}^{k} C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\right| \leq$$

$$\leq |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1}Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| + \frac{k(k-1)}{2!}s(s-1)|\sigma^{s-2}Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \dots \leq$$

$$\leq \tilde{b}\Big(\tilde{B}^k B_1^s t^{-s/p} t^{\nu k/p} m_{ks} + \tilde{B}^{k-1} B_1^{s-1} t^{-(s-1)/p} t^{\nu(k-1)/p} ks m_{k-1,s-1} +$$

$$+ \tilde{B}^{k-2} B_1^{s-2} t^{-(s-2)/p} t^{\nu(k-2)/p} \frac{k(k-1)}{2!} m_{k-2,s-2} + \dots\Big) \exp\Big\{-\frac{a_2}{2}t\sigma^p\Big\} =$$

$$= \tilde{b}\tilde{B}^k B_1^s t^{-s/p} t^{\nu k/p} m_{ks}\Big(1 + \frac{t^{1/p}}{\tilde{B}B_1 t^{\nu/p}} ks \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} +$$

$$+ \frac{t^{2/p}}{2!(\tilde{B}B_1)^2 t^{2\nu/p}} ks \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \frac{m_{k-2,s-2}}{m_{k-1,s-1}} (k-1)(s-1) + \dots\Big) \exp\Big\{-\frac{a_2}{2}t\sigma^p\Big\} \leq$$

$$\leq \tilde{b}\tilde{B}^k B_1^s t^{-s/p} t^{\nu k/p} m_{ks}\Big(1 + \frac{T^{(1-\nu)/p}\gamma}{\tilde{B}B_1}(k+s) + \frac{T^{2(1-\nu)/p}\gamma^2}{2!(\tilde{B}B_1)^2}(k+s)^2 + \dots\Big) \exp\Big\{-\frac{a_2}{2}t\sigma^p\Big\} \leq$$

$$\leq \tilde{b} L_1^k L_2^s t^{-s/p} t^{\nu k/p} k^{k/q} s^{s/p} \exp\Big\{-\frac{a_2}{2}t\sigma^p\Big\},$$

де

$$L_1 = \tilde{B}\exp\Big\{\frac{\gamma T^{(1-\nu)/p}}{\tilde{B}B_1}\Big\}, L_2 = B_1 \exp\Big\{\frac{\gamma T^{(1-\nu)/p}}{\tilde{B}B_1}\Big\}, B_1 = \Big(\frac{2}{a_2 pe}\Big)^{1/p},$$

$\nu = 0$, якщо $0 < t \leq 1$, та $\nu = 1$, якщо $t > 1$.

Тоді

$$|x^k D_x^s G(t,x)| \leq \tilde{b}_1 L_1^k L_2^s t^{-s/p} t^{\nu k/p} k^{k/q} s^{s/p} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big\{-\frac{a_2}{2}t\sigma^p\Big\} d\sigma =$$

$$= \tilde{b}_2 L_1^k L_2^s t^{-(s+1)/p} t^{\nu k/p} k^{k/q} s^{s/p}, \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$|D_x^s G(t,x)| \leq \tilde{b}_2 L_2^s t^{-(s+1)/p} s^{s/p} \inf_k \frac{L_1^k k^{k/q}}{(t^{-\nu/p}|x|)^k} \leq$$

$$\leq \tilde{c} L_2^s t^{-(s+1)/p} s^{s/p} \exp\{-d_0 (t^{-\nu/p}|x|)^q\}, s \in \mathbb{Z}_+,$$

сталі $\tilde{c}$, $L_2, d_0 > 0$ не залежать від t. Тут ми скористалися відомою нерівністю з [1, с. 204]

$$\inf_k \frac{L^k k^{k\omega}}{|x|^k} \leq L_0 \exp\{-l|x|^{1/\omega}\}, L_0, l > 0.$$

Таким чином, правильним є таке твердження.

Лема 3. *Для функції $G(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, та її похідних (за змінною x) правильними є нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \le \tilde{c} L_2^s t^{-(s+1)/p} s^{s/q} \exp\{-d_0(t^{-\nu/p}|x|)^q\}, s\in\mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

де сталі $\tilde{c}$, L_2, $d_0>0$ не залежать від t, $p=2b$, $q=p/(p-1)$, $\nu=0$, якщо $0<t\le 1$; $\nu=1$, якщо $t>1$.

Скориставшись зображенням функції Q_2, знайдемо, що

$$G(t,x)=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma=$$

$$=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{tP(\sigma)}\left(\mu-\sum_{k=1}^m \mu_k e^{t_kP(\sigma)}\right)e^{-ix\sigma}d\sigma=$$

$$=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{tP(\sigma)}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!}e^{(t_1r_1+\dots+t_mr_m)P(\sigma)}e^{-ix\sigma}d\sigma=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!}\tilde{G}(t_1r_1+\dots+t_mr_m+t,x),$$

де

$$\tilde{G}(t_1r_1+\dots+t_mr_m+t,x)=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{(t_1r_1+\dots+t_mr_m)P(\sigma)}e^{-ix\sigma}d\sigma,$$

$\tilde{G}(t,x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1), тобто $\tilde{G}(t,x)=F^{-1}[Q_1(t,\sigma)]$.

Наприклад, у випадку двоточкової задачі для рівняння теплопровідності ($m=1, \mu>\mu_1$, $P\Big(-i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^2=-\Big(-i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$) маємо, що $\tilde{G}(t,x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\Big\{-\dfrac{x^2}{4t}\Big\}$,

$$G(t,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\mu_1^r\tilde{G}(t+t_1r,x)=$$

$$=\frac{1}{2\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^r\frac{1}{\sqrt{\pi(t+rt_1)}}\exp\Big\{-\frac{x^2}{4(t+rt_1)}\Big\}, \mu>\mu_1, 0<t_1\le T.$$

Лема 4. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,x))=f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}, \forall f\in (S_{1/q}^{1/p})'.$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основою маємо

$$f*G(t,x)=\langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle, \quad \check{G}(t,\xi)=G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\cdot))=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f*G(t+\Delta t,\cdot))-(f*G(t,\cdot))]=$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle.$$

Оскільки $G(t,\cdot)$ як абсрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S^{1/p}_{1/q}$, диференційовна по t (озн. абстрактної функції див в [1]), то граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)] \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t,\xi),$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S^{1/q}_{1/p}$. Звідси, з урахуванням неперервності функціонала f, маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \langle f_\xi, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = \langle f_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\xi)\rangle = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

що й потрібно було довести. □

Лема 5. *У просторі $(S^{1/q}_{1/p})'$ справджується співвідношення:*

1) $G(t,\cdot) \to F^{-1}[Q_2]$, $t \to +0$;

2) $\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k G(t_k,\cdot) \to \delta, t \to +0$

(тут δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. 1. Урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S', для доведення твердження досить встановити, що

$$F[G(t,\cdot)] = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \longrightarrow Q_2(\cdot), t \to +0,$$

у просторі $(S^{1/q}_{1/p})'$. Для цього візьмемо довільну функцію $\varphi \in S^{1/q}_{1/p}$ і, скориставшись тим, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $S^{1/q}_{1/p}$, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\langle Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot),\varphi\rangle = \langle Q_1(t,\cdot), Q_2(\cdot)\varphi(\cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma \underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma = \langle 1, Q_2(\cdot)\varphi(\cdot)\rangle = \langle Q_2,\varphi\rangle.$$

Звідси вже випливає твердження 1 леми 5.

2. Урахувавши твердження 1, знайдемо, що в просторі $(S^{1/p}_{1/q})'$ справджується граничне співвідношення

$$\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k G(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^{m}\mu_k G(t_k,\cdot) =$$

$$= \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^{m}\mu_k F^{-1}[Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot)] = F^{-1}\Big[\mu Q_2(\sigma) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_l(t_k,\sigma)Q_2(\sigma)\Big] =$$

$$= F^{-1}[Q_2(\sigma)(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma))] =$$

$$= F^{-1}\Big[\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\Big)^{-1}\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\Big)\Big] = F^{-1}[1] = \delta.$$

Твердження 2 доведено. □

Зауваження 1. *Якщо* $\mu = 1$, $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$, *то задача* (1), (3) *вироджується в задачу Коші для рівняння* (1), *при цьому* $Q_2(\sigma) = 1$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $F^{-1}[1] = \delta$. *Отже, у випадку задачі Коші для рівняння* (1) *функція* $G(t,x) = F^{-1}[e^{tP(\sigma)}]$ *володіє властивістю:* $G(t,\cdot) \to \delta$ *при* $t \to +0$ *у просторів* $(S^{1/p}_{1/q})'$ *(відомий факт, див. [4]).*

Символом $(S^{1/p}_{1/q,*})'$ позначимо клас згортувачів у просторі $(S^{1/p}_{1/q})'$.

Наслідок 1. *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, f \in (S^{1/p}_{1/q,*})'.$$

Тоді в просторі $(S^{1/p}_{1/q})'$ *виконується граничне співвідношення*

$$\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot) \to f, t \to +0. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки $f \in (S^{1/p}_{1/q,*})'$, то

$$F[\omega(t,\cdot)] = F[f * G(t,\cdot)] = F[f] \cdot F[G(t,\cdot)] = F[f]Q(t,\cdot).$$

Тоді

$$F[\mu\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot) = \mu F[f]Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k F[f]Q(t_k,\cdot) =$$

$$= F[f]\Big(\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\Big).$$

При доведенні твердження 1 леми 5 встановлено, що $Q(t,\cdot) \to Q_2(\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі $(S^{1/q}_{1/p})'$. Тоді в цьому просторі справджується граничне співвідношення

$$F[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot)] \underset{t\to+0}{\longrightarrow} F[f]\Big(\mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\Big) =$$

$$= F[f]\Big(\mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\Big) = F[f]\Big(Q_2(\cdot)\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big)\Big) = F[f].$$

Звідси та з властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) в просторах типу S' випливає співвідношення (9).

Твердження доведено.

Функція $G(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, задовольняє рівняння (1). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}F^{-1}[Q(t,\sigma)]=F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big]=F^{-1}[P(\sigma)Q(t,\sigma)],$$

$$P\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)G(t,x)=F^{-1}[P(\sigma)F[G(t,x)]]=F^{-1}[P(\sigma)Q(t,\sigma)].$$

Отже,

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}=P\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)G(t,x),(t,x)\in\Omega,$$

що й потрібно було довести. □

Надалі функцію G називатимемо фундаментальним розв'язком нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (1).

З наслідку 1 випливає, що для рівняння (1) нелокальну багатоточкову за часом задачу можна сформулювати так: знайти функцію $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, яка задовольняє рівняння (1) та умову

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k u(t_k,\cdot)=f,\quad f\in(S^{1/p}_{1/q,*})', \tag{10}$$

де граничне співвідношення (10) розглядається в просторі $(S^{1/p}_{1/q})'$ (обмеження на параметри μ, μ_1, …, μ_m, t_1, …, t_m такі ж, як у випадку задачі (1), (3)).

Основний результат містить наступне твердження.

Теорема. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (1), (10) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x)=f*G(t,x),\ \ (t,x)\in\Omega.$$

де G – фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння (1).

Доведення. Насамперед переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (1). Справді (див. лему 4)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,x))=f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Оскільки f – згортувач у просторі $S^{1/q}_{1/p}$, то

$$P\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x)=F^{-1}[P(\sigma)F[f*G(t,\cdot)]]=F^{-1}[P(\sigma)F[f]F[G(t,\cdot)]]=$$

$$=F^{-1}[P(\sigma)F[f]Q(t,\sigma)]=F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\cdot)F[f]\Big]=$$

$$=F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\Big]\cdot F[f]\Big]=F^{-1}\Big[F\Big[f*\frac{\partial G}{\partial t}\Big]\Big]=f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, задовольняє рівняння (1).

З наслідку 1 випливає, що $u(t,x)$ задовольняє умову (10) у вказаному сенсі.

Із властивості неперервності згортки випливає, що u неперервно залежить від функції $f \in (S^{1/p}_{1/q,*})'$.

Доведемо, що задача (1), (10) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + P^*\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)v(t,x) = 0, (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega', 0 \le t < t_0, \tag{11}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \psi \in (S^{1/p}_{1/q,*})', \tag{12}$$

де P^* - звуження спряженого оператора до оператора P на простір $S^{1/p}_{1/q} \subset (S^{1/p}_{1/q})'$. Умову (12) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (11), (12) є розв'язною (див. [4]), при цьому $v(t,\cdot) \in S^{1/p}_{1/q}$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q^t_{t_0} : (S^{1/p}_{1/q,*})' \to S^{1/p}_{1/q}$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (S^{1/p}_{1/q,*})'$ розв'язок задачі (11), (12). Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$ і має властивості

$$\forall \psi \in (S^{1/p}_{1/q,*})' : \frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt} + P^*Q^t_{t_0}\psi = 0, \lim_{t\to t_0} Q^t_{t_0}\psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі $(S^{1/p}_{1/q})'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задачі (1), (10), який розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(S^{1/p}_{1/q,*})'$. Доведемо, що задача (1), (10) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(S^{1/p}_{1/q,*})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (1) при нульовій граничній умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$ при кожному $t \in (0,T]$. Застосуємо функціонал u до функції $Q^t_{t_0}\psi \in S^{1/p}_{1/q}$, де ψ – довільно фіксований елемент з простору $S^{1/p}_{1/q} \subset (S^{1/p}_{1/q,*})'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (1), (10), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}\psi\Big\rangle + \Big\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t}\Big\rangle = \langle Pu, Q^t_{t_0}\psi\rangle - \langle u, P^*Q^t_{t_0}\psi\rangle =$$

$$= \langle Pu, Q^t_{t_0}\psi\rangle - \langle Pu, Q^t_{t_0}\psi\rangle = 0, t \in [0,t_0).$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = \text{const} \equiv c$$

у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Отже, якщо в (1) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t\to +0}\langle u(t,\cdot), \psi\rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \langle u(t_k,\cdot), \psi\rangle = \mu c_0 - \sum_{k=1}^m \mu_k c_k = 0.$$

Звідси випливає, що $c_0 = c_1 = \cdots = c_m = 0$. Припустимо, що це не так. Наприклад, $c_0 \ne 0$. Тоді маємо співвідношення $\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \alpha_k = 0$, де $\alpha_k = c_k/c_0$, тобто $\mu = \sum_{k=1}^m \mu_k \alpha_k$.

Оскільки α_k – довільні сталі, а за умовою $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m$ – фіксовані параметри, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, то одержане протиріччя доводить, що $c_0 = 0$. Аналогічно доводимо, що $c_1 = c_1 = \dots = c_m = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0, \cdot), \psi \rangle = 0$ для довільного $\psi \in S_{1/q}^{1/p}$, тобто $u(t_0, \cdot)$ – нульовий функціонал з простору $(S_{1/q,*}^{1/p})'$. Оскільки $t_0 \in (0, T]$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t, \cdot) = 0$ для всіх $t \in (0, T]$. Теорема доведена. $\square$

Список літератури

[1] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

[2] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.

[3] Горбачук М.Л., Дудников П.И. О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 4. – С. 9–11.

[4] Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

[5] Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'яків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.

[6] Городецький В. В. Еволюційні рівняння в зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. – Чернівці: Рута, 2000. – 400 с.

[7] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 208 с.

[8] Белавин И.А., Капица С.П., Курдюмов С.П. Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1998. – Т. 38, № 6. – С. 885–902.

[9] Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

[10] Романко В.К. Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. – 1974. – **Т. 10**, N11. – С. 117–131.

[11] Романко В.К. Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений // Мат. заметки. – 1985. – Т. 37, № 7. – С. 727–733.

[12] Макаров А.А. Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 1. – С. 144–150.

[13] Чесалин В.И. Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 11. – С. 119–129.

[14] Ильків В.С., Пташник Б.И. Некоторая нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными // Сиб. мат. журн. – 2005. – **Т.46**, № 11. – С. 119–129.

[15] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

Список літератури

[1] *Gelfand I.M., Shylov G.E.* Spaces of basic and generalized functions. - M.: Fizmatgiz, 1958.- 307 p. (in Russian)

[2] *Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L.* Boundary-value problems for differential-operator equations. - K.: Science. Dumka, 1984. - 284 p. (in Russian)

[3] *Gorbachuk M.L., Dudnikov P.I.* On the initial data of the Cauchy problem for parabolic equations for which solutions are infinitely differentiable. Dokl AN USSR. Ser. A 1981, textbf4, 9–11. (in Russian)

[4] *Gorodetskiy V.V.* Boundary properties of solutions of parabolic-type equations smooth in the layer. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 225 p. (in Ukrainian)

[5] *Gorodetskiy V.V.* Sets of initial values of smooth solutions of differential-operator equations of a parabolic type. – Chernivtsi: Ruta, 1998. - 219 p. (in Ukrainian)

[6] *Gorodetskiy V.V.* Evolutionary equations in countable-normalized spaces of infinitely differentiable functions. – Chernivtsi: Ruta, 2000. – 400 c. (in Ukrainian)

[7] *Nakhushev A.M.* Equations of mathematical biology. - M.: Higher school, 1995. – 301 p. (in Russian)

[8] *Belavin I.A., Kapitsa S.P., Kurdyumov S.P.* A mathematical model of global demographic processes with considering of the spatial distribution // Zh. calculation mathematics. physics. - 1998. - V. 38, No. 6. - S. 885–902. (in Russian)

[9] *Dezin A.A.* General questions of the theory of boundary value problems. - M.: Nauka, 1980. – 208 p. (in Russian)

[10] *Romanko V.K.* Boundary-value problems for a class of differential operators // Differents. equations. – 1974. – V. 10, No. 11. – P. 117-131. (in Russian)

[11] *Romanko V.K.* Nonlocal boundary-value problem for some equations systems // Mat. zametki. – 1985. – V. 37, N 7. – P. 727–733. (in Russian)

[12] *Existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudodifferential equations.* Differents. uravneniya 1994. **30** (1), 144–150. (in Russian)

[13] *Chesalin V.I.* A problem with nonlocal boundary conditions for some abstract hyperbolic equations // Differ. equations. - 1979. – V. 15, No. 11. – P. 119–129. (in Russian)

[14] *Il'kiv V.S., Ptashnyk B.I. Some nonlocal two-point problem for systems of partial differential equations.* Sib. mat.zhurn 2005. – **46**, (1). 119–129. (in Russian)

[15] *Gelfand I.M., Shylov G.E.* Some questions of the theory of differential equations. – M.: Fizmatgiz, 1958. – 274 p. (in Russian)

Надійшло 12.11.2020

Gorodetskiy V.V., Kolisnyk R.S., Martynyuk O.V. *On a nonlocal problem for partial differential equations of parabolic type*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 24–39.

Spaces of S type, introduced by I.Gelfand and G.Shilov, as well as spaces of type S', topologically conjugate with them, are natural sets of the initial data of the Cauchy problem for broad classes of equations with partial derivatives of finite and infinite orders, in which the solutions are integer functions over spatial variables. Functions from spaces of S type on the real axis together with all their derivatives at $|x| \to \infty$ decrease faster than $\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}$, $\alpha > 0$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

The paper investigates a nonlocal multipoint by time problem for equations with partial derivatives of parabolic type in the case when the initial condition is given in a certain space of generalized functions of the ultradistribution type (S' type). Moreover, results close to the Cauchy problem known in theory for such equations with an initial condition in the corresponding spaces of generalized functions of S' type were obtained. The properties of the fundamental solution of a nonlocal multipoint by time problem are investigated, the correct solvability of the problem is proved, the image of the solution in the form of a convolution of the fundamental solution with the initial generalized function, which is an element of the space of generalized functions of S' type.