Горбачук В.М.

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Робота присвячена дослідженню розв'язків диференціальних рівнянь параболічного типу у банаховому просторі на всій числовій осі. Для таких рівнянь описано усі розв'язки на $(-\infty,\infty)$ і знайдено умови, за яких розв'язок допускає продовження до цілої вектор-функції скінченного порядку і скінченного типу.

Ключові слова і фрази: банахів простір, C_0-півгрупа лінійних операторів, абстрактні параболічне та обернено параболічне рівняння, порядок і тип цілої вектор-функції, цілий вектор оператора..

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна
e-mail: *v.m.horbach@gmail.com*

Вступ

Вивчення диференціальних рівнянь, коефіцієнтами яких є необмежені оператори у банаховому або гільбертовому просторі, є доцільним не лише тому, що вони охоплюють чимало рівнянь з частинними похідними, а й тому, що надається можливість поглянути з єдиної точки зору як на звичайні диференціальні оператори, так і на оператори з частинними похідними. Протягом останніх 50 років в теорії диференціально-операторних рівнянь досягнуто значних результатів багатьма математиками, в тому числі С.Д. Ейдельманом.

Ми розглядаємо рівняння вигляду

$$y'(t) - Ay(t) = 0 \quad \text{та} \quad y'(t) + Ay(t) = 0, \quad t \in (-\infty,\infty),$$

де A - генератор обмеженої аналітичної півгрупи лінійних операторів у банаховому просторі, тобто абстрактні параболічне та обернено параболічне рівняння, описуємо їхні розв'язки на $(-\infty,\infty)$, показуємо, що кожен розв'язок може бути продовжений до цілої вектор-функції у просторі цілих векторів оператора A, встановлюємо умови, необхідні і достатні для того, щоб продовження мало скінченний порядок росту і скінченний тип, а

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K90,47D06.

також наводимо ознаки щільності множини цілих розв'язків певного порядку і певного типу у класі всіх розв'язків. Зазначимо, що у випадку, коли $t \in [0, \infty)$, аналогічні питання розглядались М.Л. Горбачуком (див. [3]). Результати викладено, виходячи з [8] та [9, 10].

1 Допоміжні відомості

Нехай $\mathfrak{B}$ – банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Позначимо через $E(\mathfrak{B})$ ($L(\mathfrak{B})$) множину всіх щільно заданих замкнених (обмежених) лінійних операторів в $\mathfrak{B}$. Нехай також $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ – C_0-півгрупа лінійних операторів з $L(\mathfrak{B})$, тобто:

1) $U(0) = I$ (I – одиничний оператор в $\mathfrak{B}$) ;
2) $\forall t, s \geq 0 : U(t+s) = U(t)U(s)$;
3) $\forall f \in \mathfrak{B} : \lim\limits_{t\to 0} \|U(t)f - f\| = 0$.

Інфінітезімальний генератор (або просто генератор) A півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ визначається як

$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)f - f), \ \mathcal{D}(A) = \left\{ f \in \mathfrak{B} : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)f - f) \text{ існує} \right\},$$

($\mathcal{D}(\cdot)$ – область визначення оператора). Цей оператор замкнений, $\mathcal{D}(A)$ є щільною в $\mathfrak{B}$ і $U(t)$-інваріантною, тобто $\forall f \in \mathcal{D}(A) : U(t)f \in \mathcal{D}(A)$ ($t \geq 0$) і $AU(t)f = U(t)Af$. Більше того,

$$\frac{d}{dt}U(t)f = AU(t)f, \ f \in \mathcal{D}(A).$$

У подальшому $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ позначатиме C_0-півгрупу в $\mathfrak{B}$ з генератором A (стосовно теорії півгруп див., наприклад, [11, 14, 13, 2]).

C_0-півгрупа $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ називається аналітичною з кутом $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, якщо оператор-функція $U(\cdot)$ є визначеною в секторі $S_\theta = \{z : |\arg z| < \theta\}$ і має такі властивості:

1) $\forall z_1, z_2 \in S_\theta : U(z_1 + z_2) = U(z_1)U(z_2)$;
2) $\forall f \in \mathfrak{B} : U(z)f$ є аналітичною вектор-функцією в S_θ;
3) $\forall f \in \mathfrak{B} : \|U(z)f - f\| \to 0$ при $z \to 0$ у будь-якому замкненому підсекторі з S_θ.

Якщо, крім того, сім'я $U(z)$ є обмеженою на кожному секторі S_ψ з $\psi < \theta$, то $U(t)$ є обмеженою аналітичною півгрупою з кутом θ.

Для довільних оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ і числа $\beta \geq 0$ покладемо

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0=\{0\}\cup\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n), \quad \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{G}^\alpha_\beta(A), \quad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}^\alpha_\beta(A),$$

де

$$\mathfrak{G}^\alpha_\beta(A) = \{f \in C^\infty(A) \big| \exists c = c(f) > 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 : \|A^k f\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}\}$$

– банахів простір відносно норми

$$\|f\|_{\mathfrak{G}^\alpha_\beta(A)} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^k f\|}{\alpha^k k^{k\beta}}.$$

В $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ ($\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$) вводиться топологія індуктивної (проєктивної) границі просторів $\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)$. Збіжність в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ (в $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$) означає збіжність у деякому (кожному) $\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)$, $\alpha > 0$. Очевидно, що $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ та $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ є не що інше, як простори аналітичних та цілих векторів оператора A відповідно. Зауважимо також, що при $\beta_1 < \beta_2$ мають місце щільні і неперервні вкладення

$$\mathfrak{G}_{(\beta_1)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_1\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta_2)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_2\}}(A).$$

Якщо оператор A обмежений, то для будь-якого $\beta > 0$

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{B}.$$

Неважко також показати, що для довільного β можна підібрати необмежений оператор A так, щоб $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \{0\}$. Але якщо A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ з кутом θ, то, як доведено в [6], $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$ при $\beta > 1 - \frac{2\theta}{\pi}$. Якщо ж $\beta = 1 - \frac{2\theta}{\pi}$, можливі випадки, коли $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \{0\}$.

Має місце таке твердження (див. [8]).

Теорема 1. *Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$. Тоді для довільного $f \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ ($f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$), вектор-функція*

$$\exp(zA)f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k x}{k!}$$

є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ при $\beta < 1$ (в $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ при $\beta \leq 1$). Сукупність $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює C_0-групу лінійних неперервних операторів у цих просторах. Якщо A - генератор C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$, то

$$\forall f \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),\ \forall t \geq 0 : \exp(tA)f = e^{tA}f.$$

У випадку, коли півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною, останнє співвідношення виконується для всіх $t \in \mathbb{R}^1$ (якщо $t < 0, e^{tA} := (e^{-tA})^{-1}$).

Доведення. Очевидно, що для довільного $z \in \mathbb{C}$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k x}{k!} f, f \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, збігається в $\mathfrak{B}$ і визначає цілу $\mathfrak{B}$-значну вектор-функцію.

Припустимо тепер, що $f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta \leq 1$, тобто

$$\forall \alpha > 0,\ \exists c = c(f, \alpha) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \|A^n f\| \leq c\alpha^n n^{n\beta}.$$

Тоді,

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : \left\| A^n \left(\exp(zA)f - \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k A^k f}{k!} \right) \right\| = \left\| A^n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{z^k A^k f}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k \|A^{n+k} f\|}{k!}$$
$$\leq c \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \alpha^{n+k} (n+k)^{(n+k)\beta} = c\alpha^n n^{n\beta} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} k^{k\beta} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n\beta} \left(1 + \frac{n}{k}\right)^{k\beta}.$$

З нерівностей

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n\beta} \le \left(1+\frac{k}{n}\right)^{n} \le e^k \text{ та } \left(1+\frac{n}{k}\right)^{k\beta} \le \left(1+\frac{n}{k}\right)^{k} \le e^n$$

випливає, що

$$\left\| A^n \left(\exp(zA)f - \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k A^k f}{k!} \right) \right\| \le c_m (\alpha e)^n n^{n\beta},$$

де

$$c_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z\alpha e|^k}{k!} k^{k\beta}.$$

Покладемо $m = 0$. Тоді для будь-якого фіксованого $z \in \mathbb{C}$ маємо $\exp(zA)f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$. Більше того, яким би великим не було $\delta > 0$, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k f$ збігається у просторі $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$ в крузі $|z| < \delta$ для довільного $\alpha < \frac{1}{e^2\delta}$. Отже, цей ряд визначає цілу вектор-функцію в $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e^2\delta}\right)$, а тому й в $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$.

Аналогічно встановлюється, що $\exp(zA)f$, $f \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ $(\beta < 1)$, є цілою вектор-функцією в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$. Групова властивість $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ перевіряється так само, як у скалярному випадку. □

2 Основні результати

Розглянемо рівняння вигляду

$$y'(t) - Ay(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

та

$$y'(t) + Ay(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2}$$

де A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\ge 0}$ в $\mathfrak{B}$. Рівняння (1) (відповідно (2)) є абстрактним параболічним (обернено параболічним).

Приклад. *Нехай $\mathfrak{B}$ – один із просторів $L^p(\mathbb{R}^n)(1 \le p < \infty)$, $C_0(\mathbb{R}^n)$ або $BUC(\mathbb{R}^n)$, де $C_0(\mathbb{R}^n)$ $(BUC(\mathbb{R}^n))$ - простір неперервних зі скінченним носієм (рівномірно неперервних, обмежених) на $\mathbb{R}^n$ функцій з* sup*-нормою, а*

$$Au(x) = \Delta u(x),\ x \in \mathbb{R}^n; \quad \mathcal{D}(A) = \{u \in \mathfrak{B} : \Delta u \in \mathfrak{B}\}$$

(Δ розуміється в сенсі розподілів). Згідно з [1], оператор A генерує в $\mathfrak{B}$ обмежену аналітичну C_0-півгрупу з кутом $\theta = \frac{\pi}{2}$, а саме:

$$(e^{tA}f)(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-s)e^{-|s|^2/4t}\, ds, \quad t > 0, f \in \mathfrak{B},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

У цьому випадку (1) є не що інше, як класичне рівняння теплопровідності.

Якщо $A \le 0$ – самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, то він також генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу з кутом $\frac{\pi}{2}$.

Під розв'язком (класичним) рівняння (1) або (2) на $(-\infty,\infty)$ розумітимемо сильно неперервно диференційовну функцію $y(t) : (-\infty,\infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$, що задовольняє відповідне рівняння.

Теорема 2. *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\ge 0}$ в $\mathfrak{B}$. Вектор-функція $y(t) : (-\infty,\infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$ є розв'язком рівняння (1) на $(-\infty,\infty)$ тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$y(t) = \exp(tA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),\ t \in (-\infty,\infty). \tag{3}$$

Отже, будь-який розв'язок $y(t)$ рівняння (1) на $(-\infty,\infty)$ допускає продовження до цілої вектор-функції у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Доведення. Припустимо, що $y(t)$ – роз'язок рівняння (1) на $(-\infty,\infty)$. Оскільки $y(t)$ є також розв'язком цього рівняння на $[0,\infty)$, то, згідно з [12],

$$y(t) = e^{tA}f = \exp(tA)f, \quad f \in \mathcal{D}(A), \quad t \in [0,\infty).$$

Покладемо $z(t) = y(-t),\ t \ge 0$. Вектор-функція $z(t)$ є розв'язком рівняння (2) на $[0,\infty)$. Як показано в [7],

$$y(-t) = z(t) = \exp(-tA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A), \quad t \in [0,\infty).$$

Беручи до уваги неперервність $y(t)$ в точці 0, одержуємо $f = g$. Таким чином, $y(t)$ зображується у вигляді (3) на всій числовій осі. За теоремою 1, така вектор-функція є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. □

Зазначимо, що той факт, що значення розв'язку $y(t)$ рівняння (1) належать до простору $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, для рівняння теплопровідності означає, що його розв'язки є цілими функціями як по t, так і по x.

Аналогічно тому, як це зроблено для рівняння (1), доводиться, що вектор-функція $y(t) : (-\infty,\infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$ є розв'язком рівняння (2) на $(-\infty,\infty)$ тоді і тільки тоді, коли $y(t)$ допускає зображення

$$y(t) = \exp(-tA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A), \quad t \in (-\infty,\infty). \tag{4}$$

За теоремою 1, вектор-функція (4) також є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Позначимо через $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ множину усіх цілих $\mathfrak{B}$-значних функцій. Вектор-функція $y \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ має скінченний порядок росту, якщо існує число $\gamma \ge 0$ таке, що для достатньо великих $|z|$

$$\|y(z)\| \le e^{|z|^\gamma}.$$

Точна нижня межа $\rho(y)$ таких γ – порядок $y(z)$.

Нехай тепер $\delta > 0$ – довільне фіксоване число. Під степенем функції $y \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ відносно δ розумітимемо величину

$$\sigma(y,\delta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \max\limits_{|z|=r} \|y(z)\|}{r^{\delta}}.$$

Якщо $y(z)$ має скінченний порядок $\rho = \rho(y)$ і $\delta < \rho$, то $\sigma(y,\delta) = \infty$, але $\sigma(y,\delta) = 0$ для $\delta > \rho$. Число $\sigma(y) = \sigma(y,\rho)$ (степінь функції $y(z)$ відносно її порядку) називається типом $y(z)$. Зазвичай $y(z) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ скінченного порядку називають вектор-функцією експоненціального типу, якщо $\rho(y) \le 1$ і $\sigma(y,1) < \infty$.

Для довільного числа $\rho > 0$ позначимо через $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$ множину всіх $y \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$, порядок яких не перевищує ρ, і скінченного степеня відносно цього ρ. Покладемо також

$$\mathfrak{A}^{\rho}_{\alpha}(\mathfrak{B}) = \{y \in \mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B}) \big| \exists c > 0, \forall z \in \mathbb{C} : \|y(z)\| \le c e^{\alpha |z|^{\rho}}\},$$

де $0 < c = c(y) = const$. Множина $\mathfrak{A}^{\rho}_{\alpha}(\mathfrak{B})$ утворює банахів простір відносно норми

$$\|y\|_{\mathfrak{A}^{\rho}_{\alpha}(\mathfrak{B})} = \sup_{r\ge 0} e^{-\alpha r^{\rho}} \max_{|z|=r} \|y(z)\|.$$

Очевидно, що

$$\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B}) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{A}^{\rho}_{\alpha}(\mathfrak{B}).$$

У просторі $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$ введемо топологію індуктивної границі банахових просторів $\mathfrak{A}^{\rho}_{\alpha}(\mathfrak{B})$. Збіжність $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ в $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$ означає, що послідовність $\sigma(y_n,\rho)$ є обмеженою і $\|y_n(z) - y(z)\| \to 0$ $(n \to \infty)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Очевидно, що $\mathfrak{A}^{1}(\mathfrak{B})$ – простір цілих $\mathfrak{B}$-значних функцій експоненціального типу.

Постає питання, чи існують розв'язки рівняння (1) або (2) на $(-\infty,\infty)$, котрі допускають продовження до вектор-функцій з класу $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$, і якщо це так, то за яких умов, множина таких розв'язків відповідного рівняння є щільною у множині усіх його розв'язків, тобто для будь-якого розв'язку $y(z)$ існує послідовність $y_n \in \mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$, що збігається до $y(z)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 3. *Для того, щоб розв'язок $y(z)$ рівняння* (1) *або* (2) *належав до $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$, необхідно і достатньо, щоб $y(0) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$,де $\beta = \frac{\rho-1}{\rho}$. Якщо така умова виконується, то $\forall z \in \mathbb{C} : y(z) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$. За умови, що $\rho > \frac{\pi}{2\theta}$, множина розв'язків $y \in \mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$ відповідного рівняння є щільною у множині усіх його розв'язків.*

Доведення. Припустимо, що $y \in \mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$ – розв'язок рівняння (1) на $(-\infty,\infty)$. Тоді $y(z)$ має вигляд (3), тобто

$$y(z) = \exp(zA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Як показано в [5], $y(0) = g \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$, де $\beta = \frac{\rho-1}{\rho}$. За теоремою 1 , $y(z) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ для будь-якого $z \in \mathbb{C}$. Обернене твердження випливає з тієї самої теореми. Аналогічні аргументи діють і у випадку рівняння (2).

Як зазначалось вище, при

$$\beta > 1 - \frac{2\theta}{\pi} \Longleftrightarrow \rho = \frac{1}{1-\beta} > \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)} = \frac{\pi}{2\theta}$$

множина $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ є щільною в $\mathfrak{B}$.Оскільки розв'язки рівняння (1) мають вигляд $y(z) = \exp(zA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, і $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, вектор g можна наблизити в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$-топології векторами $g_n \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ $(n \in \mathbb{N})$. За теоремою 1, послідовність $y_n(z) = \exp(zA)g_n$ збігається до $y(z)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Подібні міркування можуть бути застосовані й у випадку рівняння (2). $\square$

Що стосується $\rho = \frac{\pi}{2\theta}$, то розглядувані рівняння можуть, взагалі кажучи, не мати відмінних від тривіального розв'язків на $(-\infty, \infty)$ у класі $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$. Але (див. [4]) за умов, що $\theta = \frac{\pi}{2}$ і виконується нерівність

$$\int_0^1 \ln\ln M(s)\,ds < \infty, \text{ де } M(s) = \sup_{|\operatorname{Im}\lambda| \geq s} \|R_A(\lambda)\|$$

($R_A(\lambda)$ – резольвента оператора A), множина цілих розв'язків експоненціального типу є щільною у множині усіх розв'язків. Це, наприклад, має місце у випадку, коли A – нормальний оператор у гільбертовому просторі, що генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу.

Список літератури

[1] Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., and Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1999.

[2] Engel K.-J. and Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer-Verlag, Berlin - New York, 2000.

[3] Горбачук М.Л. Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь. Укр. мат. журн. 2000, **52** (5), 596–607.

[4] Горбачук М.Л., Горбачук В.І. *Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу.* Укр. мат. журн. 1995, **47** (5), 616–628.

[5] Gorbachuk M.L., Gorbachuk V.I. *On the well-posed solvability in some classes of entire functions of the Cauchy problem for differential equations in a Banach space.* Methods Funct. Anal. Topology 2005, **11** (2), 113–125.

[6] Gorbachuk M.L., Mokrousov Yu.G. *On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space.* Methods Funct. Anal. Topology 2002, **8** (1), 23–29.

[7] Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L. Boundary value problems for operator differential equations. Kluwer Academic Publishers., Dordrecht-Boston-London, 1991.

[8] Gorbachuk V.M. *On solutions of parabolic and elliptic type differential equations on* $(-\infty, \infty)$ *in a Banach space.* Methods Funct. Anal. Topology 2008, **14** (2), 177–183.

[9] Gorbachuk V.M. *On the structure of solutions of operator-differential equations on the whole real axis.* Methods Funct. Anal. Topology 2015, **21** (2), 170–178.

[10] Горбачук В. *Про розв'язки диференціальних рівнянь параболічного типу у банаховому просторі.* Збірник матеріалів міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування Чернівці, Україна: Чернівецький нац. ун-т, вересень 16–19, 2020, 108–109.

[11] Hille E. and Phillips R.S. Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957.

[12] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Наука, Москва, 1967 .

[13] Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. *Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения.* Итоги науки и техники, Мат. анализ. 1990, **28**, 87–202.

[14] Yosida K. Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin-Góttingen-Heidelberg, 1965.

Список літератури

[1] Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., and Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1999.

[2] Engel K.-J. and Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer-Verlag, Berlin - New York, 2000.

[3] Gorbachuk M.L.*On analytic solutions of differential-operator equations.* Ukrain. Mat.Zh. 2000, **52** (5), 596–607. (in Ukrainian)

[4] Gorbachuk M.L., Gorbachuk V.I. *On approximation of smooth vectors of a closed operator by entire vectors of exponential type.* Ukrain. Mat.Zh. 1995, **47** (5), 616–628. (in Ukrainian)

[5] Gorbachuk M.L., Gorbachuk V.I. *On the well-posed solvability in some classes of entire functions of the Cauchy problem for differential equations in a Banach space.* Methods Funct. Anal. Topology 2005, **11** (2), 113–125.

[6] Gorbachuk M.L., Mokrousov Yu.G. *On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space.* Methods Funct. Anal. Topology 2002, **8** (1), 23–29.

[7] Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L. Boundary value problems for operator differential equations. Kluwer Academic Publishers., Dordrecht-Boston-London, 1991.

[8] Gorbachuk V.M. *On solutions of parabolic and elliptic type differential equations on* $(-\infty,\infty)$ *in a Banach space.* Methods Funct. Anal. Topology 2008, **14** (2), 177–183.

[9] Gorbachuk V.M. *On the structure of solutions of operator-differential equations on the whole real axis.* Methods Funct. Anal. Topology 2015, **21** (2), 170–178.

[10] Gorbachuk V. *On solutions of parabolic type differential equations in a Banach space.* In: Proc. of the Intern. Conf. "Modern Problems of Differential Equations and Applications", Chernivtsi, Ukraina: National University of Chernivtsi, September 16–19, 2020, 108–109. (in Ukrainian)

[11] Hille E. and Phillips R.S. Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957.

[12] Krein S.G. Linear differential equations in Banach space. Nauka, Moscow, 1967 . (in Russian)

[13] Vasilyev V.V., Krein S.G., and Piskariov S.I. *Semigroups of operators, cosine operator functions, and linear differential equations.* Itogi Nauki i Techniki, Ser. Math., Math. Anal. 1990, **28**, 87–202. (in Russian)

[14] Yosida K. Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin-Góttingen-Heidelberg, 1965.

Надійшло 04.11.2020

Gorbachuk V.M. *On solutions of parabolic type differential equations in a Banach space*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 1 (2020), 56–64.

The article is devoted to the investigation of solutions of differential equations on an infinite interval, whose coefficients are unbounded linear operators in a Banach space $\mathfrak{B}$ over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. Namely, we consider equations of the form $y'(t) - Ay(t) = 0$ and $y'(t) + Ay(t) = 0$ on the whole real axis, where A is the infinitesimal generator of a bounded analytic C_0-semigroup $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ of linear operators in $\mathfrak{B}$, that is, a parabolic and inverse parabolic type, respectively, differential equations in a Banach space. Most the problems under consideration in the paper are related to the theory of abstract differential equations, one of the main directions of modern functional analysis which, as is well-known, covers a number of partial differential equations. For example, if $\mathfrak{B} = L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ and $Au(x) = \Delta u(x), x \in \mathbb{R}^n$, ($\Delta$ is the Laplacian), then the first equation above is none other than the classical heat one. But the study of such equations is useful not only because they cover a lot of partial differential equations, it also enables to look from a uniform point of view at ordinary as well as partial differential equations. The origin of the mentioned theory dates from the work of E.Hille and K.Yosida (1948), in which the first theorems on the existence of solutions to the Cauchy problem for the equation $y' = Ay$ with an unbounded operator A in a Banach space, formulated in terms of the theory semigroups, were obtained. In the middle of the last century, P.Lax, R.S. Phillips, A.Milgram, V.Lyantce, and T.Kato applied the semigroup methods to the investigation of various classes of parabolic equations. These scientists laid the foundations of the theory of differential equations with unbounded operators, which thereafter became a field of independent interest, attracting the attention of many mathematicians including S.D. Eidelman. We describe all the solutions of the above abstract differential equations and find the conditions which are necessary and sufficient for a solution to admit an extension to an entire vector-valued function with given order of growth and type. Moreover, the criterions for such classes of solutions to be dense in the set of all solutions are presented. So, the conditions are established under which for each solution $y(z)$ of the corresponding equation, there exists a sequence $y_n(z)$ of a certain order and type entire solutions converging uniformly to $y(z)$ on every compact set $K \subset \mathbb{C}$. It should be noted that similar problems for equations on $[0, \infty)$ were considered by M.L.Gorbachuk.