Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 2, 14–23 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №2, 14–23

Бігун Я.Й., Скутар І.Д.

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ЛОКАЛЬНО-ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ

У роботі розглядається багаточастотна система із лінійно перетвореними аргументами запізнюючого типу. Для повільних змінних задано багатоточкові умови, решта умов інтегральні і задані на двох проміжках із проміжку [0,L] визначення системи рівнянь.

Усереднення за швидкими змінними здійснено як у системі рівнянь, так і в інтегральних умовах. Доведено існування єдиного розв'язку усередненої і точної задач. Одержано, явно залежну від малого параметра, оцінку похибки методу усереднення.

Ключові слова і фрази: метод усереднення, інтегральна умова, багаточастотна система, резонанс, малий параметр, лінійно перетворений аргумент, осциляційний інтеграл.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *y.bihun@chnu.edu.ua, i.skutar@chnu.edu.ua*

Вступ

Дослідження методом усереднення багаточастотних систем вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a, \varphi),$$

де $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$ – $m-$вимірний тор, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\tau = \varepsilon t$ відображено в багатьох працях, наприклад [1, 2, 3, 4]. Розглянуто випадки, коли $\tau \in [0, L]$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty]$ або $\mathbb{R}$, та задання початкових, багатоточкових або інтегральних умов [3].

Багаточастотні системи із лінійно перетвореними аргументами досліджувалися методом усереднення в працях [5, 6, 7] та ін.

Складністю дослідження Багаточастотні систем є притаманні для них резонансні явища, які полягають у раціональній повній чи майже співвимірності частот. Внаслідок цього розв'язок усередненої за швидкими змінними системи рівнянь у загальному випадку може відхилятися від розв'язку точної задачі на величину O(1). Підхід до дослідження таких систем, який грунтувався на оцінці відповідних осциляційних інтегралів, запропонований А.М. Самойленком [12], що дозволило отримати в працях А.М.

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39A21.

© Бігун Я.Й., Скутар І.Д., 2020

Самойленка і Р.І. Петришина ряд вагомих результатів для багаточастотних систем із початковими, крайовими та інтегральними умовами [3].

Для багаточастотних систем із запізненням аргументу метод усереднення обґрунтований у працях Я.Й. Бігуна, Р.І. Петришина, І.В. Краснокутської [3, 4, 5] та інших авторів.

Багаточастотні системи із лінійно перетвореними аргументами досліджувалися методом усереднення в працях [5, 6, 7] та ін.

Системи рівнянь із лінійно перетвореним аргументом зустрічаються в багатьох прикладних задачах, наприклад [8]. Дослідженню диференціальних рівнянь із різного типу інтегральними умовами присвячено значне число праць, наприклад [9, 10, 11]

У даній статті метод усереднення застосований для дослідженння розв'язності багаточастотних систем із довільною скінченною кількістю лінійно перетворених аргументів у повільних і швидких змінних й інтегральними умовами для повільних і швидких змінних на частинах проміжку [0, L] задання системи рівнянь. Отримано неполіпшувану оцінку похибки методу усереднення при накладених умовах, яка явно залежить від малого параметра і кількості лінійно перетворених аргументів у швидких змінних.

1 Постановка задачі

У даній роботі розглядається m-частотна, $m \geq 1$, система вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{2}$$

де $\tau \in [0, L]$, $a \in D$ - обмежена замкнена область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$ - m-вимірний тор, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $a_\Lambda = (a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_p})$, $\varphi_\Theta = (\varphi_{\theta_1}, \ldots, \varphi_{\theta_q})$, $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_p \leq 1$, $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_q \leq 1$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$. Вектор-функції X і Y визначені і достатньо гладкі за всіма змінними в області $G = [0, \tau] \times D^{pn} \times T^{qm}$ вектор-функції.

Задамо для системи рівнянь (1), (2) такі умови

$$\sum_{\nu=1}^{r} b_\nu a(\tau_\nu) = d_1, \quad 0 \leq \tau_1 < \tau_1 < \ldots \tau_l \leq L, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\xi \Big[\sum_{j=1}^{q} \beta_j(\tau)\varphi_{\theta_j}(\tau) + g_1(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau))\Big] d\tau + \\ &+ \int_\eta^L \Big[\sum_{j=1}^{q} \gamma_j(\tau)\varphi_{\theta_j}(\tau) + g_2(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau))\Big] d\tau = d_2, \end{aligned} \tag{4}$$

де $0 \leq \tau_1 < \cdots < \tau_r \leq L$, $0 < \xi < \eta < L$, $d_1 \in \mathbb{R}^n$, $d_2 \in \mathbb{R}^m$, $\sum\limits_{\nu=1}^{r} b_\nu \neq 0$, вектор-функції g_1 і g_2 задовольняють такі ж умови, як X і Y.

Усереднення в системі рівнянь (1), (2) й інтегральних умовах (4) здійснюється за швидкими змінними φ_{θ_j}. Одержимо значно простішу задачу

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \tag{5}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \tag{6}$$

$$\sum_{\nu=1}^{p} b_\nu \overline{a}(\tau_\nu) = d_1, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\xi \big[\sum_{j=1}^{q} \beta_j(\tau)\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau) + g_{10}(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau))\big]d\tau + \\ + \int\limits_\eta^L \big[\sum_{j=1}^{q} \gamma_j(\tau)\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau) + g_{20}(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau))\big]d\tau = d_2.\end{gathered} \tag{8}$$

Тепер можна окремо розв'язувати задачу (5), (7) для знаходження розв'язку $\overline{a}(\tau) = \overline{a}(\tau, \overline{y})$, $\overline{a}(0, \overline{y}) = \overline{y}$, після чого розв'язати задачу (6), (8) для знаходження розв'язку $\overline{\varphi}(\tau) = \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)$, $\overline{\psi}(\overline{y}, \varepsilon) = \overline{\varphi}(0, \overline{y}, \overline{\psi}(\overline{y}), \varepsilon)$.

Результат із обгрунтування методу усереднення отриманий на підставі методу оцінки осциляційних інтегралів, запропонований А.М. Самойленком [12], і розвинутий у його працях із Р.І. Петришиним [3].

2 Технічні леми

Лема 1. *Нехай* $c > 0$, $t_0 \geq 0$, $J = [t_0, T]$, $k_j \in C(J)$, $k_i(t) \geq 0$, *неспадні функції* $\alpha_i \in C^1(J)$, $t_0 \leq \alpha_i(t) \leq t$, $i = \overline{1,q}$, *і*

$$u(t) \leq c + \sum_{i=1}^{q} \int\limits_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} k_i(s)u(s)ds, t \in J. \tag{9}$$

Тоді для $t \in J$ *виконується нерівність*

$$u(t) \leq c \cdot exp\big[\sum_{i=1}^{q} \int\limits_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} k_i(s)ds\big]t.$$

Доведення. Застосуємо методику доведення із роботи [13]. Позначимо через $z(t)$ праву частину нерівності (9). Оскільки $z(t_0) = c$ і $z(t) > 0$, то

$$z'(t) = \sum_{i=1}^{q} k_i(\alpha_i(t))u(\alpha_i(t))\alpha_i'(t) \leq (\sum_{i=1}^{q} k_i(\alpha_i(t))\alpha_i'(t))z(t).$$

Нерівність (9) одержимо, інтегруючи нерівність

$$\frac{z'(t)}{z(t)} \le \sum_{i=1}^{q} k_i(\alpha_i(t))\alpha_i'(t), t_0 \le t \le T.$$

$\square$

Наслідок 1. *Нехай* $t_0 = 0$, $k_j = const > 0$, $\alpha_i(t) = \theta_i t$, $0 < \theta_i \le 1$, $i = \overline{1,q}$. *Тоді*

$$u(t) \le c \cdot exp\big[\sum_{i=1}^{q} k_i\theta_i\big]t. \tag{10}$$

Лема 2. *Нехай* $X_0 \in C^1_{a_\Lambda}(G)$, $G = [0, L] \times D^n$ *і* $\overline{a} = \overline{a}(\tau, \overline{y})$ *– розв'язок рівняння* (5) *із початковою умовою* $\overline{y} \in D$ *при* $\tau = 0$. *Тоді в області* $[0, L] \times D$ *правильна оцінка*

$$\|\frac{\partial \overline{a}(\tau, \overline{y})}{\partial \overline{y}}\| \le c_1. \tag{11}$$

Доведення. Із рівняння (5) маємо

$$\overline{a}(\tau, \overline{y}) = \overline{y} + \int_0^\tau X_0(s, \overline{a}_\Lambda(s, \overline{y}))ds,$$

звідки знаходимо

$$\frac{\partial \overline{a}(\tau, \overline{y})}{\partial \overline{y}} = I + \int_0^\tau \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_0(s, \overline{a}_\Lambda)}{\partial \overline{a}_{\lambda_i}} \frac{\partial \overline{a}_{\lambda_i}(s, \overline{y})}{\partial \overline{y}} ds.$$

Оцінка норми похідної набуває вигляду

$$\|\frac{\partial \overline{a}(\tau, \overline{y})}{\partial \overline{y}}\| \le 1 + \sum_{i=1}^{p} \sigma_1^{(i)} \int_0^\tau \|\frac{\partial \overline{a}_{\lambda_i}(s, \overline{y})}{\partial \overline{y}}\| ds = 1 + \sum_{i=1}^{p} \sigma_1^{(i)} \lambda_i^{-1} \int_0^{\lambda_i\tau} \|\frac{\partial \overline{a}(s, \overline{y})}{\partial \overline{y}}\| ds$$

На підставі нерівності (10) одержимо

$$\|\frac{\partial \overline{a}(\tau, \overline{y})}{\partial \overline{y}}\| \le exp\big(\sum_{i=1}^{p} \sigma_1^{(i)}\big)\tau \le exp\big(\sum_{i=1}^{p} \sigma_1^{(i)}\big)L = c_1.$$

$\square$

3 Існування розв'язку усередненої задачі (5), (7)

Доведемо, що при виконанні деяких умов, існує єдиний розв'язок усередненої задачі (5) - (8), що буде однією із умов доведення розв'язності задачі (1) - (4).

Теорема 1. *Нехай:*

1) на проміжку [0,L] існує єдиний розвязок початкової задачі (5), $\overline{a}(0) = \overline{y}$*:*

$$\|y\| \le c_1 := \|d_1\| + \sigma_1 \sum_{j=1}^{p} |b_j|\tau_j, \|\frac{\partial X_0(\tau, a_\Lambda)}{\partial a_{\lambda_j}}\| \le \sigma_1^{(i)}. \qquad (12)$$

2) виконується оцінка

$$2c_1\big(\sum_{j=1}^{r} |b_j|\tau_j\big)\big(\sum_{i=1}^{n} \sigma_1^{(i)}\big) \le 1;$$

3)

$$detQ(\xi, \eta) := det\big[\sum_{i=1}^{q} \big(\int_0^{\xi} \beta_i(\tau)d\tau + \int_{\eta}^{L} \gamma_i(\tau)d\tau\big)\big] \ne 0.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (5) – (8).

Доведення. Нехай $\overline{a}(\tau, \overline{y})$ – розв'язок рівняння (5), $\overline{a}(0, \overline{y}) = y$, на [0,L]. Питання існування і єдиності такого розв'язку розглянуто в [7]. Із умови (6) маємо

$$\overline{y} \ne \sum_{j=1}^{p} b_j \int_0^{\tau_j} X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau, \overline{y}))d\tau = d_1,$$

звідки одержимо

$$\overline{y} = \Phi(\overline{y}) := d_1 - \sum_{j=1}^{p} b_j \int_0^{\tau_j} X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau, \overline{y}))d\tau.$$

Оскільки (12) $\|\Phi(\overline{y})\| \le c_2$ при $\|\overline{y}\| \le c_2$. Покажемо, що при такому значенні $\overline{y}$ відображення Φ – стискаюче. Із вигляду Φ маємо

$$\frac{\partial \Phi(\overline{y})}{\partial \overline{y}} = -\sum_{j=1}^{p} b_j \int_0^{\tau_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_0(\tau, a_\Lambda)}{\partial a_{\lambda_j}} \frac{\partial a(\lambda, \tau)}{\partial \overline{y}} d\tau.$$

Застосувавши умову 2 й оцінки (11)

$$\|\frac{\partial \Phi(\overline{y})}{\partial \overline{y}}\| \le \sum_{j=1}^{p} |b_j| \int_0^{\tau_j} \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial X_0}{\partial a_{\lambda_j}}\| \cdot \|\frac{\partial \overline{a}_{\lambda_j}}{\partial \overline{y}}\| d\tau \le 1/2.$$

Отже, відображення Φ - стискаюче , тому для нього існує єдина нерухома точка $\overline{y}$, $\|\overline{y}\| \le c_2$.

Тепер знаходження розв'язку задачі (6), (8) зводиться до задачі інтегрування, якщо відоме початкове значення $\overline{\psi} = \varphi(0, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)$. Справді, із умови (8) маємо

$$Q(\xi, \eta)\overline{\psi} = d_2 - \int_0^{\xi} \big[\sum_{j=1}^{q} \big(\beta_j(\tau)\overline{\varphi}(\theta_j\tau, 0, \overline{y}, 0, \varepsilon) + g_{10}(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau, \overline{y}))\big]d\tau -$$

$$- \int_{\eta}^{L} \big[\sum_{j=1}^{q} \big(\gamma_j(\tau)\overline{\varphi}(\theta_j\tau, 0, \overline{y}, 0, \varepsilon) + g_{20}(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau, \overline{y}))\big]d\tau.$$

Оскільки $detQ(\xi, \eta) \ne 0$, то існує єдине початкове значення $\overline{\psi}$. $\square$

4 Існування і єдиність розв'язку задачі (1) - (4) та оцінка похибки методу усереднення

Припустимо, виконуються такі умови: 1) Вектор-функції $(X, Y, g_1, g_2) \in \mathbb{C}^{1,2,mq+2}_{r,a_\Lambda,\varphi_\Theta}(G, \sigma_1)$, сталою σ_1 обмежені норми функцій та їх похідних до відповідного порядку.

2) Існує єдиний розв'язок усередненої задачі (5) - (8), причому компонента розв'язку $\overline{a}(\tau, y)$ лежить в $\mathbb{D}$ разом із деяким ρ-околом.

3) Невиродженими є матриці $Q(\xi, \eta)$ і

$$P(\overline{y}) := \sum_{\nu=1}^{r} b_\nu \int\limits_0^{\tau_\nu} \frac{\partial X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau, \overline{y}))}{\partial \overline{y}} d\tau.$$

4) Визначник Вронського порядку mq, побудований за системою функцій $\{\omega(\theta_1\tau), \ldots, \omega(\theta_q\tau)\}$ відмінний від нуля на $[0, L]$.

Умова 4 забезпечує незастрягання розв'язку $a(\tau, \varepsilon)$ у малому околі резонансних поверхонь, які в точці $\tau \in [0, L]$ задаються умовами [7]

$$\sum_{\nu=1}^{q} \theta_\nu\big(k_\nu, \omega(\theta_\nu\tau)\big) = 0, k_\nu \in \mathbb{Z}^m, \sum_{\nu=1}^{q} \|k_\nu\| \neq 0. \tag{13}$$

На підставі умови 4 доводиться й оцінка похибки методу усереднення для початкової задачі, коли $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$, а саме [5, 6]

$$\|\chi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\chi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \leq c_3\varepsilon^\alpha, \tau \in [0, L], \tag{14}$$

де $\alpha = (mq)^{-1}$, $\chi(\tau, y, \psi, \varepsilon) = (a(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)), \overline{\chi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)) = (\overline{a}(\tau, y), \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon))$, $c_3 > 0$ і не залежить від ε. Така ж оцінка правильна і для похідних відхилення розв'язків точної й усередненої систем із однаковими початковими умовами.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1–4, матричні функції $\beta_i \in \mathbb{C}[0, \kappa]$, $\gamma_i \in \mathbb{C}[\eta, L]$*

Тоді для досить малого $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок задачі (1) - (4) *і* $\forall(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon^*]$ *виконується оцінка*

$$\|\chi(\tau, \overline{y} + \mu, \psi + \xi, \varepsilon) - \overline{\chi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\| \leq c_{19}\varepsilon^\alpha, \alpha = (mq)^{-1}. \tag{15}$$

Доведення. Для повільних змінних усередненої системи

$$\|\overline{a}(\tau, \overline{y} + \mu) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| \leq \|\mu\| + \sum_{i=1}^{p} \sigma_1 \int\limits_0^{\lambda_i\tau} \|\overline{a}(\tau, \overline{y} + \mu) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| d\tau \leq \|\mu\| L e^{p\sigma_1} \leq p/2,$$

якщо $\|\mu\| \leq c_4\rho, c_4 = e^{-p\sigma_1}/2L$.

Тоді із нерівності (14) для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $c_3\varepsilon_1^\alpha \leq \rho/2$,

$$\|\chi(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \eta, \varepsilon) - \overline{\chi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi} + \eta, \varepsilon)\| \leq 0.5c_3\varepsilon^\alpha. \tag{16}$$

Покажемо, що існують такі $\mu \in \mathbb{R}^n$ і $\eta \in \mathbb{R}^m$, що розв'язок $\chi(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\eta, \varepsilon)$ визначений на $[0, L]$ і задовольняє умови (3), (4). Підставивши вектор-функцію $a(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\eta, \varepsilon)$ в (3) і врахувавши (7), одержимо

$$\sum_{\nu=1}^{r} b_\nu\big(a(\tau_\nu, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\eta, \varepsilon) - \overline{a}(\tau_\nu, \overline{y}+\mu)\big) + \sum_{\nu=1}^{r} b_\nu\big(\overline{a}(\tau_\nu, \overline{y}+\mu) - a(\tau_\nu, \overline{y})\big) = 0.$$

На підставі умов 1 і 3 маємо $\mu = \Phi_1(\mu)$, де

$$\Phi_1(\mu) = -P^{-1}(\overline{y}) \sum_{\nu=1}^{r} b_\nu\big[R_2^{(\nu)}(\mu) + \big(a(\tau_\nu, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\eta, \varepsilon) - \overline{a}(\tau_\nu, \overline{y}+\mu)\big)\big].$$

Із умови 1 й оцінки (14) випливає, що

$$\|\Phi_1(\mu)\| \le c_6\big[\sum_{\nu=1}^{r} |b_\nu|(c_5\|\mu\|^2 + c_3\varepsilon^\alpha)\big] = c_7\|\mu\| + c_8\varepsilon^\alpha,$$

де $c_6 = \|P^{-1}(\overline{y})\|$, $c_7 = c_5 c_6 \sum\limits_{\nu=1}^{r} |b_\nu|$, $c_8 = c_3 c_6 \sum\limits_{\nu=1}^{r} |b_\nu|$.

Виберемо μ таке, що $\|\mu\| \le c_9\varepsilon^\alpha$, $c_9 = 2c_8$. Якщо

$$c_7 c_9^2 \varepsilon_2^\alpha \le c_8, \tag{17}$$

то для $\varepsilon \le \varepsilon_2$ маємо

$$\|\Phi_1(\mu)\| \le 2c_8\varepsilon^\alpha = c_9\varepsilon^\alpha,$$

тобто $\Phi_1 : S \to S$, де S - куля в $\mathbb{R}^n$ із центром у початку координат і радіусом $c_9\varepsilon^\alpha$.

Покажемо, що відображення є стискаючим. Маємо

$$\frac{\partial\Phi_1(\mu)}{\partial\mu} = -P^{-1}(\overline{y}) \sum_{\nu=1}^{r} b_\nu\big[\frac{\partial R_2^{(\nu)}(\mu)}{\partial\mu} + \frac{\partial}{\partial\mu}\big(a(\tau_\nu, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\eta, \varepsilon) - \overline{a}(\tau_\nu, \overline{y}+\mu)\big)\big].$$

Із виконання умови 1 і оцінок похідних матричних вектор функцій [?] випливає, що

$$\|\frac{\partial R_2^{(\nu)}(\mu)}{\partial\mu}\| \le c_{10}\|\mu\|.$$

Враховуючи нерівність (15) одержимо

$$\|\frac{\partial\Phi_1(\mu)}{\partial\mu}\| \le c_6 \sum_{\nu=1}^{r} |b_\nu|\big(c_{10}\|\mu\| + c_4\varepsilon^\alpha\big) \le 0.5,$$

якщо $\varepsilon \le \varepsilon_3 = (2c_6(c_9c_{10} + c_4) \sum\limits_{\nu=1}^{r} |b_\nu|)^{-1}$.

Отже, існує єдина нерухома точка відображення Φ_1, тобто єдине початкове значення $y = \overline{y}+\mu$ для компоненти $a(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ розв'язку системи рівнянь (1), (2), яке задовольняє умову (3)

Із (2), (5), і (4), (8) знаходимо рівняння для початкового значення $\psi = \overline{\psi} + \eta$ компоненти $\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ розв'язку рівняння (2), яка задовольняє умову (4), у вигляді $\eta = \Phi_2(\xi, \mu)$, де

$$\Phi_2(\xi,\mu) = -Q^{-1}(\kappa,\eta)\times\Big[\int\limits_0^{\kappa}\Big[\sum_{\nu=1}^{q}\beta_\nu(\tau)\int\limits_0^{\theta_\nu\tau}\big(Y(z,a_\Lambda,\varphi_\Theta) - Y_0(z,\overline{a}_\Lambda)\big)dz +$$

$$+\big(g_1(\tau,a_\Lambda,\varphi_\Theta) - g_{10}(\tau,\overline{a}_\Lambda)\Big] + \int\limits_\eta^{L}\Big[\sum_{\nu=1}^{q}\gamma_\nu(\tau)\int\limits_0^{\theta_\nu\tau}\big(Y(z,a_\Lambda,\varphi_\Theta) - Y_0(z,\overline{a}_\Lambda)\big)\Big]dz\Big]d\tau.$$

Із умови 1 теореми 2 та оцінок (14) і (15) одержимо

$$\|\int\limits_0^{\theta_\nu\tau}\big(Y(z,a_\Lambda,\varphi_\Theta) - Y_0(z,\overline{a}_\Lambda)\big)dz\| \le \sigma_1\theta_\nu p(c_3 + c_9 L\varepsilon^{p\sigma_1})\tau\varepsilon^\alpha + \|\int\limits_0^{\theta_\nu\tau}\widetilde{Y}(z,a_\Lambda,\varphi_\Theta)dz\|.$$

Якщо виконується умова 4, то на підставі оцінок осциляційних інтегралів [3, 5] та гладкості вектор-функції Y за всіма змінними одержимо

$$\|\int\limits_0^{s}\widetilde{Y}(z,a_\Lambda,\varphi_\Theta)dz\| := \|\sum_{k\neq 0}\int\limits_0^{s}Y_k(\tau,a_\Lambda)exp\big(i\sum_{\nu=1}^{q}(k_\nu,\varphi_\nu)\big)d\tau\| \le c_{11}s\varepsilon^\alpha.$$

Такі ж оцінки правильні для норм інтегралів g_1-g_{10} і g_2-g_{20} із сталою c_{12}.

У підсумку одержимо

$$\|\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)\| \le \|Q^{-1}\|\big[0.5c_{11}\sum_{\nu=1}^{q}Q_\nu(\kappa^2\max_{\tau\in[0,\kappa]}\|\beta_\nu(\tau)\| +$$

$$+(L-\eta)^2\max_{\tau\in[L-\eta,\eta]}\|\gamma_\nu(\tau)\|) + c_{12}(L+\kappa-\eta)\big]\varepsilon^\alpha = (\overline{c}c_{11} + \overline{\overline{c}}c_{12})\varepsilon^\alpha = c_{13}\varepsilon^\alpha$$

Покажемо, що для $\|\eta\| \le c_{13}\varepsilon^\alpha$ відображення Φ_2 є стискаючим. Розглянемо вираз

$$S := \int\limits_0^{c}\frac{\partial}{\partial\eta}\big(Y(z,a_\Lambda(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\eta),\varepsilon) - Y_0(z,\overline{a}_\Lambda(\tau,\overline{y}))\big)dz =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_0^{c}\sum_{k\neq 0}Y_k(z,a_\Lambda)exp\big(i\sum_{\nu=1}^{q}(k_\nu,\varphi_{\theta_\nu})\big)dz + \frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_0^{\tau}\big(Y_0(z,a_\Lambda) - Y_0(z,\tilde{a}_\Lambda)\big)dz,$$

$$\tilde{a}_\Lambda = \overline{a}_\Lambda(\tau,\overline{y}+\eta), S = S_1 + S_2.$$

Норма похідної S_1 оцінюється через оцінки осциляційних інтегралів і має порядок ε^α. Враховуючи, що $Y_0 \in C^2_{a_\Lambda}(G,\sigma_1)$ та оцінку для $\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\Lambda - \overline{a})$, одержимо при $0 < \tau \le s$

$$\|\frac{\partial P_2}{\partial\eta}\| \le p\sigma_1 c_3\varepsilon^\alpha + c_{14}\varepsilon^\alpha = c_{15}\varepsilon^\alpha,$$

де $c_{14} = c_{14}(c_3, c_{13}) > 0$.

Отже, при $0 < \tau \leq s$ маємо

$$\|\frac{\partial P}{\partial \eta}\| \leq \|\frac{\partial P_1}{\partial \eta}\| + \|\frac{\partial P_2}{\partial \eta}\| \leq c_{16} s \varepsilon^{\alpha},$$

де стала c_{16} - коефіцієнт в оцінці осциляційного інтеграла. Такі ж оцінки із сталою c_{17} одержуються для похідних по η для $g_1 - g_{10}$ і $g_2 - g_{20}$.

Якщо $\varepsilon \leq \varepsilon_4 = max(\varepsilon_1, c_{18}^{-mq}), c_{18}^{-1} = \overline{c}c_{16} + \overline{\overline{c}}c_{17}$, то

$$\|\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta}\| \leq \|Q^{-1}\| \Big[\int\limits_0^{\kappa} \sum_{\nu=1}^{q} \|\beta_\nu(\tau)\| Q_\nu \tau c_{16} \varepsilon^{\alpha} d\tau + c_{17} \kappa \varepsilon^{\alpha} +$$
$$+ \int\limits_{\eta}^{L} \sum_{\nu=1}^{\kappa} \|\gamma_\nu(\tau)\| Q_\nu \tau c_{16} \varepsilon^{\alpha} d\tau + c_{17}(L - \eta)\varepsilon^{\alpha} \leq \frac{1}{2} c_{18}^{-1} \varepsilon^{\alpha} \leq \frac{1}{2}$$

Отже, відображення Φ_2 є стискаючим при $\varepsilon \leq \varepsilon_4$, тому існує єдина нерухома точка $\eta \in \mathbb{R}^m$. Щодо оцінки похибки методу усереднення, то при $\varepsilon \leq \varepsilon^*$, $\varepsilon^* = min(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $\|\mu\| \leq c_9 \varepsilon^{\alpha}$, $\|\eta\| \leq c_{13} \varepsilon^{\alpha}$.

$$\|\chi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\chi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\| \leq$$
$$\leq \|\chi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\chi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| + \|\overline{\chi}(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\chi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\| \leq$$
$$\leq c_3 \varepsilon^{\alpha} + c_9 L e^{p\sigma_1} \varepsilon^{\alpha} + c_{13} \varepsilon^{\alpha} = c_{19} \varepsilon^{\alpha},$$

для всіх $0 \leq \tau \leq L$.

□

Зауваження 1. *Результати, одержані в теоремах 1 і 2 переносяться на випадок інтегральних умов, заданих на скінченій кількості проміжків, які не перетинаються.*

Список літератури

[1] E. Grebenikov, Y. Ryabov, Y. Mitropolskii. Introduction to Resonance Analytical Dynamics - Stability and Control : Theory, Methods and Applications. Yanus-K, Moscow, 1999.

[2] Khapaev M.M. Averaging in the theory of stability. Science, Moscow, 1986.

[3] Samoilenko A.M., Petryshyn R.I. Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems. Kluwer, Dordrecht–Boston–London, Netherlands, 2004.

[4] Neishtadt A.I. *Averaging, passage through resonances and capture into resonance in two-frequency system.* Russian Mathematical Surveys 2104, **69** (5), 771-843.

[5] Bihun Ya.Y. *Existence of solution and averaging of nonlinear multifrequency problems with delay.* Ukr. math. journal. 2007, **59** (4), 485-499.

[6] Bihun Ya.Y. *Existence of solution and averaging of multipoint boundary problems for multifrequency systems with a linearly transformed argument.* Nonlinear Oscillations 2008, **11** (4), 462-471.

[7] Ya.Y. Bihun, R.I. Petryshyn, I.V. Krasnokutska *Averaging in multifrequency systems with linearly transformed arguments and multipoint and integral conditions.* Bukovinian Mathematical Journal 2016, **4** (3-4), 30-35.

[8] Grebenshchikov B.G., Lozhnikov A.B. *Stabilization of a system containing constant and linear delay.* Differential Equations 2004, **40** (1-2), 1587-1595.

[9] Szatanik W. *Minimal and maximal solutions for integral boundary value problems for the second order differential equations with deviating arguments.* Dynamic Systems and Applications 2010, **19**, 87-96.

[10] Jankowski T. *FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS.* Dynamic Systems and Applications 2015, **24**, 195-210.

[11] Johnny Henderson and Rodica Luca. Boundary Value Problems for Systems of Differential, Difference and Fractional Equation. Kluwer, Dordrecht—Boston—London, Netherlands, 2016.

[12] Samoilenko A.M. *On the topic of substantiating the averaging method for multifrequency oscillatory systems.* Differential Equations 1987, **23** (2), 267-278.

[13] Pachpatte B.G. *Explicit Bounds on Certain Integral Inequalities.* J. Math. and Appl. 2002, **267**, 48-61.

Надійшло 14.12.2020

Yaroslav Bihun, Ihor Skutar *Averaging in multifrequency systems with delay and local integral conditions*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 14–23.

Multifrequency systems of differential equations were studied with the help of averaging method in the works by R.I. Arnold, Ye.O. Grebenikov, Yu.O. Mitropolsky, A.M. Samoilenko and many other scientists. The complexity of the study of such systems is their inherent resonant phenomena, which consist in the rational complete or almost complete commensurability of frequencies. As a result, the solution of the system of equations averaged over fast variables in the general case may deviate from the solution of the exact problem by the quantity O (1). The approach to the study of such systems, which was based on the estimation of the corresponding oscillating integrals, was proposed by A.M. Samoilenko, which allowed to obtain in the works by A.M. Samoilenko and R.I. Petryshyn a number of important results for multifrequency systems with initial , boundary and integral conditions.

For multifrequency systems with an argument delay, the averaging method is substantiated in the works by Ya.Y. Bihun, R.I. Petryshyn, I.V. Krasnokutska and other authors.

In this paper, the averaging method is used to study the solvability of a multifrequency system with an arbitrary finite number of linearly transformed arguments in slow and fast variables and integral conditions for slow and fast variables on parts of the interval [0, L] of the system of equations. An unimproved estimate of the error of the averaging method under the superimposed conditions is obtained, which clearly depends on the small parameter and the number of linearly transformed arguments in fast variables.