Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 1, 84–93 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №1, 84–93

Грод І.М., Кулик Г.М., Степаненко Н.В.

ЛІНЕАРІЗОВАНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ОКОЛІ БАГАТОВИМІРНОГО ТОРУ

Аналізується метод застосування квадратичних форм до дослідження регулярності лінійних розширень динамічних систем на торі. Запропоновано метод побудови множини регулярних систем з фіксованою функцією Ляпунова.

Ключові слова і фрази: Ключові слова і фрази: Квадратична форма, функція Гріна-Самойленка, регулярність системи, функція Ляпунова..

Ternopil Volodymyr Hnatiuk National Pedagogical University, Ternopil, Ukraine (Grod I.M.)
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine (Kulyk G.M., Stepanenko N.V.)
e-mail: *igrod@ukr.net (Grod I.M.), ganna_1953@ukr.net (Kulyk G.M.), nataliya.stepanenko@lll.kpi.ua (Stepanenko N.V.)*

ВСТУП

Питанням дослідження інваріантних многовидів динамічних систем присвячено багато робіт [1, 2, 3]. Введене в роботі [2] поняття функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори дозволило з єдиної точки зору викласти теорію збурення як диференційовних, так і неперервних інваріантних многовидів [6, 8, 10]. Ця функція дозволяє записати інваріантні многовиди в явному інтегральному вигляді, що дає можливість дослідження гладкості інваріантних многовидів, а також їх неперервну залежність від параметрів. Питання існування функції Гріна тісно повязане з питанням існування узагальненої функції Ляпунова, яка розглядається у вигляді квадратичних форм [1]. Такі форми можуть змінювати знак і вироджуватись в деяких точках, а їх похідна в силу системи рівнянь є знаковизначеною. Знання конкретного вигляду функції Ляпу-нова дозволяє оцінити величину збурення динамічних систем, при яких зберігаються обмежені інваріантні многовиди, а тому часто ставиться задача побудови таких функції Ляпунова [4, 5, 9]. Не дивлячись на глибокі теоретичні результати, які отримані в цьому напрямку [7, 8, 9], питання побудови функції Гріна і функції Ляпунова для лінійних розширень динамічних систем на торі залишається досі актуальними. Актуальність

УДК УДК 517.938
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34A30, 34C45, 34D09.

цього питання зростає ще й тому, що концепція "конструктивної матема-тики яка була відома ще з часів Гільберта, набула певного розповсюдження останнім часом у зв'язку з розвитком методики символьних обчислень та потреби у відповідних алгоритмах, не приймає чистих теорем існування в класичному вигляді і вимагає знання конкретних процедур, які б дозволяли побудову відповідного об'єкта.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вектор-функція $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), \ldots, a_m(\varphi)\}$, $m \geq 1$, є неперервною і 2π-періодичною по кожній змінній φ_i, $i = \overline{1,m}$. Квадратна матриця $A(\varphi)$є $n\times$-вимірною, елементами якої є неперервні дійсні скалярні функції, 2π-періодичні по кожній змінній φ_i, $i = \overline{1,m}$, $A(\varphi) \in C^0(T_m)$. Додатково припускаємо, що вектор-функція $a(\varphi)$ задовольняє умові Ліпшица, $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$. Розв'язок задачі Коші $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$ позначимо через $\varphi_t(\varphi_0)$. Матрицант лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi_0))x$ з вектором параметрів φ_0, позначимо $\Omega_\tau^t(\varphi_0)$, нормований в точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(\varphi_0)|_{t=\tau} = I_n$ де I_n-одинична n-вимірна матриця. Надалі будемо використовувати наступні позначення: $\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i$ - скалярний добуток в R^n, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $\|A\| = max_{\|x\|=1}\|Ax\|$ -норма матриці A, $C^1(T_m)$-простір дійсних функцій $f(\varphi)$ неперервно диференційовних і 2π-періодичних по кожній змінній φ_i, $i = \overline{1,m}$.

Означення 1. *[2] Система* (1) *має функцію Гріна-Самойленка $G_0(\tau,\varphi)$ задачі про інваріантні тори, якщо існує така матриця $C(\varphi) \in C^0(T_m)$, при якій функція*

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\ (\varphi_\tau(\varphi)) & , \tau \leq 0 \\ \Omega_\tau^0(\varphi)\left[(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n\right] & , \tau > 0 \end{cases} \tag{2}$$

задовольняє нерівність

$$\|G_0(\tau,\varphi)\| \leq K exp\{-\gamma|\tau|\}, \tag{3}$$

де $K, \gamma - const > 0$.

Означення 2. *[1] Система* (1) *є регулярною, якщо для неї існує єдина функція Гріна-Самойленка* (2)*. Якщо ж існує безліч різних функцій Гріна* (2)*, то систему* (1) *називають слабо регулярною.*

Як було зауважено вище, питання існування функції Гріна тісно пов'язане з питанням існування знакозмінних функції Ляпунова, які розглядається у вигляді квадратичних форм. Нагадаємо основне твердження.

Теорема 1. *[1] Система* (1) *буде регулярною тоді і тільки тоді, коли існує невироджена квадратична форма $V = \langle S(\varphi)x, x\rangle$, $detS(\varphi) \neq 0$,$S(\varphi) \in C^1(T_m)$, похідна якої в силу системи* (1) *є додатно визначеною, тобто виконується нерівність:*

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi)\right] x, x \right\rangle \geq \|x\|^2. \tag{4}$$

Паралельно з системою (1) розглянемо неоднорідну систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi_0))x + f(t) \tag{5}$$

Тоді функція Гріна задачі про обмежені розв'язки, для такої системи, має вигляд

$$G_t(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega^t_\tau(\varphi)(\varphi_\tau(\varphi)) & , \ \tau \leq t \\ \Omega^t_\tau(\varphi)[(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n] & , \ \tau > t \end{cases} \tag{6}$$

Далі, враховуючи, що має місце тотожність $G_0(\tau,\varphi_s(\varphi)) \equiv G_s(\tau+s,\varphi)$, то із нерівності (3) випливає оцінка для функції (6) :

$$\|G_t\left(\tau,\varphi\right)\| \leq Kexp\left\{-\gamma\left|t-\tau\right|\right\},$$

з тими ж додатними постійними K, γ.

Звідси слідує, що неоднорідна система диференціальних рівнянь (5), при кожній неперервній і обмеженій на R вектор-функції $f\left(t\right)$, має обмежений на R розв'язок, який можна записати в інтегральному вигляді:

$$x = x\left(t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t\left(\tau,\varphi_0\right) \ \cdot f\left(\tau\right) d\tau.$$

Таким чином, якщо при деякому фіксованому значенні φ_0 неоднорідна система (5) не при кожній неперервній і обмеженій на R вектор-функції $f\left(t\right)$ має обмежений на R розв'язок, то функції Гріна (2) система (1) не має. Підтвердженням цього є такий приклад.

Приклад 1. *Розглянемо систему*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega sin\varphi, \frac{dx}{dt} = xcos\left(\frac{n+1}{n}\varphi\right), \tag{7}$$

де $\omega = const > 0$, $n \in N$.

Якщо $n = 2m$ *– парне, то при значенні* $\varphi_0 = \pi m$ *одночасно виконуються дві рівності* $\omega sin\varphi_0 = 0$, $cos\left(\frac{n+1}{n}\varphi_0\right) = 0$, *а це означає, що система* (7) *не є регулярною. Нехай тепер у системі* (7) $n = 2m+1, m \in N$. *Позначимо* $a\left(t;\varphi_0\right) = cos\left[\frac{2m+2}{2m+1}\varphi_t\left(\varphi_0\right)\right]$, *тоді для розв'язків* $\varphi_t\left(\varphi_0\right)$ *першого рівняння системи* (7) *при початкових значеннях* $\varphi_0 \in \left(2m\pi,\left(2m+1\right)\pi\right)$ *отримуємо* $\varphi_t\left(\varphi_0\right)|_{t=-\infty} = 2m\pi$, $\varphi_t\left(\varphi_0\right)|_{t=+\infty} = \left(2m+1\right)\pi$. *Звідси слідує*

$$a\left(t;\varphi_0\right)|_{t=-\infty} = cos\frac{(2m+2)\times 2m}{2m+1}\pi = cos\left(\pi - \frac{\pi}{2m+1}\right) < 0,$$

$$a\left(t;\varphi_0\right)|_{t=+\infty} = cos\frac{(2m+2)\times(2m+1)}{(2m+1)}\pi = 1 > 0.$$

Це означає, що неоднорідне рівняння $\frac{dx}{dt} = a\left(t;\varphi_0\right)x + 1$ *при значеннях параметра* $\varphi_0 \in \left(2m\pi,\left(2m+1\right)\pi\right)$ *не має обмеженого на осі* $R = (-\infty,+\infty)$ *розв'язку. Звідси слідує, що система* (7) *не є регулярною при значеннях* $n = 2m+1, m \in N$. *Якщо ж в системі* (7) *покласти* $n = 1$, *то отримана система* $\frac{d\varphi}{dt} = \omega sin\varphi$, $\frac{dx}{dt} = xcos\left(2\varphi\right)$ *буде регулярною, оскільки похідна функції* $V = x^2 exp\left\{-\frac{4}{\omega}cos\varphi\right\}$*в силу даної системи є знаковизначеною:* $\dot{V} \geq 2x^2 exp\left\{-\frac{4}{\omega}\right\}$.

2 ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Продовжуючи дослідження в даному напрямку нагадаємо деякі результати, отримані роботах в [4, 5].

Теорема 2. *[5] Нехай для системи* (1) *існують $n\times n$-вимірні симетричні матриці $S_j(\varphi) \in C^1(T_m)$, $j=\overline{1,k}$, для яких виконуються нерівності:*

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S_j(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) + S_j(\varphi) A(\varphi) + A^T(\varphi) S_j(\varphi) \right] M_j(\varphi) x, M_j(\varphi) x \right\rangle \geq$$

$$\geq \|[M_j(\varphi) - M_{j+1}(\varphi)] x\|^2, j = \overline{1,(k-1)} \ ,$$

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S_k(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) + S_k(\varphi) A(\varphi) + A^T(\varphi) S_k(\varphi) \right] M_k(\varphi) x, M_k(\varphi) x \right\rangle \geq \|M_k(\varphi) x\|^2$$

з деякими $n\times n$-вимірними матрицями $M_j(\varphi) \in C^0(T_m)$, причому перша з цих матриць є невиродженою $det M_1(\varphi) \neq 0$. Тоді похідна в силу системи (1) *квадратичної форми*

$$V = p_1 \langle S_1(\varphi) x, x\rangle + \cdots + p_{k-1} \langle S_{k-1}(\varphi) x, x\rangle + \langle S_k(\varphi) x, x\rangle$$

при достатно великих значеннях параметрів $p_j > 0$, $j=\overline{1,(k-1)}$ буде додатно визначеною: $\dot{V} \geq \varepsilon \|x\|^2$, $\varepsilon = const > 0$. Причому перший з параметрів p_1 можна вибирати як завгодно великим $p_1 > p_2 > \cdots > p_{k-1}$.

Зауваження 1. *Зауважимо, оскільки $M_1(\varphi)$ – це деяка невироджена квадратна матриця, тому в записаних вище нерівностях, як частинний випадок, $M_1(\varphi)$ можна замінити одиничною матрицю I_n.*

Як приклад, пропонуємо розглянути таку систему

$$\begin{gathered}
\tfrac{d\varphi_1}{dt} = \alpha_1 sin\varphi_1, \tfrac{d\varphi_2}{dt} = \alpha_2 cos\varphi_2, \\
\tfrac{dx_1}{dt} = (\alpha_3 cos3\varphi_1 - \alpha_4 sin\varphi_2 - 1) x_1 + (\alpha_3 cos3\varphi_1 - \alpha_4 sin\varphi_2) x_2, \\
\tfrac{dx_2}{dt} = (\alpha_4 sin\varphi_2 + 1) x_1 + (\alpha_4 sin\varphi_2) x_2, \\
\tfrac{dx_3}{dt} = (-\alpha_4 sin\varphi_2 + 1) x_1 + (-\alpha_3 cos3\varphi_1 + \alpha_4 sin\varphi_2) x_2 - (\alpha_3 cos3\varphi_1) x_3,
\end{gathered}$$

де α_i-деякі фіксовані дійсні додатні числа, $i=\overline{1,4}$.

Похідна квадратичної форми

$$V = p^2 (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + px_2^2 sin\varphi_2 - x_3^2 (cos\varphi_1) exp\left\{2\frac{\alpha_3}{\alpha_1} cos2\varphi_1\right\}$$

в силу записаної вище системи буде додатно визначеною при достатно великих значеннях параметра $p > 0$. Звідси випливає, що приведена система є регулярною.

Із нерівності (3) випливає, що для оберненої матриці, взятої із знаком мінус: $\overline{S}(\varphi) = -\alpha S^{-1}(\varphi)$, $\alpha = [max_\varphi \|S(\varphi)\| \ ]^2$, виконується наступна нерівність

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \overline{S}(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) - \overline{S}(\varphi) A^T(\varphi) - A(\varphi) \overline{S}(\varphi) \right] x, x \right\rangle \geq \|x\|^2 \tag{8}$$

Нерівність (8) означає, що похідна квадратичної форми $W = \left\langle \overline{S}\left(\varphi\right)x, x\right\rangle$ в силу спряженої системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a\left(\varphi\right), \frac{dx}{dt} = -A^T\left(\varphi\right)x \tag{9}$$

є додатно визначеною. Таким чином, якщо система (1) є регулярною, то і спряжена система (9) також буде регулярною. Причому функція Гріна $\overline{G_0}\left(\tau, \varphi\right)$для системи (9) зв'язана з функцією Гріна (2) наступною тотожністю $\overline{G_0}\left(\tau, \varphi\right) \equiv -\left[G_\tau\left(0, \varphi\right)\right]^T$.

Якщо припустити існування симетричної матриці $\overline{S}\left(\varphi\right) \in {}^{1}\left(T_m\right)$, яка задовольняє нерівності (8) та $det\overline{S}\left(\varphi_0\right) = 0$для деякого значення $\varphi_0 \in T_m$, то система (1) буде мати безліч різних функцій Гріна (2), тобто буде слабо регулярною. При цьому розширена система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a\left(\varphi\right), \quad \begin{array}{c} \frac{dx_1}{dt} = A\left(\varphi\right)x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - A^T\left(\varphi\right)x_2 \end{array}$$

буде регулярною.

Це можна проілюструвати на наступному прикладі

$$\frac{d\varphi}{dt} = sin\varphi, \quad \begin{array}{c} \frac{dx_1}{dt} = x_1 cos\varphi, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 cos\varphi. \end{array} \tag{10}$$

Похідна невиродженої квадратичної форми $V = \lambda x_1 x_2 - x_2^2 \;\; cos\varphi$ в силу системи (10) при значеннях параметра $\lambda > 1$ є додатно визначеною:$\dot{V} \geq \left(\lambda - 1\right)x_1^2 + x_2^2$. Таким чином, система (10) має єдину функцію Гріна. Після деяких обчислень, можна записати вигляд цієї функції:

$$G_0\left(\tau, \varphi\right) = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} sin^2\frac{\varphi}{2} & -\frac{2cos^2\frac{\varphi}{2}sin^2\frac{\varphi}{2}}{cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{2\tau}sin^2\frac{\varphi}{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{cos^2\frac{\varphi}{2}}{cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{2\tau}sin^2\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} e^{\tau}, \; \tau \leq 0, \\ \begin{pmatrix} -cos^2\frac{\varphi}{2} & -\frac{2cos^2\frac{\varphi}{2}sin^2\frac{\varphi}{2}}{e^{-2\tau}cos^2\frac{\varphi}{2} + sin^2\frac{\varphi}{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{-sin^2\frac{\varphi}{2}}{e^{-2\tau}cos^2\frac{\varphi}{2} + sin^2\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} e^{-\tau}, \; \tau > 0 \end{array} \right.$$

Поряд з системою (10) розглянемо наступну систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = sin\varphi, \quad \begin{array}{c} \frac{dx_1}{dt} = x_1 cos\varphi, \\ \frac{dx_2}{dt} = b\left(\varphi\right)x_1 - x_2 cos\varphi \end{array} \tag{11}$$

де $b\left(\varphi\right)$-деяка неперервна функція.

Якщо ця функція задовольняє нерівності $\left|b\left(\varphi\right)\right| \geq \beta$, $\beta = const > 0$, то, очевидно, система (11) матиме єдину функцію Гріна. Якщо ж функція $b\left(\varphi\right)$ приймає нульові значення, то система (11) не завжди буде регулярною. Виявилось, що якщо в системі (11) підставити $b\left(\varphi\right) = sin\varphi$, то ця система матиме єдину функцію Гріна. Причому одна з невироджених квадратичних форм, похідна якої в силу системи (11) є додатно визначеною і записується у вигляді

$$V = x_1^2 \;\; cos\varphi + 2x_1x_2 sin\varphi - x_2^2 \;\; cos\varphi. \tag{12}$$

Якщо зафіксувати квадратичну форму (12), а змінювати систему (11), в якій $b(\varphi) = sin\varphi$, так, щоби похідна квадратичної форми (12) в силу зміненої системи була додатно визначеною, то отримуємо множину систем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \tilde{a}(\varphi), \frac{dx}{dt} = S^{-1}(\varphi)\left[D(\varphi) + M(\varphi) - \frac{1}{2}\frac{dS(\varphi)}{d\varphi}\tilde{a}(\varphi)\right]x, \tag{13}$$

де $\tilde{a}(\varphi)$ - довільна скалярна функція,$\tilde{a}(\varphi) \in C_{Lip}(T_1)$, $x = (x_1, x_2)$, $D(\varphi)$ – довільна симетрична, додатно визначена матриця, $M(\varphi)$– довільна кососиметрична матриця: $-M(\varphi) \equiv M^T(\varphi)$,$D(\varphi), M(\varphi) \in C^0(T_1)$, $S(\varphi)$ – симетрична матриця, яка відповідає фіксованій квадратичній формі (12):

$$S(\varphi) = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ sin\varphi & -cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Вибираючи в системі (13) $\tilde{a}(\varphi) = 2\omega, D(\varphi) = dI_2,$, $M(\varphi) = m\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\omega, d, m = const > 0$, отримуємо регулярну систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\omega, \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (dcos\varphi - msin\varphi) & (mcos\varphi + dsin\varphi - \omega) \\ (mcos\varphi + dsin\varphi + \omega) & (-dcos\varphi + msin\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що визначник відповідної матриці

$$\begin{pmatrix} (dcos\varphi - msin\varphi) & (mcos\varphi + dsin\varphi - \omega) \\ (mcos\varphi + dsin\varphi + \omega) & (-dcos\varphi + msin\varphi) \end{pmatrix} = A(\varphi)$$

є незалежним від φ: $detA(\varphi) = -d^2 - m^2 + \omega^2$. Таким чином, приходимо до висновку, що існують системи вигляду (1), в яких $detA(\varphi) \equiv 0$ і які мають єдину функцію Гріна (2). Наприклад, лінійна система диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3cos5t - 4sin5t) & (4cos5t + 3sin5t - 5) \\ (4cos5t + 3sin5t + 5) & (-3cos5t + 4sin5t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

є експоненціально дихотомічною на осі і визначник матриці коефіцієнтів тотожно дорівнює нулю.

Звернемо увагу на те, що змінна симетрична матриця (14) є ортогональною, причому добуток $S(\varphi)\frac{dS(\varphi)}{d\varphi}$ є постійною матрицею. Узагальнюючи, розвиваючи далі ці спостереження, приходимо до наступного твердження.

Теорема 3. *Нехай деяка $n \times n$-вимірна матриця $S(\varphi) \in C^1(T_m)$ задовольняє умовам*

$$S^T(\varphi) \equiv S(\varphi), S^2(\varphi) \equiv L, L = const, detL \neq 0, \tag{15}$$

$$S(\varphi)\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i} \equiv L_i, L_i = const, i = \overline{1, m} \tag{16}$$

Тоді система рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \overline{a}(\varphi), \frac{dx}{dt} = L^{-1}\left[S(\varphi)B(\varphi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} L_i \overline{a}_i(\varphi)\right]x \tag{17}$$

буде регулярною при будь-якій вектор-функції $\overline{a}(\varphi) = \{\overline{a}_1(\varphi), \ldots, \overline{a}_m(\varphi)\} \in C_{Lip}(T_m)$ *і кожній* $n \times n$*-вимірній матриці* $B(\varphi) \in C^0(T_m)$, *яка задовольняє нерівності* $\langle B(\varphi)x, x\rangle \geq \beta\|x\|^2, \beta = const > 0$.

Доведення. . Розглянемо квадратичну форму

$$V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x\rangle \tag{18}$$

і покажемо, що її похідна в силу системи (17) є додатно визначеною.

Позначимо

$$A(\varphi) = L^{-1}\left[S(\varphi)B(\varphi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} L_i \overline{a}_i(\varphi)\right] \tag{19}$$

і запишемо похідну квадратичної форми (18) в силу системи (17)

$$\dot{V} = \left\langle \dot{S}(\varphi)x, x\right\rangle + \langle S(\varphi)\dot{x}, x\rangle + \langle S(\varphi)x, \dot{x}\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left\langle \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i}x, x\right\rangle \overline{a}_i(\varphi) + \langle S(\varphi)A(\varphi)x, x\rangle + \langle S(\varphi)x, A(\varphi)x\rangle .$$

Враховуючи властивості (15) і (16) матриці $S(\varphi)$, а також позначення (19), отримуємо

$$S(\varphi)A(\varphi) = S^{-1}(\varphi)\left[S(\varphi)B(\varphi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} L_i \overline{a}_i(\varphi)\right] = B(\varphi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i}\overline{a}_i(\varphi)$$

Таким чином, отримуємо, що похідна невиродженої квадратичної форми (18) в силу системи (17) є додатно визначена: $\dot{V} = 2\langle B(\varphi)x, x\rangle \geq 2\beta\|x\|^2$, а це і означає, що система (17) є регулярною.

□

Зауважимо, що клас матриць $S(\varphi)$ не є порожнім, зокрема кожна постійна невироджена симетрична матриця S буде задовольняти умовам (15), (16), де всі L_i є нульовими матрицями.

В зв'язку з цим виникла задача: знайти змінні невироджені симетричні матриці $S(\varphi)$ розмірів 3×3 і 4×4, які б задовольняли умовам (15), (16).

Дослідження в цьому напрямку привели до наступного вигляду таких матриць

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + cos\varphi\right) & \left(\sqrt{2}sin\varphi\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - cos\varphi\right) \\ \left(\sqrt{2}sin\varphi\right) & (-2cos\varphi) & \left(-\sqrt{2}sin\varphi\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - cos\varphi\right) & \left(-\sqrt{2}sin\varphi\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + cos\varphi\right) \end{pmatrix} = S(\varphi).$$

Безпосередньо перевірка показує, що

$$S^2(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = L, S(\varphi)\frac{dS(\varphi)}{d\varphi} = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далі знайдено матриці наступного вигляду:

$$S(\varphi_1, \varphi_2) = S_{\omega_1}(\varphi_1) + S_{\omega_2}(\varphi_2), \tag{20}$$

де

$$S_{\omega_1}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} (cos\varphi_1) & (\omega_1 sin\varphi_1) & (\omega_1 cos\varphi_1) & (sin\varphi_1) \\ (\omega_1 sin\varphi_1) & (-\omega_1^2 cos\varphi_1) & (\omega_1^2 sin\varphi_1) & (-\omega_1 cos\varphi_1) \\ (\omega_1 cos\varphi_1) & (\omega_1^2 sin\varphi_1) & (\omega_1^2 cos\varphi_1) & (\omega_1 sin\varphi_1) \\ (sin\varphi_1) & (-\omega_1 cos\varphi_1) & (\omega_1 sin\varphi_1) & (-cos\varphi_1) \end{pmatrix}$$

$$S_{\omega_2}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} (cos\varphi_2) & (\omega_2 sin\varphi_2) & (-\omega_2 cos\varphi_2) & (-sin\varphi_2) \\ (\omega_2 sin\varphi_2) & (-\omega_2^2 cos\varphi_2) & (-\omega_2^2 sin\varphi_2) & (\omega_2 cos\varphi_2) \\ (-\omega_2 cos\varphi_2) & (-\omega_2^2 sin\varphi_2) & (\omega_2^2 cos\varphi_2) & (\omega_2 sin\varphi_2) \\ (-sin\varphi_2) & (\omega_2 cos\varphi_2) & (\omega_2 sin\varphi_2) & (-cos\varphi_2) \end{pmatrix}$$

Дійсні додатні параметри ω_1 і ω_2 такі, що їх добуток $\omega_1\omega_2 = 1$. При цьому легко переконатись, що наступні добутки є нульовими матрицями

$$S_{\omega_1}(\varphi_1) \cdot\ S_{\omega_2}(\varphi_2) \equiv\ S_{\omega_2}(\varphi_2) \cdot\ S_{\omega_1}(\varphi_1) \equiv 0.$$

Це дає можливість обчислити квадрат матриці:

$$S^2(\varphi_1, \varphi_2) = S^2_{\omega_1}(\varphi_1) + S^2_{\omega_2}(\varphi_2) = L,$$

де $L-$ постійна невироджена матриця діагонального вигляду:

$$diag\left\{\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\right), \left(\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_1^2 + \omega_2^2\right), \left(\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_1^2 + \omega_2^2\right), \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\right)\right\}.$$

Звідси слідує, що обернена матриця $S^{-1}(\varphi_1, \varphi_2)$ записується у вигляді добутку

$$S^{-1}(\varphi_1, \varphi_2) = L^{-1}S(\varphi_1, \varphi_2).$$

Тепер переконаємось, що добутки змінних матриць $S(\varphi_1, \varphi_2)\frac{\partial S(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_i},\ i = 1, 2$ є матрицями постійними.

Враховуючи, що добутки $S_{\omega_2}(\varphi_2)\frac{dS_{\omega_1}(\varphi_1)}{d\varphi_1}$ і $S_{\omega_1}(\varphi_1)\frac{dS_{\omega_2}(\varphi_2)}{d\varphi_2}$ є нульовими матри-цями, отримуємо наступні рівності

$$S(\varphi_1, \varphi_2)\frac{\partial S(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1} = \left[S_{\omega_1}(\varphi_1) + S_{\omega_2}(\varphi_2)\right]\frac{dS_{\omega_1}(\varphi_1)}{d\varphi_1} = S_{\omega_1}(\varphi_1)\frac{dS_{\omega_1}(\varphi_1)}{d\varphi_1} =$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & (\omega_1^3+\omega_1) & 0 & (\omega_1^2+1) \\ -(\omega_1^3+\omega_1) & 0 & -(\omega_1^4+\omega_1^2) & 0 \\ 0 & (\omega_1^4+\omega_1^2) & 0 & (\omega_1^3+\omega_1) \\ -(\omega_1^2+1) & 0 & -(\omega_1^3+\omega_1) & 0 \end{pmatrix} = L_1,
$$

$$
S(\varphi_1,\varphi_2)\frac{\partial S(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial \varphi_2} = [S_{\omega_1}(\varphi_1)+S_{\omega_2}(\varphi_2)]\frac{dS_{\omega_2}(\varphi_2)}{d\varphi_2} = S_{\omega_2}(\varphi_2)\frac{dS_{\omega_2}(\varphi_2)}{d\varphi_2} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & (\omega_2^3+\omega_2) & 0 & -(\omega_2^2+1) \\ -(\omega_2^3+\omega_2) & 0 & (\omega_2^4+\omega_2^2) & 0 \\ 0 & -(\omega_2^4+\omega_2^2) & 0 & (\omega_2^3+\omega_2) \\ (\omega_2^2+1) & 0 & -(\omega_2^3+\omega_2) & 0 \end{pmatrix} = L_2.
$$

Таким чином, для матриці (20) виконуються усі умови (15) і (16).

Список літератури

[1] Mitropolsky Yu., Samoilenko A., Kulik V. Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems. – London: Taylor Francis Group, 2003. – 400 c.

[2] Samoilenko A. M. On preservation of the invariant torus under perturbations, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 34, No. 6, 1219–1240 (1970).

[3] A. M. Samoilenko, Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations, Kluwer, Dordrecht (1991).

[4] Hrod, I.M., Kulyk, V.L. Construction of Lyapunov Functions in the Form of Pencils of Quadratic Forms. J Math Sci 243, 183–191 (2019). https://doi.org/10.1007/s10958-019-04534-0

[5] Kulyk V, Kulyk G, Stepanenko N. Regularity of Linear Systems of Differential Equations on the Axes and Pencils of Quadratic Forms.- Communications in Advanced Mathematical Sciences Vol. II, No. 3, 176-181, 2019 Research Article e-ISSN:2651-4001 DOI: 10.33434/cams.55042

[6] Perestyuk, M.O., Slyusarchuk, V.Y.Green–Samoilenko operator in the theory of invariant sets of nonlinear differential equations. Ukr Math J 61, 1123 (2009). https://doi.org/10.1007/s11253-009-0265-2

[7] Samoilenko A.M., Burilko A.A., Grod I.M. Moduli of continuity of the derivatives of invariant tori for linear extensions of dynamical systems. Differentsial'nyye uravneniya. 2000, 36 (1), 120-131. (in Russian)

[8] Perestyuk N. A., Cherevko I. M. Investigation of the integral manifolds of sinqularly perturbed functional differentional equations // Math. Notes. – 2002. – 3, N – P. 47-58.

[9] V. L. Kulyk, G. N. Kulyk, N. V. Stepanenko, Addition of weakly regular linear extensions of dynamical systems to regular, Almaty, 11(1) (2011), 74-86.

[10] Lahoda, V.A., Parasyuk, I.O. Theorem on the existence of an invariant section over R^m for the indefinite monotone system in $R^m \times R^n$. Ukr Math J 65, 114–131 (2013). https://doi.org/10.1007/s11253-013-0768-8

Надійшло 09.11.2020

Grod I.M., Kulyk G.M., Stepanenko N.V. *LINEARIZED DIFFERENTIAL EQUATIONS AROUND A MULTIDIMENSIONAL TOR*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 1 (2020), 84–93.

The method of application of quadratic forms to the study of the regularity of linear extensions of dynamical systems on a torus is analyzed. A method for constructing a set of regular systems with a fixed Lyapunov function is proposed. The research of the invariant manifolds of dynamical systems is the subject of many studies Samoilenko, Kulik, Perestyuk and Slyusarchuk. The concept of Green-Samoilenko function of the problem on invariant tori, introduced in the work by Samoilenko, allowed to set out the perturbation theory of differentiable as well as continuous invariant manifolds from a single point of view. We study the problem of the existence of a Green-Samoilenko function for some linear extensions of dynamical systems

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x \ (1)$$

The question of the existence of the Green-Samoilenko function is closely connected with the question of the existence of the extended Lyapunov function that is considered in quadratic forms. Such functions can change their sign and degenerate in some points, and their derivative with respect to the system of equations is negative definite. Let us recall that the existence of non-degenerate quadratic form $V = \langle S(\varphi)x, x\rangle$, $detS(\varphi) \neq 0$, $S(\varphi) \in C^1(T_m)$, the derivative of which with respect to system (1) is negative definite $\left\langle \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi)\right]x, x\right\rangle \geq \|x\|^2$ provides the regularity of this system, which means that this system has a unique Green function. In case when $detS(\varphi_0) = 0$, the system (1) has no Green function for the problem of an invariant bounded manifolds.

The method of application of quadratic forms to the study of the regularity of linear extensions of dynamical systems on a torus is analyzed. A method for constructing a set of regular systems with a fixed Lyapunov function is proposed. We obtain certain classes of regular systems

$$\frac{d\varphi}{dt} = \overline{a}(\varphi), \frac{dx}{dt} = L^{-1}\left[S(\varphi)B(\varphi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} L_i \overline{a}_i(\varphi)\right]x,$$

for any vector function $\overline{a}(\varphi) = \{\overline{a}_1(\varphi), \ldots, \overline{a}_m(\varphi)\} \in C_{Lip}(T_m)$, where $S(\varphi) \in C^1(T_m)$ matrices $n\times$n-dimensional and they satisfy the following condition

$$S^T(\varphi) \equiv S(\varphi), S^2(\varphi) \equiv L, L = const, detL \neq 0,$$

$$S(\varphi)\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i} \equiv L_i, L_i = const, i = \overline{1, m},$$

$B(\varphi) \in C^0(T_m)$ matrices $n\times$n-dimensional, which satisfy inequality $\langle B(\varphi)x, x\rangle \geq \beta\|x\|^2, \beta = const > 0$.