Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 1, 102–109 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №1, 102–109

Івасишен С.Д.[1], Івасюк Г.П.[2], Коренюк Н. І.[1], Фратавчан Т.М.[2]

ТЕОРЕМИ ТИПУ ЛІУВІЛЛЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОРІДНОЇ МОДЕЛЬНОЇ $\vec{2b}$-ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

В області $\{(t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | -\infty < t \le T, -\infty < x_j < \infty, j \in \{1, \ldots, n-1\}, x_n > 0\}$ розглядається модельна крайова задача без початкових умов з нульовими крайовими умовами довільних порядків для однорідної $\overrightarrow{2b}$-параболічної за Ейдельманом системи рівнянь. Для розв'язків такої задачі встановлюються твердження типу теорем Ліувілля для гармонічних функцій.

Ключові слова і фрази: параболічна за Ейдельманом система рівнянь, модельна крайова задача без початкових умов, матриця Ґріна, анізотропний простір Гельдера зростаючих функцій, теорема типу Ліувілля.

[1] Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна

[2] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна.
e-mail: *ivasyshen.sd@gmail.com, h.ivasjuk@chnu.edu.ua, nataturchina@gmail.com, t.fratavchan@chnu.edu.ua*

Вступ

У працях [1, 2, 3, 4, 5] означено загальну модельну $\overrightarrow{2b}$-параболічну крайову задачу і для такої задачі побудовано й досліджено матрицю Ґріна, встановлено коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків в анізотропних за всіма незалежними змінними просторах Гельдера як обмежених, так і зростаючих при $|x| \to \infty$ функцій. Дослідженням охоплено також випадок задач без початкових умов.

У даній статті вищезазначені результати застосовуються до доведення теорем типу Ліувілля для розв'язків однорідної модельної $\overrightarrow{2b}$-параболічної задачі. У статті використовуються позначення, термінологія і результати з праць [1, 2, 3, 4, 5].

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K52, 35B53.

1 Постановка задачі і допоміжні відомості

Використовуватимемо такі позначення: $n, N, b_1, \ldots, b_n$ – задані натуральні числа, причому $n \geq 2$, s – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_j := s/b_j, j \in \{1, \ldots, n\}$; $\mathbb{Z}_+^n$ – сукупність усіх n-вимірних мультиіндексів $k := (k_1, \ldots, k_n)$; $\|k\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j k_j$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$; $\|\bar{k}\| := 2sk_0 + \|k\|$, якщо $\bar{k} := (k_0, k)$, де $k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, k \in \mathbb{Z}_+^n$; $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x' := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$; $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$; $\Pi_H^+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \in H, x \in \mathbb{R}_+^n\}, \Pi'_H := \{(t, x') \in \mathbb{R}^n | t \in H\}, x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, якщо $H \subset \mathbb{R}^1$; $\partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}, \partial_{t,x}^{\bar{k}} := \partial_t^{k_0} \partial_x^k, \partial_{t,x'}^{\bar{k}'} := \partial_t^{k_0} \partial_{x'}^{k'}$, якщо $\bar{k} = (k_0, k), \bar{k}' = (k_0, k'), k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, k \in \mathbb{Z}_+^n, k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}, t \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^n, x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ (тут, як звичайно, $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний дійсний евклідовий простір, а $\partial_y^l := \frac{\partial^l}{\partial y^l}$, якщо l – натуральне число та $y \in \mathbb{R}^1$); $A^0 := I_N \partial_t - \sum\limits_{\|k\|=2s} a_k \partial_x^k$, $B_j^0 := \sum\limits_{\|\bar{k}\|=r_j} b_{j\bar{k}} \partial_{t,x}^{\bar{k}}, j \in \{1, \ldots, m\}$, де a_k і $b_{j\bar{k}}$, – сталі матриці відповідно розміру $N \times N$ і $1 \times N$, I_N – одинична матриця порядку $N, r_1, \ldots, r_m$ – невід'ємні цілі числа; $r_0 := \max(0, r_1 - 2s, \ldots, r_m - 2s)$; p_0 і n_0 – найбільші порядки похідних відповідно за t і x_n у виразах $B_j^0, j \in \{1, \ldots, m\}$; $2b_n$ – найбільший порядок похідних за x_n у виразі A^0.

Розглядатимемо в області $\Pi_{(-\infty,T]}^+$ задачу без початкової умови

$$(A^0 u)(t, x) = 0, (t, x) \in \Pi_{(-\infty,T]}^+, \tag{1}$$

$$(B_j^0 u)(t, x)|_{x_n=0} = 0, (t, x') \in \Pi'_{(-\infty,T]}, j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{2}$$

і відповідну їй задачу в області $\Pi_{(t_0,T]}^+, t_0 < T$, з початковою умовою

$$(A^0 u)(t, x) = 0, (t, x) \in \Pi_{(t_0,T]}^+, \tag{3}$$

$$(B_j^0 u)(t, x)|_{x_n=0} = 0, (t, x') \in \Pi'_{(t_0,T]}, j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{4}$$

$$u(t, x)|_{t=t_0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}_+^n, \tag{5}$$

де u і φ – матриці-стовпчики висоти N і T – задане додатне число.

Припускається, що $m = b_n N$, система (1) є $\overrightarrow{2b}$-параболічною за Ейдельманом і диференціальні вирази $B_j^0, j \in \{1, \ldots, m\}$, задовольняють умову доповняльності з [2].

Нехай $H_{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}^{l+\lambda}(\bar{\Pi}_{(t_0,T]}^+, \mathbb{C}_{N1})$ – ваговий простір Гельдера, означений в [4]. У ньому l – невід'ємне ціле число, число $\lambda \in (0, 1), \vec{k}(t, \vec{a}) := (k_1(t, a_1), \ldots, k_n(t, a_n)), \vec{a} := (a_1, \ldots, a_n)$, $k_j(t, a_j) := c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} - a_j^{2b_j-1} t)^{-1/(2b_j-1)}, j \in \{1, \ldots, n\}$, а ваговою функцією є функція

$$\Psi(t, x) := \exp\{\sum_{j=1}^{n} k_j(t, a_j) |x_j|^{2b_j/(2b_j-1)}\}, t < T, x \in \mathbb{R}_+^n. \tag{6}$$

У статті [4] доведено, що для розв'язків задачі (3)–(5) з простору $H_{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}^{2s+l+\lambda}(\bar{\Pi}_{(t_0,T]}^+, \mathbb{C}_{N1})$, $l \geq r_0, \lambda \in (0, 1)$, справджується зображення

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t - t_0, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{\|k\| \leq r_0} R_k(t - t_0, (x' - \xi', x_n)) \partial_\xi^k \varphi(\xi)|_{\xi_n=0} d\xi' +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{\|k\| \leq r_0 - 2s} V_k(t - t_0, (x' - \xi', x_n)) \partial_\xi^k \varphi(\xi)|_{\xi_n=0} d\xi', (t, x) \in \Pi_{(t_0,T]}^+. \tag{7}$$

У формулі (7) G_0 – однорідна матриця Ґріна, R_k і V_k – матриці, які виражаються через ядра Пуассона $G_j, j \in \{1, \ldots, m\}$, за допомогою формул (23), (24), (28) і (30) з [5], причому $R_k = 0$ при $n_0 < 2b_n$ і $V_k = 0$ при $p_0 = 0$. Для матриць G_0, R_k і V_k в [1, 4] встановлено такі оцінки:

$$|\partial_{t,x}^{\bar{l}} G_0(t,x,\xi)| \le C_{\bar{l}}\, t^{-M-\|\bar{l}\|/(2s)} E_c(t, x-\xi), t>0, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+^n; \tag{8}$$

$$|\partial_{t,x}^{\bar{l}} R_k(t,x)| \le C_{\bar{l}} \sum_{\|k\| \le p \le r_0} t^{-M'-(\|\bar{l}\|-p)/(2s)} E_c(t,x), \|k\| \le r_0, \tag{9}$$

$$|\partial_{t,x}^{\bar{l}} V_k(t,x)| \le C_{\bar{l}} \sum_{\|k\| \le p \le r_0-2s} t^{-M'+1-(\|\bar{l}\|-p)/(2s)} E_c(t,x), \|k\| \le r_0-2s, t>0, x \in \mathbb{R}_+^n, \tag{10}$$

в яких $\bar{l} = (l_0, l)$ – довільний мультиіндекс з $\mathbb{Z}_+^{n+1}, M := \sum_{j=1}^{n} m_j/(2s), M' := \sum_{j=1}^{n-1} m_j/(2s)$, $E_c(t,x) := \exp\{-c \sum_{j=1}^{n} t^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\}$, $q_j := 2b_j/(2b_j-1), j \in \{1, \ldots, n\}$, $C_{\bar{l}}$ і c – деякі додатні сталі.

Якщо у виразах для функцій $k_j, j \in \{1, \ldots, n\}$, за c_0 взяти додатну сталу, меншу за сталу c з оцінок (8)–(10), а за $a_j, j \in \{1, \ldots, n\}$, – невід'ємні сталі такі, що $T < \min_j (c_0/a_j)^{2b_j-1}$, то для функції Ψ з формули (6) справджується нерівність

$$E_{c_0}(t-t_0, x-\xi)\Psi(t_0,\xi) \le \Psi(t,x), -\infty < t_0 < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+^n. \tag{11}$$

2 Теореми типу Ліувілля

Під теоремами типу Ліувілля розуміються твердження про визначення виду деяких класів функцій за їх асимптотичною поведінкою. Наведемо такого типу твердження для певних класів розв'язків задачі (1), (2). Оскільки розв'язками цієї задачі є стовпчики висоти N, то в наступних твердженнях термін "розв'язок u є многочленом" означає, що многочленами є всі елементи стовпчика u.

Теорема. *Нехай u – розв'язок задачі (1), (2), який для довільного $t_0 \in (-\infty, T)$ належить до простору $H^{2s+r_0+\lambda}_{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}(\bar{\Pi}^+_{(t_0,T]}, \mathbb{C}_{N1})$. Тоді правильні такі твердження:*

1) якщо справджуються нерівності

$$|u(t,x)| \le Ce^{\delta t}\Psi(t,x), (t,x) \in \Pi^+_{(-\infty,T]}, \tag{12}$$

$$|\partial_x^l u(t,x)|_{x_n=0}| \le Ce^{\delta t}\Psi(t,(x',0)), (t,x') \in \Pi'_{(-\infty,T]}, 0 < \|l\| \le r_0, \tag{13}$$

в яких $\delta > 0$ (у випадку, коли $p_0 = 0$ і $n_0 < 2b_n$, умова (13) відсутня), то $u \equiv 0$;

2) якщо виконуються нерівності (12) і (13) з $\delta = 0$, то $u(t,x)$ як функція t є многочленом степеня не вище $[r_0/(2s)]$ і як функція $x_j, j \in \{1, \ldots, n\}$, – многочленом степеня не вище $[r_0/m_j]$, де символом $[\cdot]$ позначається ціла частина числа;

3) якщо справджуються нерівності

$$|u(t,x)| \le C(T+1-t)^{\beta_0} \prod_{i=1}^{n} (1+|x_i|)^{\beta_i}, (t,x) \in \Pi^{+}_{(-\infty,T]}, \tag{14}$$

$$|\partial_x^l u(t,x)|_{x_n=0}| \le C(T+1-t)^{\beta_0} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|x_i|)^{\beta_i}, (t,x') \in \Pi'_{(-\infty,T]}, 0 < \|l\| \le r_0, \tag{15}$$

в яких $\beta_0 \ge 0$ *і* $\beta_i \ge 0$, *то* $u(t,x)$ *як функція* t *є многочленом степеня не вище* $[\beta_0]$ *і як функція* $x_j, j \in \{1,\dots,n\}$, *– многочленом степеня* $\min([\beta_j],[(\beta_0 + r_0/(2s) + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\beta_i/(2s))/m_j)]$.

Доведення. Для довільного $t_0 \in (-\infty, T)$ заданий розв'язок u задачі (1), (2) є розв'язком задачі (3)–(5) з $\varphi(\cdot) = u(t_0,\cdot)$, який належить до простору $H^{2s+r_0+\lambda}_{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}(\bar{\Pi}^{+}_{(t_0,T]}, \mathbb{C}_{N1})$. Тому для нього правильне зображення (7), тобто зображення

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-t_0,x,\xi)u(t_0,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{\|k\| \le r_0} R_k(t-t_0,(x'-\xi',x_n))\partial_\xi^k u(t_0,\xi)|_{\xi_n=0} d\xi' +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{\|k\| \le r_0-2s} V_k(t-t_0,(x'-\xi',x_n))\partial_\xi^k u(t_0,\xi)|_{\xi_n=0} d\xi', (t,x) \in \Pi^{+}_{(t_0,T]}. \tag{16}$$

Для доведення тверджень теореми будемо оцінювати доданки з формули (16) та їх похідні. При цьому використовуватимемо оцінки (8)–(10), нерівність (11) і такі нерівності:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (t-t_0)^{-M} E_{c_1}(t-t_0,x-\xi)d\xi \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-c_1 \sum_{j=1}^{n} |y_j|^{q_j}\}dy =: D,$$
$$-\infty < t_0 < t \le T, x \in \mathbb{R}^n_+; \tag{17}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (t-t_0)^{-M'} E_{c_1}(t-t_0,(x'-\xi',x_n))d\xi' = \exp\{-c_1(t-t_0)^{1-q_n}x_n^{q_n}\}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (t-t_0)^{-M'} \exp\{-c_1 \sum_{j=1}^{n-1} (t-t_0)^{1-q_j}|x_j-\xi'|^{q_j}\}d\xi' \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\{-c_1 \sum_{j=1}^{n-1} |y_j|^{q_j}\}dy' =: D', -\infty < t_0 < t \le T, x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{18}$$

де $c_1 > 0$. Останні нерівності отримуються за допомогою заміни $\xi_j = x_j + (t-t_0)^{1/(2b_j)}y_j$ змінних інтегрування $\xi_j, j \in \{1,\dots,n\}$.

Далі різні сталі, величини яких нас не цікавлять, будуть позначатись однаковими літерами.

Нехай (t,x) – довільно фіксована точка області $\Pi^+_{(-\infty,T]}$ і t_0 – довільно взяте число з проміжку $(-\infty,t)$, причому вважатимемо, що $t-t_0\geq 1$. Для $u(t,x)$ справджується зображення (16).

Якщо виконуються умови (12) і (13), то за допомогою (8)–(11), (16) і (17), (18) з $c_1=c-c_0$ маємо

$$|u(t,x)|\leq C_0e^{\delta t_0}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(t-t_0)^{-M}E_{c-c_0}(t-t_0,x-\xi)(E_{c_0}(t-t_0,x-\xi)\Psi(t_0,\xi))d\xi+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\leq r_0}\sum_{\|k\|\leq p\leq r_0}(t-t_0)^{-M'+p/(2s)}E_{c-c_0}(t-t_0,(x'-\xi',x_n))\times$$
$$\times(E_{c_0}(t-t_0,(x'-\xi',x_n))\Psi(t_0,(\xi',0)))d\xi'+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\leq r-2s}\sum_{\|k\|\leq p\leq r_0-2s}(t-t_0)^{-M'+1+p/(2s)}E_{c-c_0}(t-t_0,(x'-\xi',x_n))\times$$
$$\times(E_{c_0}(t-t_0,(x'-\xi',x_n))\Psi(t_0,(\xi',0)))d\xi'\Bigg)\leq$$
$$\leq C_0e^{\delta t_0}\Psi(t,x)(1+(t-t_0)^{r_0/(2s)})\xrightarrow[t_0\to-\infty]{}0. \tag{19}$$

Відзначимо, що при оцінюванні використовувалось те, що $t-t_0\geq 1$.

З (19) випливає, що $u(t,x)=0$, а оскільки точка (t,x) довільна з $\Pi^+_{(-\infty,T]}$, то $u\equiv 0$. Отже, доведено твердження 1) теореми.

Щоб довести твердження 2), застосуємо до всіх доданків формули (16) операції $\partial_t^{l_0}$ і $\partial_{x_j}^{l_j}$ з $l_0>r_0/(2s)$ і $l_j>r_0/m_j, j\in\{1,\dots,n\}$, і так само, як при виведенні оцінок (19), прийдемо до оцінок

$$|\partial_t^{l_0}u(t,x)|\leq C_1\Psi(t,x)((t-t_0)^{-l_0}+(t-t_0)^{-l_0+r_0/(2s)}),$$
$$|\partial_{x_j}^{l_j}u(t,x)|\leq C_1\Psi(t,x)((t-t_0)^{-l_jm_j/(2s)}+(t-t_0)^{r_0-m_jl_j/(2s)}), j\in\{1,\dots,n\}.$$

З цих оцінок при $t_0\to-\infty$ випливають рівності $\partial_t^{l_0}u(t,x)=0$ і $\partial_{x_j}^{l_j}u(t,x)=0, j\in\{1,\dots,n\}$, а з них – твердження 2) теореми.

Твердження 3) доводиться подібно. Застосовуючи до (16) операції $\partial_t^{l_0}$ і $\partial_{x_j}^{l_j}$ з $l_0>\beta_0+(r_0+\sum\limits_{i=1}^n m_i\beta_i)/(2s)$ і $l_j>(\beta_0+(r_0+\sum\limits_{i=1}^n m_i\beta_i)/(2s))/m_j, j\in\{1,\dots,n\}$, та оцінюючи результати за допомогою (8)–(10), (14), (15) і того, що $t-t_0\geq 1$, отримуємо

$$|\partial_t^{l_0}u(t,x)|\leq C_2\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(t-t_0)^{-M-l_0}E_c(t-t_0,x-\xi)(T+1-t_0)^{\beta_0}\prod_{i=1}^n(1+|\xi_i|)^{\beta_i}d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\leq r_0}\sum_{\|k\|\leq p\leq r_0}(t-t_0)^{-M'+p/(2s)-l_0}E_c(t-t_0,(x'-\xi',x_n))\times$$

$$\times(T+1-t_0)^{\beta_0}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\xi_i|)^{\beta_i}d\xi'+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\leq r_0-2s}\sum_{\|k\|\leq p\leq r_0-2s}(t-t_0)^{-M'+1+p/(2s)-l_0}E_c(t-t_0,(x'-\xi',x_n))\times$$

$$\times(T+1-t_0)^{\beta_0}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\xi_i|)^{\beta_i}d\xi'\Big)\leq$$

$$\leq C_2(T+1-t_0)^{\beta_0}\big((t-t_0)^{-l_0}I_1(t-t_0,x)+(t-t_0)^{-l_0+r_0/(2s)}I_2(t-t_0,x)\big),\qquad(20)$$

$$|\partial_{x_j}^{l_j}u(t,x)|\leq C_2(T+1-t_0)^{\beta_0}\big((t-t_0)^{-m_jl_j/(2s)}I_1(t-t_0,x)+$$
$$+(t-t_0)^{(-m_jl_j+r_0)/(2s)}I_2(t-t_0,x)\big),\,j\in\{1,\dots,n\},\qquad(21)$$

де

$$I_1(t,x):=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}t^{-M}E_c(t,x-\xi)\prod_{i=1}^n(1+|\xi_i|)^{\beta_i}d\xi,$$

$$I_2(t,x):=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}t^{-M'}E_c(t,(x'-\xi',x_n))\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\xi_i|)^{\beta_i}d\xi'.$$

Якщо в інтегралах $I_1(t-t_0,x)$ і $I_2(t-t_0,x)$ запровадити заміну змінних інтегрування ξ_j за формулами $\xi_j=x_j+(t-t_0)^{1/(2b_j)}y_j$, $j\in\{1,\dots,n\}$, і скористатись тим, що $t-t_0\geq 1$, то отримаємо

$$I_1(t-t_0,x)\leq\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-t_0)^{-M}E_c(t-t_0,x-\xi)\prod_{i=1}^n(1+|\xi_i|^{\beta_i})d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{-c\sum_{j=1}^n|y_j|^{q_j}\}\prod_{i=1}^n(1+|x_i+(t-t_0)^{1/(2b_i)}y_i|)^{\beta_i}dy\leq$$

$$\leq H_1(x)(t-t_0)^{\sum\limits_{i=1}^n(\beta_i/(2b_i))},\qquad(22)$$

$$I_2(t-t_0,x)=\exp\{-c(t-t_0)^{1-q_n}|x_n|^{q_n}\}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\exp\{-c\sum_{j=1}^{n-1}|y_j|^{q_j}\}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-1}(1+|x_i+(t-t_0)^{1/(2b_i)}y_i|)^{\beta_i}dy'\leq H_2(x')(t-t_0)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(\beta_i/(2b_i))},\qquad(23)$$

де

$$H_1(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-c\sum_{j=1}^{n}|y_j|^{q_j}\}\prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|+|y_i|)^{\beta_i}dy,$$

$$H_2(x') := \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\{-c\sum_{j=1}^{n-1}|y_j|^{q_j}\}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|x_i|+|y_i|)^{\beta_i}dy'.$$

Використавши нерівності (20)–(23) і те, що при $t-t_0\ge 1$

$$(T+1-t_0)^{\beta_0} = (T+1-t+t-t_0)^{\beta_0} \le (T+2-t)^{\beta_0}(t-t_0)^{\beta_0},$$

прийдемо до таких нерівностей:

$$|\partial_t^{l_0}u(t,x)| \le L(t,x)(t-t_0)^{\beta_0-l_0+(r_0+\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\beta_i)/(2s)}, \tag{24}$$

$$|\partial_{x_j}^{l_j}u(t,x)| \le L(t,x)(t-t_0)^{\beta_0-(m_jl_j-r_0-\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\beta_i)/(2s)}, j\in\{1,\dots,n\}, \tag{25}$$

де

$$L(t,x) := C_2(T+2-t)^{\beta_0}(H_1(x)+H_2(x')).$$

Оскільки $\beta_0 - l_0 + (r_0+\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\beta_i)/(2s) < 0$ і $\beta_0-(m_jl_j-r_0-\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\beta_i)/(2s) < 0$, то з нерівностей (24) і (25) після переходу до границі при $t_0\to-\infty$ отримуємо твердження 3) теореми.

3 Висновки

У статті розглянуто однорідну модельну $\overrightarrow{2b}$-параболічну крайову задачу без початкових умов. Запропоновано умови на розв'язки такої задачі, за яких ці розв'язки є нульовими або многочленами. Методика отримання такого типу результатів може використовуватися для загальніших $\overrightarrow{2b}$-параболічних крайових задач.

Список літератури

[1] Івасишен С. Д., Турчина Н.І. *Матриця Гріна модельної крайової задачі з векторною параболічною вагою.* Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017. **60** (4), 25–39; Те саме: S.D. Ivasyshen, N.I. Turchyna *Green's matrix for a model boundary-value problem with parabolic weight.* J. Math. Sci. 2020. **247** (1), 24–42; https:/doi.org//10.1007/s10958-020-04787-0.

[2] Турчина Н.І., Івасишен С.Д. *Про модельну крайову задачу з векторною вагою.* Буковинський мат. журн. 2017. **5** (3–4), 163–167.

[3] Турчина Н. І., Івасишен С. Д. *Коректна розв'язність модельної $\overrightarrow{2b}$-параболічної крайової задачі в просторах Гельдера.* Буковинський мат. журн. 2018. **6** (3–4), 152–164; https://doi.org/10.31861/bmj2018.03.152.

[4] Турчина Н. І., Івасишен С. Д. *Коректна розв'язність у просторах Гельдера зростаючих функцій модельних крайових задач з початковими умовами і без них для параболічної за Ейдельманом системи.* Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2019. **62** (2), 7–25.

[5] Turchyna N. I., Ivasyshen S. D. *On integral representation of the solutions of a model $\overrightarrow{2b}$-parabolic boundary value problem.* Carpathian Math. Publ. 2019. **11** (1), 193–203.

Список літератури

[1] S.D. Ivasyshen, N.I. Turchyna *Green's matrix for a model boundary-value problem with parabolic weight.* Math. Methods and Physicomech. Fields 2020. **60** (4), 25–39; same: S.D. Ivasyshen, N.I. Turchyna *Green's matrix for a model boundary-value problem with parabolic weight.* J. Math. Sci. 2020. **247** (1), 24–42; https:/doi.org//10.1007/s10958-020-04787-0.

[2] Turchyna N. I., Ivasyshen S. D. *On the model boundary value problem with vector weight.* Bukovinian Math. J. 2017. **5** (3–4), 63–167.

[3] Turchyna N. I., Ivasyshen S. D. *Correct solvability of a model $\overrightarrow{2b}$-parabolic boundary-value problem in Hölder spaces.* Bukovinian Math. J. 2018. **6** (3–4), 152–164; https:// doi.org/10.31861/bmj2018.03.152.

[4] Turchyna N. I., Ivasyshen S. D. *Correct solvability in Hölder spaces of growing functions of model boundary-value problems with and without initial conditions for a system parabolic in the sense of Eidelman.* Math. Methods and Physicomech. Fields. 2019. **62** (2), 7–25.

[5] Turchyna N. I., Ivasyshen S. D. *On integral representation of the solutions of a model $\overrightarrow{2b}$-parabolic boundary value problem.* Carpathian Math. Publ. 2019. **11** (1), 193–203.

Надійшло 09.11.2020

Ivasyshen S.D, Ivasiuk H.P., Koreniuk N. I., Fratavchan T.M. *Liouville-type theorems for solutions to the homogeneous model $\vec{2b}$-parabolic boundary-value problem*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 1 (2020), 102–109.

A model boundary-value problem without initial conditions and with zero boundary conditions for a homogeneous Eidelman $\vec{2b}$-parabolic system of equations is considered in the domain $\{(t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | -\infty < t \leq T, -\infty < x_j < \infty, j \in \{1, \ldots, n-1\}, x_n > 0\}$. The boundary conditions are given by differential expressions of arbitrary orders. The boundary conditions satisfy the complementarity condition of the Lopatinskii type for elliptic boundary-value problems. A proposition of the type of Liouville's theorems for analytic and harmonic functions is established for solutions of such a problem. In general, Liouville's theorems mean a statement about the determining of the form of some classes of functions with their asymptotic behavior. The proof of such theorems for solutions of the problem under consideration is based on the integral representation of the solutions and the arbitrariness of the initial hyperplane, through the values on which the representation of the solutions goes.