К.Г. Геселева, І.М. Конет, С.О. Кріль

ВІДШУКАННЯ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ТИПУ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИМ МЕТОДОМ

У статті розглядається задача для лінійного інтегро-функціонального рівняння із заданим значенням шуканої функції за межами основного проміжку та обмеженнями (додатковими умовами) накладеними на шукану функцію. Ці обмеження носять інтегральний характер. Сформульовано основну та допоміжну задачі. Проведено поетапні міркування щодо взаємозв'язку цих задач. Стосовно величин, що входять у задану задачу вимагається, що вони задовольняють ряд необхідних умов. Показано, що при виконанні цих умов вихідна задача буде рівносильною деякому інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду з цілком неперервним оператором та додатковими умовами на шуканий розв'язок.

Крім основної задачі розглянуто також допоміжну задачу – задачу з керуванням, коли у випадку сумісності вводиться додаткова, корегуючи величина. Сформульовано та обґрунтовано умови сумісності вихідної задачі.

У роботі також приведено та обґрунтовано ітераційний, а саме метод послідовних наближень та колокаційно-ітеративний методи побудови наближених розв'язків вихідної задачі з обмеженнями. Вказано алгоритми цих методів та достатні умови їх збіжності. При цьому, використовуємо той факт, що вихідна задача при виконанні певних умов є рівносильною інтегральному рівнянню з обмеженнями. Зокрема метод буде збіжним при деякому фіксованому n, якщо одиниця не буде точкою спектру інтегрального оператора T. Вузли колокації вибираються у залежності від системи базисних функцій. Приведені методи побудови наближених розв'язків інтегро-функціонального рівняння з додатковими умовами можна успішно реалізувати на комп'ютерах, створивши відповідні програми. Слід зазначити, що запропоновані методи побудови наближених розв'язків інтегро-функціонального рівняння з додатковими умовами є достатньо ефективними. У подальшому можна перенести дослідження такого характеру на крайову задачу для диференціального рівняння з відхиленням аргументу нейтрального типу.

Ключові слова і фрази: Інтегро-функціональне рівняння з обмеженнями, інтегральне рівняння, основна задача, допоміжна задача, колокаційно-ітеративний метод, метод послідовних наближень, умови сумісності задачі..

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський, Україна
e-mail: *geseleva1702@gmail.com, konet51@ukr.net, krilso@i.ua*

УДК 517.968
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39, 45.

Вступ

Багато задач прикладного та теоретичного характеру зводиться до розв'язання різних класів диференціальних, інтегральних, інтегро-функціональних та функціонально-диференціальних рівнянь та їх систем. Останнім часом увагу дослідників привертають задачі з параметрами, з імпульсним впливом, задачі з обмеженнями. Теоретичні основи цих задач закладені у працях А.М. Самойленка [10], А.Ю. Лучки [6, 7, 8] та інших.

Одним з ефективних методів побудови наближених розвязків згаданих рівнянь та задач є проекційно-ітеративний метод та різні його варіанти та модифікації. Точний розв'язок таких рівнянь та задач, як правило, не вдається виразити через елементарні функції. Тому великого значення набули методи наближеного розв'язування цих задач, а також розробка і дослідження обчислювальних схем, які можна реалізувати за допомогою сучасних комп'ютерних програм.

Дослідженню проекційно-ітеративного методу та його узагальнень для лінійних операторних рівнянь в банаховому і гільбертовому просторах, а також застосуванню його до різних класів інтегральних і диференціальних рівнянь присвячені роботи А.Ю. Лучки [6, 7, 8], Н.С. Курпель [5] , О.Б. Поліщук [9] та інших. Основними результатами цих робіт є побудова алгоритмів згаданих методів, обчислювальних схем та встановлення необхідних, а також деяких достатніх умов збіжності методу, вивчення швидкості збіжності, встановлення оцінок похибок. До методів проекційно-ітеративного типу належить і колокаційно-ітеративний метод, який виник на основі поєднання звичайного методу послідовних наближень і методу колокації.

У ряді випадків досліджуються задачі в яких відомі додаткові умови щодо шуканого розв'язку. У зв'язку з цим постає проблема встановлення умов сумісності такої задачі. Основний підхід до дослідження задач з обмеженнями, як відомо, базується на тому, що задачу довизначають, вводячи в рівняння додаткові параметри, і потім встановлюють умови сумісності вихідної задачі та розробляють методи побудови її наближених розв'язків.

1 Постановка задачі

Широкий клас крайових задач для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу нейтрального типу зводиться до інтегро-функціональних рівнянь вигляду

$$y(x) = f(x) + p(x)y(h(x)) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt,\ x \in [a;b], \tag{1}$$

$$y(x) = 0,\ x \notin [a;b]. \tag{2}$$

Стосовно розв'язку цього рівняння може бути відома додаткова інформація, зокрема

$$\int_a^b \Phi_q(t)y(t)dt = \alpha_q,\ q = \overline{1,m}, \tag{3}$$

де $f : [a;b] \Rightarrow R$, $K : [a;b]^2 \Rightarrow R$ – задані, а $y : [a;b] \Rightarrow R$ – шукана функції, $\Phi_q : [a;b] \Rightarrow R$ і $\alpha_q \in R$, $q = \overline{1,m}$ – відомі система лінійно-незалежних функцій та множина дійсних чисел. Щодо функцій $p(x)$, $h(x)$ та $K(x,t)$ вважаємо, що вони, відповідно, на проміжку $[a;b]$ й у квадраті $[a;b]^2$ задовольняють умовам

$$|p(x)| \leq \overline{p}, \tag{4}$$

$h(x)$– диференційовна на $[a;b]$ і

$$h'(x) \geq l > 0,\ x - h(x) \geq \sigma > 0, \tag{5}$$

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x;t)dxdt = K^2 < \infty. \tag{6}$$

До інтегральних та інтегро-функціональних рівнянь з обмеженями типу (3) зводяться перевизначені задачі для диференціальних, інтегро-диференціальних та диференціально-функціональних рівняннь.

У ряді випадків, зокрема, коли шукається наближений розв'язок рівняння (1) з умовою (2), для спрощення процесу побудови цього розв'язку, бажано отримати додаткову інформацію щодо шуканого розв'язку. Покажемо, як таку інформацію можна отримати в описаному вище випадку [1, 2, 3, 4].

Перш за все покажемо, що рівняння (1) при виконання умов (2), (4)–(6) можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Тобто, має місце твердження

Теорема 1. *Задача (1)–(3) при виконанні умов (4)–(6) є рівносильною аналогічній задачі для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, тобто задачі*

$$y(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)y(t)dt,\ x \in [a;b],$$

$$\int_a^b \Phi_q(x)y(x)dx = \alpha_q,\ q = \overline{1,m}.$$

Так, крім інтегрального, цілком неперервного оператора K, який визначається формулою

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x;t)v(t)dt,\ \forall v(x) \in L_2(a;b), \tag{7}$$

будемо розглядати оператор S такий, що

$$(Sv)(x) = \left\{ \begin{array}{c} v(x),\ x \in [a;h^{-1}(a)], \\ v(x) - p(x)v(h(x)),\ x \in [h^{-1}(a);b], \end{array} \right. \tag{8}$$

$v(x)$–довільна функція з простору $L_2(a;b)$.

Зауважимо, що оператор S як і оператор K, діє із $L_2(a;b)$ в $L_2(a;b)$. Легко перевірити, що цей оператор є лінійним. Умови (4), (5) гарантують його обмеженість. Дійсно

$$\|S\| = \sup_{v \in L_2(a;b),\, v \neq 0} \frac{\|(Sv)(x)\|}{\|v(x)\|} \leq 1 + \sqrt{\frac{p^2(x)}{h'(x)}} \leq 1 + \frac{\overline{p}}{\sqrt{l}} < \infty.$$

Крім того, згадані умови говорять про те, що оператор S є оборотнім. Обернений до нього оператор S^{-1} має вигляд

$$(S^{-1}v)(x) = \left\{ \begin{array}{c} v(x),\ x \in [a;h^{-1}(a)], \\ v(x) + \sum_{i=1}^{s} v(h^i(x)) \prod_{k=0}^{i-1} p(h^k(x)),\ x \in \Delta_s,\ s = \overline{1,m}, \end{array} \right. \tag{9}$$

$$\Delta_s = (c_{s-1}; c_s),\ c_0 = a,\ c_s = h^{-1}(c_{s-1}),\ c_m = b,$$
$$h^k(x) = h(h^{k-1}(x)),\ s = \overline{1,m}.$$

Іншими словами, співвідношення (9) – це розв'язок функціонального рівняння

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = u(x),\ x \in [a;b],$$

$$y(x) = 0,\ x \notin [a;b],$$

($u(x)$– відома, $y(x)$– шукана функції) за допомогою методу кроків. Причому умова (3) гарантує той факт, що кількість кроків m скінченна і $m < \frac{b-a}{\sigma}$.

Неважко переконатися в тому, що оператор S^{-1} , як і оператор S є лінійним та обмеженим [4,5]. Таким чином, враховуючи вище зазначене, ми можемо розглядати рівняння (1) як операторне рівняння

$$(Sy)(x) = f(x) + (Ky)(x), \tag{10}$$

де, як і раніше, $f(x)$ – задана, $y(x)$ – шукана функції з $L_2(a;b)$.

Подієм на рівняння (10) оператором S^{-1} зліва, отримаємо

$$(S^{-1}Sy)(x) = (S^{-1}f)(x) + (S^{-1}Ky)(x),$$

тобто, прийдемо до рівняння

$$y(x) = g(x) + (Ty)(x), \tag{11}$$

де

$$g(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in [a; h^{-1}(a)], \\ f(x) + \sum_{i=1}^{s} f(h^i(x)) \prod_{k=0}^{i-1} p(h^k(x)),\ x \in \Delta_s,\ s = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{12}$$
$$s = \overline{1,m},\ \Delta_s = (c_{s-1}; c_s),\ c_0 = a,\ c_s = h^{-1}(c_{s-1}),\ c_m = b,$$
$$h^k(x) = h(h^{k-1}(x)).$$

Оператор T є цілком неперервним, його ядро має вигляд

$$T(x;t) = \begin{cases} K(x;t),\ x \in [a; h^{-1}(a)], \\ K(x;t) + \sum_{i=1}^{s} K(h^i(x);t) \prod_{k=0}^{i-1} p(h^k(x)),\ x \in \Delta_s,\ t \in [a;b]. \end{cases} \tag{13}$$

Тобто, рівняння (11) – це інтегральне рівняння виду

$$y(x) = g(x) + \int_a^b T(x;t)y(t)dt. \tag{14}$$

Тепер задамо лінійно-незалежну на $[a;b]$ систему функцій $\{\psi_q(x)\}_{q=1}^m$ і будемо поетапно домножати складові елементи рівняння (14) на ці функції з подальшим інтегруванням.

У результаті отримаємо додаткову інформацію у вигляді умов (3), в яких

$$\Phi_q(t) = \psi_q(t) - \int_a^b \psi_q(x)T(x;t)y(t)dx,\ \alpha_q = \int_a^b g(x)\psi_q(x)dx. \tag{15}$$

Ці умови, з урахуванням (12), (13), можна переформулювати стосовно складових елементів вихідного інтегро-функціонального рівняння (1) таким чином:

$$\Phi_q(t) = \psi_q(t) - \int_a^b \psi_q(x)K(x;t)dt-$$

$$-\sum_{s=1}^{m}\int_{c_{s-1}}^{c_s}\psi_q(x)\sum_{i=1}^{s}K(h^i(x);t)\prod_{k=0}^{i-1}p(h^k(x))dt, \tag{16}$$

$$\alpha_q = \int_a^b f(x)\psi_q(x)dx + \sum_{s=1}^{m}\int_{c_{s-1}}^{c_s}\sum_{i=1}^{s}f(h^i(x))\prod_{k=0}^{i-1}p(h^k(x))\psi_q(x)dx. \tag{17}$$

Зауваження 1. *Якщо одиниця – власне значення інтегрального оператора T рівняння (14), то доцільно розглядати це рівняння з умовами (3), в яких m дорівнює розмірності інваріантного підпростору.*

У випадку, коли існує функція $y : [a;b] \Rightarrow R$, яка є розв'язком рівняння (1) та задовольняє умовам (2), (3), то вихідну задачу (1) – (3) вважатимемо сумісною. Якщо ж рівняння (1) з умовою (2) не має розв'язків, або ж не виконуються умови (3), то дана задача не буде сумісною.

У загальному випадку задача (1) – (3), як некерована перенасичена задача, є несумісною, але при певних вихідних даних вона може бути сумісною і допустима можливість відшукання розв'язку з використанням того чи іншого методу. В силу сказаного виникають дві задачі:

1) встановлення умов, при виконанні яких задача (1) ? (3) має єдиний розв'язок;

2) розробка наближених методів розв'язання цієї задачі.

Ці питання і є основним об'єктом досліджень у цій статті.

2 Допоміжна задача

Розглянемо задачу

$$y(x) = u(x) + z(x),\ \int_a^b \Phi_q(t)y(t)dt = \alpha_q,\ q = \overline{1,m}, \tag{18}$$

де $z(x) \in L_2(a;b)$ – задана функція та визначимо керування (корегуючу функцію) $u(x)$ таким чином, щоб функція $y(x) \in L_2(a;b)$, задовольняла умовам (18). Керування $u(x)$ будемо шукати у вигляді

$$u(x) = \sum_{q=1}^{m}\lambda_q\xi_q(x). \tag{19}$$

Слід мати на увазі, що система функцій $\{\xi_q(x)\}_{q=1}^m \subset L_2(a;b)$ є лінійно-незалежною і знаходиться у нашому розпорядженні та підбирається таким чином, що задача (18) завжди матиме єдиний розв'язок. Очевидно, що для того щоб отримати цей розв'язок, достатньо перше рівняння (18) з урахуванням (19) підставити у другі умови (18). У результаті цього отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_a^b \Phi_q(t)\xi_i(t)dt = \alpha_q - \int_a^b \Phi_q(t)z(t)dt,\ q = \overline{1,m}. \tag{20}$$

Розв'язавши цю систему стосовно λ_i, $i=\overline{1,m}$ отримаємо

$$\lambda_i=\sum_{q=1}^{m}\beta_{iq}(\alpha_q-\int_a^b\Phi_q(t)z(t)dt),\ i=\overline{1,m}, \tag{21}$$

де β_{iq} – елементи матриці, оберненої до матриці системи (20). Далі підставляємо величини λ_i виразу (21) у формулу (19). У результаті будемо мати

$$u(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\xi_i(x)\beta_{iq}(\alpha_q-\int_a^b\Phi_q(t)z(t)dt). \tag{22}$$

Таким чином, розв'язок задачі (18) визначається формулами

$$u(x)=r(x)-\int_a^b R(x;t)z(t)dt, \tag{23}$$

$$y(x)=r(x)+\int_a^b G(x;t)z(t)dt, \tag{24}$$

де з урахуванням подання (22)

$$r(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\beta_{iq}\alpha_q\xi_i(x),\ R(x;t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\beta_{iq}\xi_i(x)\Phi_q(t), \tag{25}$$

$$G(x;t)=\delta(x-t)-R(x;t), \tag{26}$$

($\delta(x-t)$ – функція Дірака).

Проаналізувавши останні формули, приходимо до висновку, що матимуть місце співвідношення

$$\int_a^b R(x;t)\xi_q(t)dt=\xi_q(x),\ \int_a^b G(x;t)\xi_q(t)dt=0, \tag{27}$$

$$\int_a^b \Phi_q(t)R(x;t)dt=\Phi_q(x),\ \int_a^b \Phi_q(x)G(x;t)dt=0, \tag{28}$$

$$\int_a^b \Phi_q(x)r(x)dx=\alpha_q,\ q=\overline{1,m}. \tag{29}$$

Нехай $U_m(a;b)\subset L_2(a;b)$ – підпростір породжений системою лінійно незалежних функцій $\{\xi_q(x)\}_{q=1}^m$, тоді для кожної функції $z(x)\in L_2(a;b)$ матиме місце подання

$$z(x)=u(x)+v(x),\ u(x)\in U_m(a;b),\ v(x)\in V_m(a;b). \tag{30}$$

Тут $U_m(a;b)\oplus V_m(a;b)=L_2(a;b)$, причому

$$u(x)=\sum_{i=1}^{m}c_i\xi_q(x),\ \int_a^b v(x)\xi_q(x)dx=0,\ q=\overline{1,m}. \tag{31}$$

Із формул (30), (31) як логічний висновок, випливає істинність співвідношень

$$u(x)=\int_a^b P(x;t)z(t)dt,\ v(x)=\int_a^b Q(x;t)z(t)dt. \tag{32}$$

Зрозуміло, що оператори останніх рівностей – це оператори проектування елементів простору $L_2(a;b)$ на згадані вище підпростори. Їх ядра мають відповідно вигляд

$$P(x;t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\xi_i(x)\xi_j(t),\ Q(x;t) = \delta(x-t) - P(x;t). \tag{33}$$

Приймаючи до уваги (27) будемо мати:

$$\int_a^b R(x;t)u(t)dt = u(x),\ \int_a^b G(x;t)u(t)dt = 0,\ \forall u(x) \in U_m(a;b), \tag{34}$$

$$\int_a^b G(x;t)z(t)dt = \int_a^b G(x;t)v(t)dt,\ \forall z(x) \in L_2(a;b). \tag{35}$$

Слід відмітити той факт, що для довільної функції $y(x) \in L_2(a;b)$, яка задовольняє умовам (3), матиме місце наступна рівність

$$y(x) = r(x) + \int_a^b G(x;t)v(t)dt,\ v(x) = \int_a^b Q(x;t)y(t)dt. \tag{35}$$

Оскільки виконується співвідношення $y(x) = w(x) + v(x)$, $w(x) \in U_m(a;b)$, $v(x) \in V_m(a;b)$ і виконуються умови (3), то, зрозуміло, задача (23) при $z(x) = v(x)$ матиме єдиний розв'язок $u(x) = w(x)$, а також буде істинною формула (24). Узявши у цій формулі $z(x) = v(x)$, отримаємо вираз (36).

3 Задача, рівносильна початковій

Початкову задачу (1) – (3), з урахуванням (18), (12), (13) перепишемо у вигляді задачі (18), тобто рівносильної задачі

$$y(x) = u(x) + z(x),\ \int_a^b \Phi_q(t)y(t)dt = \alpha_q,\ q = \overline{1,m},$$

узявши у ній функцію $z(x)$, яка є розв'язком функціонального рівняння

$$z(x) - p(x)z(h(x)) = f(x) - u(x) + p(x)u(h(x)) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt, \tag{37}$$

яке розв'яжеться покроково скінченною кількістю кроків. Слід відмітити, що це рівняння є рівносильним рівнянню

$$z(x) = g(x) - u(x) + \int_a^b T(x;t)y(t)dt, \tag{38}$$

де $g(x)$ та $T(x;t)$ мають відповідно вигляд (12), (13).

Оскільки згідно припущення допоміжна задача (18) має єдиний розв'язок, який виражається формулами (23), (24), то підставляючи їх у співвідношення (38), отримаємо

$$z(x) = \varphi(x) + \int_a^b R(x;t)z(t)dt + \int_a^b\int_a^b T(x;\xi)G(\xi;t)d\xi dt, \tag{39}$$

де

$$\varphi(x) = g(x) - r(x) + \int_a^b T(x;t)r(t)dt. \tag{40}$$

Інтегральне рівняння (39) можна розглядати як систему рівнянь

$$z(x) = \varphi(x) + \int_a^b R(x;t)z(t)dt + \int_a^b F(x;t)v(t)dt, \tag{41}$$

тут $F(x;t) = \int_a^b T(x;\xi)G(\xi;t)d\xi$,

$$v(x) = h(x) + \int_a^b L(x;t)v(t)dt. \tag{42}$$

Для того, щоб отримати цю систему, достатньо використати властивість (35), згідно якої рівняння (39) набуває вигляду (41), далі проектуємо його на підпростір $V_m(a;b)$ та вводимо позначення

$$h(x) = \int_a^b Q(x;t)\varphi(t)dt,\ L(x;t) = \int_a^b Q(x;\xi)F(\xi;t)d\xi, \tag{43}$$

Тепер можна показати, що задача побудови розв'язку рівняння (42), яка задовільняє умовам

$$\int_a^b \Phi_q(x)\Big(\varphi(x) + \int_a^b F(x;t)v(t)dt\Big)dx = 0,\ q = \overline{1,m}, \tag{44}$$

є рівносильною відшуканню розв'язку задачі (1)– (3).

Зауваження 2. *Формули (39) – (41) можна записати у термінах вихідних величин початкового рівняння (1), тобто у вигляді відповідних інтегро-функціональних рівнянь, у яких фігурують функції $f(x)$, $p(x)$,$h(x)$. Для цього достатньо від функцій $g(x)$ та $T(x;t)$ шляхом елементарних перетворень, аналогічним приведеним вище, повернутися до згаданих величин f ,p ,h . Але якщо перехід від інтегро-функціонального рівняння (1) з умовою (2) до рівняння (14) вже здійснено, то доцільно подальші міркування проводити стосовно цього рівняння.*

Теорема 2. *Якщо рівняння (42) має єдиний розв'язок $v^*(x) \in V_m(a;b)$, який задовільняє умовам (44), то функція*

$$y^*(x) = r(x) + \int_a^b G(x^*;t)v^*(t)dt \tag{45}$$

буде розв'язком задачі (1) – (3), тобто задачі (14), (3). У цьому випадку функція

$$v^*(x) = \int_a^b Q(x;t)y^*(t)dt \tag{46}$$

задовільняє рівнянню (27) та умовам (44).

Доведення. Доведення. Дійсно, прийнявши до уваги співвідношення (28), (29) приходимо до висновку, що функція $y^*(x)$, яка визначається згідно формули (45) буде задовольняти умовам (3). Покажемо, що вона є розв'язком інтегро-функціонального рівняння (1) з умовою (2), тобто, вона є розв'язком інтегрального рівняння (14), оскільки останнє є еквівалентним (1), (2).

Спочатку переконаємось у тому, що має місце співвідношення

$$\int_a^b R(x;\eta)\Big(\varphi(\eta) + \int_a^b F(x;t)v^*(t)dt\Big)d\eta = 0, \tag{47}$$

яке безпосередньо слідує із умов (44) з урахуванням позначень (25). Далі, використавши формули (47), (40), (41), (46), (26), (35), (43) отримаємо наступне

$$g(x) - y^*(x) + \int_a^b T(x;t)y^*(t)dt = g(x) - r(x) - \int_a^b G(x;t)v^*(t)dt +$$

$$+ \int_a^b T(x;t)r(t)dt + \int_a^b T(x;t)\Big(r(t) + \int_a^b G(x;\xi)v^*(\xi)d\xi\Big)dt - \int_a^b T(x;t)r(t)dt =$$

$$= \varphi(x) + \int_a^b F(x;t)v^*(t)dt - \int_a^b R(x;\eta)\Big(\varphi(\eta) + \int_a^b F(\eta;t)v^*(t)dt\Big)d\eta - \int_a^b G(x;t)v^*(t)dt =$$

$$= \int_a^b G(x;\eta)\Big(h(\eta) + \int_a^b L(\eta;t)v^*(t)dt - v^*(\eta)\Big)d\eta = 0.$$

Оскільки функція $y^*(x)$ задовільняє умовам (3), то на підставі формули (36)

$$y^*(x) = r(x) + \int_a^b G(x;t)v^*(t)dt, \tag{48}$$

й із включення $r(x) \in U_m(a;b)$ та співвідношень (46), (48) будемо мати

$$v^*(x) = \int_a^b Q(x;\eta)\int_a^b G(\eta;t)v^*(t)dtd\eta. \tag{49}$$

Приймаючи до уваги формули (38), (42) та (48) отримаємо

$$\varphi(x) - \int_a^b G(x;t)v^*(t)dt + \int_a^b F(t;v^*(t))dt =$$

$$= g(x) - r(x) - \int_a^b G(x;t)v^*(t)dt + \int_a^b T(x;r(t))dt +$$

$$+ \int_a^b \Big(T(x;r(t)) + \int_a^b G(t;\xi)v^*(\xi)d\xi - T(x;r(t)\Big)dt =$$

$$= g(x) - y^*(x) + \int_a^b T(x;y^*(t))dt = 0. \tag{50}$$

Далі, з урахуванням формул (43),(49) та (50) матимемо

$$h(x) + \int_a^b L(x;v^*(t))dt - v^*(x) =$$

$$= \int_a^b Q(x;\eta)(\varphi(\eta) + \int_a^b F(x;v^*(t))dt - \int_a^b G(\eta;t)v^*(t)dt)d\eta = 0,$$

тобто, $v^*(x) \in V_m(a;b)$ – розв'язок рівняння (42), який задовольняє умовам (44). Теорему доведено. □

Теорема 3. *Вихідна задача (1) – (3) та задача (42), (44) є одночасно розв'язними.*

Доведення. Доведення. Так, нехай рівняння (42) має єдиний розв'язок $v^*(x) \in V_m(a;b)$, який задовольняє умовам (44). Тоді згідно попередніх міркувань функція $y^*(x) \in L_2(a;b)$, яка має вигляд (45), буде розв'язком задачі (1) – (3). Нехай ця ж задача, окрім цього розв'язку має ще один, інший розв'язок $\tilde{y}(x) \in L_2(a;b)$.Тоді, виходячи з формули (36), приходимо до висновку, що матиме місце наступна рівність

$$\tilde{y}(x) = r(x) + \int_a^b G(x;t)\tilde{v}(t)dt, \; \tilde{v}(x) = \int_a^b Q(x;t)\tilde{y}(t)dt. \tag{51}$$

Крім того, $\tilde{v}(x)$ є розв'язком рівняння (42), задовольняє умовам (44) і $\tilde{v}(x) \in V_m(a;b)$. Оскільки задача (42), (44) має єдиний розв'язок, то, зрозуміло, що $\tilde{v}(x) = v^*(x)$. Таким чином, приходимо до висновку, що й $\tilde{y}(x) = y^*(x)$, тобто задача (1) – (3) не може мати більше ніж один розв'язок.

Нехай існує єдиний розв'язок $y^*(x) \in L_2(a;b)$ рівняння (1), що задовольняє умовам (2), (3). Тоді, згідно попередніх міркувань, функція $v^*(x)$, яка виражається формулою (46) буде розв'язком задачі (42), (44). Нехай ця задача має ще один розв'язок $\tilde{v}(x) \in V_m(a;b)$, причому $\tilde{v}(x) \neq v^*(x)$. Тоді функція, що визначається співвідношенням (45) буде розв'язком задачі (1) – (3). Але аналіз рівностей

$$y^*(x) = w^*(x) + v^*(x), \; w^*(x) \in U_m(a;b),$$

$$\tilde{y}(x) = \tilde{w}(x) + \tilde{v}(x), \; \tilde{w}(x) \in U_m(a;b)$$

говорить про те, що $y^*(x) \neq \tilde{y}(x)$. Отже, вихідна задача (1) – (3) має два різних розв'язки, що протирічить припущенню.

Таким чином, з проведених вище міркувань випливає, що $v^*(x) = \tilde{v}(x)$, тобто задача (42), (44) також має єдиний розв'язок. Теорему доведено. □

4 Метод послідовних наближень

Застосуємо до задачі (1) – (3) метод послідовних наближень, згідно якого наближені розв'язки визначаємо з допоміжної задачі

$$y_k(x) = u_k(x) + z_k(x), \; \int_a^b \Phi_q(t)y_k(t)dt = \alpha_q, \; q = \overline{1,m}, \tag{52}$$

в якій $u_k(x) \in U_m(a;b)$ і $z_k(x)$ є розв'язком функціонального рівняння

$$z_k(x) - p(x)z_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt. \tag{53}$$

Початкове наближення визначаємо з задачі (52) при $k = 0$ та заданої функції $z_0(x) \in L_2(a;b)$.

У випадку, коли в задачі (52) керування $u_k(x)$ шукається у вигляді

$$u_k(x) = \sum_{q=1}^{m} \lambda_q^k \xi_q(x), \tag{54}$$

то для знаходження невідомих множників λ_q^k, $q = \overline{1,m}$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \int_a^b \Phi_q(t)\xi_q(t)dt = \alpha_q - \int_a^b \Phi_q(t)z_k(t)dt,\ q = \overline{1,m}. \tag{55}$$

Ця система, згідно раніше зробленого припущення, має єдиний розв'язок, тому послідовність наближених розв'язків визначається однозначно.

Можна показати, що коли задача (1) – (3) є сумісною й інтегральний оператор

$$(Lv)(x) = \int_a^b L(x;t)v(t)dt, \tag{56}$$

що відображає простір $V_m(a;b)$ в себе, є оператором стиску, то існуватиме єдиний розв'язок $y^*(x)$ задачі (1) – (3) і матимуть місце співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} y_k(x) = y^*(x),\ \lim_{k\to\infty} u_k(x) = 0. \tag{57}$$

5 Колокаційно-ітеративний метод

Згідно цього методу наближені розв'язки задачі (1) – (3) визначаємо з допоміжної задачі

$$y_k(x) = u_k(x) + z_k(x),\ \int_a^b \Phi_q(t)y_k(t)dt = \alpha_q,\ q = \overline{1,m}, \tag{58}$$

в якій керування $u_k(x) \in U_m(a;b)$ має вигляд

$$u_k(x) = \sum_{q=1}^{m} \lambda_q^k \xi_q(x), \tag{59}$$

а $z_k(x)$ – це розв'язок функціонального рівняння

$$z_k(x) - p(x)z_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)(y_{k-1}(t) + w_k(t))dt, \tag{60}$$

причому поправка $w_k(x)$ шукається у вигляді

$$w_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \eta_j(x). \tag{61}$$

Невідомі коефіцієнти a_j^k знаходимо з умов

$$w_k(x_i) = z_k(x_i) - y_{k-1}(x_i). \tag{62}$$

Тут $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{n}$ – відома система лінійно-незалежних функцій, x_i, $i=\overline{1,n}$ – вузли колокації.

Здійснивши певні перетворення, від формул (60) – (62) прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язавши яку знайдемо a_j^k, $j=\overline{1,n}$. А від формул (58), (59) перейдемо до системи рівнянь стосовно параметрів λ_q^k, $q=\overline{1,m}$.

Нехай система функцій $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{n}$ та $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{n}$, $\varphi_j(x)\in V_m(a;b)$ пов'язані між собою співвідношенням

$$\eta_j(x)=\sigma_j(x)+\varphi_j(x),\ \int_a^b \Phi_q(t)\eta_j(t)dt=0,\ q=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \tag{63}$$

тут $\sigma_j(x)\in U_m(a;b)$. У цьому випадку розв'язок задачі (58) визначається згідно формул

$$y_k(x)=r(x)+\int_a^b G(x;t)v_k(t)dt,\ v_k(x)=\int_a^b Q(x;t)z_k(t)dt, \tag{64}$$

але функція $v_k(x)\in V_m(a;b)$ знаходиться уже колокаційно-ітеративним методом для рівняння (42), тобто

$$v_k(x)=h(x)+\int_a^b L(x;t)(v_{k-1}(t)+\omega_k(t))dt, \tag{65}$$

$$\omega_k(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^k\varphi_j(x),\ v_k(x_i)-v_{k-1}(x_i)-\omega_k(x_i)=0, \tag{66}$$

x_i, $i=\overline{1,n}$– вузли колокації.

Так, розв'язуючи задачу (63), будемо мати

$$\eta_j(x)=\int_a^b G(x;t)\varphi_j(t)dt,\ j=\overline{1,n}. \tag{67}$$

Тому, з урахуванням формул (61), (67), та (66) отримаємо

$$w_k(x)=\int_a^b G(x;t)\omega_k(t)dt. \tag{68}$$

Отже, приймаючи до уваги співвідношення (68) та той факт, що

$$y_k(x)=r(x)+\int_a^b G(x;t)v_k(t)dt \tag{69}$$

матимемо

$$y_{k-1}(x)+w_k(x)=r(x)+\int_a^b G(x;t)(v_{k-1}(t)+\omega_k(t))dt. \tag{70}$$

Здійснивши ряд претворень, остаточно отримаємо

$$z_k(x)=\varphi(x)+r(x)+\int_a^b F(x;t)(v_{k-1}(t)+\omega_k(t))dt. \tag{71}$$

Оскільки $w_k(x) = \rho_k(x) + \omega_k(x)$, $\omega_k(x) \in U_m(a;b)$, $\rho_k(x) \in V_m(a;b)$, $z_k(x) - y_{k-1}(x) = \rho_k(x) + v_k(x) - v_{k-1}(x)$, тому умова (62) набуде вигляду (66). Слід також відмітити, що для керування $u_k(x)$ матиме місце рівність

$$u_k(x) = -\int_a^b R(x;\eta)(\varphi(\eta) + \int_a^b F(\eta;t)(v_{k-1}(t) + \omega_k(t))dt)d\eta. \tag{72}$$

Отже, якщо

$$\lim_{k\to\infty} v_k(x) = v^*(x),\ \lim_{k\to\infty} \omega_k(x) = 0, \tag{73}$$

то здійснюючи граничний перехід у формулах (64), (72) та враховуючи (73), будемо мати

$$\lim_{k\to\infty} y_k(x) = y^*(x),\ \lim_{k\to\infty} u_k(x) = u^*(x). \tag{74}$$

Якщо вихідна задача (1) – (3) є сумісною, то в останній формулі $u^*(x) = 0$, а функція $y^*(x)$ є розв'язком цієї задачі. Якщо ж задача несумісна, то додавши до правої частини рівняння (1) функцію $(Su^*)(x)$, отримаємо сумісну задачу. Іншими словами, задача

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = f_1(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt,\ x \in [a;b], \tag{75}$$

$$y(x) = 0,\ x \notin [a;b], \tag{76}$$

$$\int_a^b \Phi_q(x)y(x)dx = \alpha_q,\ q = \overline{1,m}, \tag{77}$$

де $f_1(x) = f(x) + u^*(x) - p(x)u^*(h(x))$ буде сумісною.

Якщо задача (1) – (3) сумісна, то згідно загальних положень теорії проекційно-ітеративних методів, існуватиме такий номер n_0, що для кожного фіксованого $n \geq n_0$ послідовність $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ побудована за допомогою методу (58) – (62) буде збігатися до розв'язку $y^*(x)$ цієї задачі.

6 Висновки

У проведених дослідженнях отримано умови сумісності задачі (1) – (3), умови збіжності методу та оцінки похибок наближень. Вони ґрунтуються на тому факті, що ця задача рівносильна аналогічній задачі для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Зокрема метод буде збіжним при деякому фіксованому n, якщо одиниця не є точкою спектру інтегрального оператора T рівняння (14). Вузли колокації $x_i \in (a;b)$, $i = \overline{1,n}$ вибираються у залежності від системи базисних функцій. Можна перенести дослідження на крайову задачу для диференціального рівняння з відхиленням аргументу нейтрального типу. Крім колокаційно-ітеративного методу, у статті розглянуто також ітераційний метод.

Список літератури

[1] Геселева К.Г. *Колокаційно-ітеративний метод розв'язування лінійних інтегро-функціональних рівнянь.* Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка,2017. **Вип.** 16, 41-48.

[2] Геселева К.Г. *Ітераційний метод розв'язування інтегро-функціональних рівнянь з додатковими умовами.* Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка,2018. **Вип.** 19, 42-50.

[3] Конет И.М., Геселева К.Г. *Коллокационный и коллокационно-итеративный методы решения интегро-функционального уравнения.* Часопіс «Веснік Брэсцкага універсітэта». Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. 2017, **№2** , 82–89.

[4] Кріль С.О. *Проекційно-ітеративний метод розв'язування сингулярних інтегро-функціональних рівнянь.* Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка : зб. за підсумками звіт. наук. конф. викл., докторантів і асп.: вип. 9, у 5 т. Кам'янець-Подільський, 2010. , **Том.** 1 , 74–76.

[5] Курпель Н.С. Прекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. Наукова думка, Київ, 1968.

[6] Лучка А.Ю. Прекционно-итеративные методы. Наукова думка, Київ, 1993.

[7] Лучка А.Ю. Прекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений . Наукова думка, Київ, 1980.

[8] Лучка А.Ю. Критерии сходимости проекционно-итеративного метода для нелинейных уравнений. (Препринт. АН УССР. Ин-т математики; 82.24), Київ, 1982.

[9] Поліщук О.Б. *Умови сумісності задачі з обмеженнями для сингулярних інтегральних рівнянь.* Нелінійні коливання. 2000,**Том.** 4, 511-514.

[10] Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Вища школа, Київ, 1987.

Список літератури

[1] Heseleva K.H. *Collocation-iterative method for solving linear integro-functional equations.* Mathematical and computer modeling. Series: Physical and Mathematical Sciences: Coll. Science. pr. - Kamyanets-Podilsky: Kamyanets-Podil. nat. Univ. I. Ogienko, 2017. **Issue** 16, 41-48.

[2] Heseleva K.H.*Iterative method for solving integro-functional equations with additional conditions.* Mathematical and computer modeling. Series: Physical and Mathematical Sciences: Coll. Science. pr. - Kamyanets-Podilsky: Kamyanets-Podil. I. Ogienko nat. Univ., 2018. textbf Issue 19, 42-50.

[3] Konet I.M., Heseleva K.H. *Collocation and collocation-iterative methods for solving the integro-functional equation.* Magazine "Bulletin of Brest University". Series 4. Physics. Mathematics. 2017, **№2**, 82–89.

[4] Krill S.O. *Projection-iterative method for solving singular integro-functional equations.* Scientific works of Kamyanets-Podilsky National University named after Ivan Ogienko: collection. following the report. Science. conf. lecturer, doctoral students and postgraduate students: vol. 9, in 5 vols. Kamyanets-Podilsky, 2010., **Vol.** 1, 74-76.

[5] Kurpel N.S. Projection-iterative methods for solving operator equations. Naukova Dumka, Kyiv, 1968.

[6] Luchka A.Y. Projection-iterative methods. Naukova Dumka, Kyiv, 1993.

[7] Luchka A.Y. Projection-iterative methods for solving linear differential and integral equations. Naukova Dumka, Kyiv, 1980.

[8] Luchka A.Y. Criteria for convergence of the projection-iterative method for nonlinear equations. (Preprint. Academy of Sciences of the USSR. Inst. Of Mathematics; 82.24), Kyiv, 1982.

[9] Polishchuk O.B. *Conditions for compatibility of the problem with constraints for singular integral equations.* Nonlinear oscillations. 2000, **Vol.** 4, 511-514.

[10] Samoilenko A.M. Differential equations with impulse action. Higher School, Kyiv, 1987.

Надійшло 05.11.2020

K.H. Heseleva, I.M. Konet, S.O. Kril *Finding approximate solutions of one type of integro-functional equations with limitations by collocation-interactive method*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 1 (2020), 41–54.

The article considers a problem for a linear integro-functional equation with a given value of the required function outside the main interval and constraints (additional conditions) imposed on the required function. These restrictions are integral. The main and auxiliary tasks are formulated. Step-by-step considerations have been made on the relationship between these tasks. For the values included in the given problem, it is required that they meet a number of necessary conditions. It is shown that under these conditions the initial problem will be equivalent to some integral Fredholm equation of the second kind with a completely continuous operator and additional conditions for the desired solution. In addition to the main problem, the auxiliary problem is also considered - the problem with control, when in case of compatibility an additional, correcting value is introduced. The conditions of compatibility of the initial problem are formulated and substantiated.

The article also presents and substantiates the iterative, namely the method of successive approximations and collocation-iterative methods of constructing approximate solutions of the initial problem with constraints. The algorithms of these methods and sufficient conditions for their convergence are indicated. In this case, we use the fact that the initial problem under certain conditions is equivalent to an integral equation with constraints. In particular, the method will be convergent for some fixed n if the unit is not a point of the spectrum of the integral operator T. The collocation nodes are chosen depending on the system of basis functions. These methods of constructing approximate solutions of the integro-functional equation with additional conditions can be successfully implemented on computers by creating appropriate programs. It should be noted that the proposed methods for constructing approximate solutions of the integro-functional equation with additional conditions are quite effective. In the future, we can transfer the study of this nature to the boundary value problem for a differential equation with a deviation of the argument of the neutral type.