УДК 517.946

©2014 р. С.Г. Блажевський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА ДИФУЗІЇ В ТРИШАРОВОМУ НАПІВОБМЕЖЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Методом інтегрального перетворення Лапласа в поєднанні з методом функцій Коші побудовано розв'язок задачі дифузії, змодельованої на тришаровій півосі гібридним диференціальним оператором Лежандра-Фур'є-Бесселя в припущенні, що часова змінна бере участь в крайовій умові та в умовах спряження.

Using integral Laplace transforms and Cauchy functions, we construct a solution of a diffusion problem modeled on a three-layer axis by a hybrid differential Legendre-Fourier-Bessel operator under the assumption that the time variable is involved in the boundary conditions and conjugate conditions.

Процеси теплопровідності, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертали до себе увагу вчених на протязі всієї історії розвитку людства. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є диференціальне рівняння теплопровідності параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t, r), \quad r \in (R_0, R)$$

з відповідною початковою умовою та крайовими умовами.

Потреби практики приводили до різного узагальнення рівняння теплопровідності: перехід до квазілінійності та нелінійності, перехід до кусково-однорідних коефіцієнтів, перехід до нових криволінійних систем координат (у випадку розмірності простору $n \geq 2$) та ін. В усіх випадках процеси теплопровідності вивчалися в припущенні, що межа середовища жорстка по відношенню до відбиття хвиль. Різко змінюється картина розповсюдження тепла, якщо межа середовища є м'якою по відношенню до відбиття хвиль. Математично це означає наявність в крайових операторах та диференціальних операторах спряження похідної стосовно часової змінної.

Особливу увагу заслуговує дуже поширений в другій половині XX-го століття для вивчення фізико-технічних характеристик композитних об'єктів метод кусково-сталих коефіцієнтів. Це привело навіть у випадку жорсткості області середовища до диференціальних рівнянь із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та її похідних. Одержати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку таких задач навіть у найпростішому випадку неможливо. Ці труднощі можна обійти, якщо здійснити моделювання процесів поширення тепла методом гібридних диференціальних операторів.

Дана робота присвячена моделюванню нестаціонарних процесів теплопровідності методом гібридного диференціального оператора Лежандра-Фур'є-Бесселя в припущенні, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

Це дало можливість одержати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку в алгоритмічній формі достатньо широкого класу задач теплопровідності неоднорідного середовища. Така форма розв'язку зручна і для теоретичного дослідження і для інженерних розрахунків.

Побудуємо обмежений в області $\overline{D}_2^+ = \{(t,r) : t \in (0,\infty); r \in \overline{I}_2^+ = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)}[u_1] = f_1(t,r), r \in (R_0, R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\gamma_2^2 u_2-a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}=f_2(t,r), r\in(R_1,R_2), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\gamma_3^2 u_3-a_3^2 B_{\nu,\alpha}[u_3]=f_3(t,r), r\in(R_2,\infty)$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)\Big|_{t=0}=g_j(r),\quad r\in(R_{j-1},R_j),$$

$$j=\overline{1,3},\ R_3=\infty \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\Big[\Big(\alpha_{11}^0+\delta_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}\Big)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0+\gamma_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}\Big]u_1(t,r)\Big|_{r=R_0}=$$

$$=\omega_0(t),\ \frac{\partial u_3}{\partial r}\Big|_{r=\infty}=0 \quad (3)$$

та умовами спряження

$$\Big(L_{j1}^k\Big[u_k(t,r)\Big]-L_{j2}^k\Big[u_{k+1}(t,r)\Big]\Big)\Big|_{r=R_k}=$$

$$=\omega_{jk}(t),\ j,k=1,2 \quad (4)$$

У рівностях (1)-(4) беруть участь: диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_{(\mu)}=\frac{d^2}{dr^2}+cthr\frac{d}{dr}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\mu_1^2}{1-chr}+\frac{\mu_2^2}{1+chr}\Big)$ [2], диференціальний оператор Бесселя $B_{\nu,\alpha}=\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha+1)r\frac{d}{dr}-(\nu^2-\alpha^2)r^{-2}$ та Фур'є $\frac{d^2}{dr^2}$ [3, 4], а також диференціальні оператори

$$L_{jm}^k=\Big(\alpha_{jm}^k+\delta_{jm}^k\frac{\partial}{\partial t}\Big)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{jm}^k+\gamma_{jm}^k\frac{\partial}{\partial t};$$

$m,j,k=1,2.$

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0\le 0$, $\beta_{11}^0\ge 0$, $|\alpha_{11}^0|+\beta_{11}^0\ne 0$, $\delta_{11}^0\ge 0$, $\gamma_{11}^0\ge 0$; $\alpha_{jm}^k\ge 0$, $\beta_{jm}^k\ge 0$, $\delta_{jm}^k\ge 0$, $c_{j1,k}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $c_{j2,k}=\delta_{2j}^k\gamma_{1j}^k-\delta_{1j}^k\gamma_{2j}^k=0$; $\delta_{2j}^k\beta_{1j}^k-\delta_{1j}^k\beta_{2j}^k=\alpha_{1j}^k\gamma_{2j}^k-\alpha_{2j}^k\gamma_{1j}^k$, $c_{11,k}\cdot c_{21,k}>0$.

Нехай задані та шукані функції є оригіналами Лапласа стосовно t [5]. У зображенні за Лапласом одержуємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині $\overline{I}_2^+$ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра, Фур'є та Бесселя для модифікованих функцій

$$\Big(\Lambda_{(\mu)}-q_1^2\Big)u_1^*(p,r)=-F_1^*(p,r),\quad r\in(R_0,R_1)$$

$$\Big(\frac{d^2}{dr^2}-q_2^2\Big)u_2^*(p,r)=-F_2^*(p,r),\quad r\in(R_1,R_2) \quad (5)$$

$$\Big(B_{\nu,\alpha}-q_3^2\Big)u_3^*(p,r)=-F_3^*(p,r),\quad r\in(R_2,\infty)$$

за крайовими умовами

$$\Big(\overline{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{11}^0\Big)u_1^*(p,r)\Big|_{r=R_0}=\overline{\omega}_0^*(p),$$

$$\frac{du_3^*}{dr}\Big|_{r=\infty}=0 \quad (6)$$

та умовами спряження

$$\Big[\Big(\overline{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{j1}^k\Big)u_k^*(p,r)-$$

$$-\Big(\overline{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{j2}^k\Big)u_{k+1}^*(p,r)\Big]\Big|_{r=R_k}=$$

$$=\overline{\omega}_{jk}^*(p),\ j,k=1,2 \quad (7)$$

У рівностях (5)-(7) прийняті позначення: $q_j^2=a_j^{-2}\Big(p+\gamma_j^2\Big)$,

$$F_j^*(p,r)=a_j^{-2}\Big(f_j^*(p,r)+g_j(r)\Big);$$

$$\overline{\alpha}_{11}^0=\alpha_{11}^0+p\delta_{11}^0,\ \overline{\beta}_{11}^0=\beta_{11}^0+p\gamma_{11}^0;$$

$$\overline{\alpha}_{jm}^k=\alpha_{jm}^k+p\delta_{jm}^k,$$

$$\overline{\beta}_{jm}^k=\beta_{jm}^k+p\gamma_{jm}^k;\overline{\omega}_0^*(p)=\omega_0^*(p)+\psi_{11}^0,$$

$$\psi_{11}^0=\delta_{11}^0 g_1'(R_0)+\gamma_{11}^0 g_1(R_0),\overline{\omega}_{jk}^*(p)=\omega_{jk}^*(p)+\psi_{jk},$$

$$\psi_{jk}=\delta_{j1}^k g_k'(R_k)+\delta_{j1}^k g_k(R_k)-$$

$$-\Big[\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k)+\delta_{j2}^k g_{k+1}(R_k)\Big].$$

Можна вважати, що $\psi_{11}^0=0$ і $\psi_{jk}=0$. Якщо не так, то переходимо до нових початкових даних:

$$\overline{g}_1=g_1(r)-(a_1r+b_1),\overline{g}_2(r)=g_2(r)-(a_2r+b_2),$$

$$\overline{g}_3(r)=g_3(r)-b_3.$$

Невідомі величини a_1, a_2 та b_m $(m=\overline{1,3})$ знаходимо із неоднорідної алгебраїчної системи з п'яти рівнянь:

$$(\delta_{11}^0+\gamma_{11}^0R_0)a_1+\gamma_{11}^0 b_1=\psi_{11}^0$$

$$q_{j1}^1 a_1+\gamma_{j1}^1 b_1-q_{j2}^1 a_2-\gamma_{j2}^1 b_2=\psi_{j1}, \quad (8)$$

$$q_{j1}^2 a_2+\gamma_{j1}^2 b_2-\gamma_{j2}^2 b_3=\psi_{j2},\quad j=1,2$$

Тут прийняті позначення:

$$q_{j1}^1 = \delta_{j1}^1 + \gamma_{j1}^1 R_1, \quad q_{j2}^1 = \delta_{j2}^1 + \gamma_{j2}^1 R_1,$$

$$q_{j1}^2 = \delta_{j1}^2 + \gamma_{j1}^2 R_2,\ j = 1, 2.$$

При виконанні умов на коефіцієнти алгебраїчна система (8) сумісна й має єдиний розв'язок.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (5)-(7) методом функцій Коші [4,7]:

$$u_1^*(p,r) = A_1 P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) + B_1 L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) +$$

$$+ \int\limits_{R_0}^{R_1} E_1^*(p,r,\rho) F_1^*(p,\rho) sh\rho d\rho,$$

$$u_2^*(p,r) = A_2 chq_2 r + B_2 shq_2 r +$$

$$+ \int\limits_{R_1}^{R_2} E_2^*(p,r,\rho) F_2^*(p,\rho) d\rho, \tag{9}$$

$$u_3^*(p,r) = B_3 K_{\nu,\alpha}(q_3 r) +$$

$$+ \int\limits_{R_2}^{\infty} E_3^*(p,r,\rho) F_3^*(p,\rho) \rho^{2\alpha+1} d\rho.$$

Тут $E_j^*(p,r,\rho)$, $j = \overline{1,3}$, – функції Коші [4,7] :

$$E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho-0} =$$

$$= -\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, j = \overline{1,3},$$

$$\Big(\varphi_1(\rho) = sh\rho, \quad \varphi_2(\rho) = 1, \quad \varphi_3(\rho) = \rho^{2\alpha+1}\Big).$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1^*(p,r,\rho) =$$

$$= \begin{cases} \overset{-}{E}{}_1^* \equiv C_1 P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) + \\ + D_1 L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr), \quad R_0 < r < \rho < R_1 \\ \overset{+}{E}{}_1^* \equiv C_2 P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) + \\ + D_2 L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr), \quad R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases}$$

Властивості (10) функції Коші дають алгебраїчну систему:

$$(C_2 - C_1) P_{\nu_1}^{(\mu)}(ch\rho) + (D_2 - D_1) L_{\nu_1}^{(\mu)}(ch\rho) = 0,$$

$$(C_2 - C_1) P_{\nu_1}^{(\mu)\prime}(ch\rho) + (D_2 - D_1) L_{\nu_1}^{(\mu)\prime}(ch\rho) =$$

$$= -(sh^2\rho)^{-1}$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -B_{(\mu)}(q_1) L_{\nu_1}^{(\mu)}(ch\rho),$$

$$D_2 - D_1 = B_{(\mu)}(q_1) P_{\nu_1}^{(\mu)}(ch\rho) \tag{11}$$

Доповнимо рівності (11) алгебраїчними рівняннями:

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^0\right) \overset{-}{E}{}_1^* \Big|_{r=R_0} = 0 \ :$$

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu),01}(chR_0) C_1 + Z_{\nu_1;11}^{(\mu),02}(chR_0) D_1 = 0 \tag{12}$$

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^1 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^1\right) \overset{+}{E}{}_1^* \Big|_{r=R_1} = 0 \ :$$

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu),11}(chR_1) C_2 + Z_{\nu_1;11}^{(\mu),12}(chR_1) D_2 = 0.$$

Внаслідок співвідношень (11) алгебраїчна система (12) набуває вигляду:

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu),01}(chR_0) C_1 + Z_{\nu_1;11}^{(\mu),02}(chR_0) D_1 = 0 \tag{13}$$

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu),11}(chR_1) C_1 + Z_{\nu_1;11}^{(\mu),12}(chR_1) D_1 =$$

$$B_{(\mu)}(q_1) F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho)$$

Розв'язуємо алгебраїчну систему (13) за правилами Крамера [6]:

$$C_1 = -\frac{B_{(\mu)}(q_1) Z_{\nu_1;11}^{(\mu);02}(chR_0)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)} F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho),$$

$$D_1 = \frac{B_{(\mu)}(q_1) Z_{\nu_1;11}^{(\mu);01}(chR_0)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)} F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho).$$

Цим функція Коші $E_1^*(p,r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_1^*(p,r,\rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_1)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)} \times$$

$$
\times \begin{cases} F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0, chr)F^{(\mu),1}_{\nu_1;11}(chR_1, ch\rho), \\ \qquad R_0 < r < \rho < R_1 \\ F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0, ch\rho)F^{(\mu),1}_{\nu_1;11}(chR_1, chr), \\ \qquad R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases} \tag{14}
$$

Тут прийнято позначення:

$$
B_{(\mu)}(q_1) = \frac{\pi}{2}\frac{2^{\mu_1}}{2^{\mu_2}}\frac{\Gamma(1/2 + q_1 - \nu^+_{12})}{\Gamma(1/2 + q_1 + \nu^+_{12})}\times
$$

$$
\times\frac{\Gamma(1/2 + q_1 - \nu^-_{12})}{\Gamma(1/2 + q_1 + \nu^-_{12})}, \quad \nu^\pm_{12} = \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2),
$$

$$
Z^{(\mu),m1}_{\nu_1;jk}(chR_m) =
$$

$$
= \left(\overline{\alpha}^m_{jk}\frac{d}{dr} + \overline{\beta}^m_{jk}\right)P^{(\mu)}_{\nu_1}(chr)\Big|_{r=R_1}
$$

$$
Z^{(\mu),m2}_{\nu_1;jk}(chR_m) =
$$

$$
= \left(\overline{\alpha}^m_{jk}\frac{d}{dr} + \overline{\beta}^m_{jk}\right)L^{(\mu)}_{\nu_1}(chr)\Big|_{r=R_1};
$$

$$
F^{(\mu),m}_{\nu_1;jk}(chR_m, chr) = Z^{(\mu),m1}_{\nu_1;jk}(chR_m)L^{(\mu)}_{\nu_1}(chr)-
$$

$$
-Z^{(\mu),m2}_{\nu_1;jk}(chR_m)P^{(\mu)}_{\nu_1}(chr).
$$

$$
\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;j1}(chR_0, chR_1) =
$$

$$
= Z^{(\mu);01}_{\nu_1;11}(chR_0)Z^{(\mu);12}_{\nu_1;j1}(chR_1)-
$$

$$
-Z^{(\mu);02}_{\nu_1;11}(chR_0)Z^{(\mu);11}_{\nu_1;j1}(chR_1);
$$

$j = 1, 2.$

Припустимо, що функція Коші

$$
E^*_2(p, r, \rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}{}^*_2 \equiv C_1chq_2r + D_1shq_2r, \\ R_1 < r < \rho < R_2 \\ \overset{+}{E}{}^*_2 \equiv C_2chq_2r + D_2shq_2r, \\ R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases}
$$

Властивості (10) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$
(C_2 - C_1)chq_2\rho + (D_2 - D_1)shq_2\rho = 0
$$

$$
(C_2 - C_1)shq_2\rho + (D_2 - D_1)chq_2\rho = -q_2^{-1}
$$

Звідси одержуємо співвідношення:

$$
C_2 - C_1 = q_2^{-1}shq_2\rho, \quad D_2 - D_1 = -q_2^{-1}chq_2\rho \tag{15}
$$

Доповнимо рівності (15) алгебраїчними рівняннями:

$$
\left(\alpha^1_{12}\frac{d}{dr} + \beta^1_{12}\right)\overset{-}{E}{}^*_2\Big|_{r=R_1} = 0 \ :
$$

$$
V^{11}_{12}(q_2R_1)C_1 + V^{12}_{12}(q_2R_1)D_1 = 0 \tag{16}
$$

$$
\left(\alpha^2_{11}\frac{d}{dr} + \beta^2_{11}\right)\overset{+}{E}{}^*_2\Big|_{r=R_2} = 0 \ :
$$

$$
V^{21}_{11}(q_2R_2)C_2 + V^{22}_{11}(q_2R_2)D_2 = 0
$$

Внаслідок співвідношень (15) алгебраїчна система (16) набуває вигляду:

$$
V^{11}_{12}(q_2R_1)C_1 + V^{12}_{12}(q_2R_1)D_1 = 0 \tag{17}
$$

$$
V^{21}_{11}(q_2R_2)C_1 + V^{22}_{11}(q_2R_2)D_1 = q_2^{-1}\Phi^2_{11}(q_2R_2, q_2\rho)
$$

Розв'язок алгебраїчної системи (17) знаходимо за правилами Крамера [6]

$$
C_1 = \frac{-V^{12}_{12}(q_2R_1)}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)}\Phi^2_{11}(q_2R_2, q_2\rho),
$$

$$
D_1 = \frac{V^{11}_{12}(q_2R_1)}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)}\Phi^2_{11}(q_2R_2, q_2\rho).
$$

Цим функція Коші $E^*_2(p, r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$
E^*_2(p, r, \rho) = -\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)}\times
$$

$$
\times \begin{cases} \Phi^1_{12}(q_2R_1, q_2r)\Phi^2_{11}(q_2R_2, q_2\rho), \\ R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Phi^1_{12}(q_2R_1, q_2\rho)\Phi^2_{11}(q_2R_1, q_2r), \\ R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases} \tag{18}
$$

Тут

$$
V^{m1}_{jk}(q_2R_m) = \overline{\alpha}^m_{jk}q_2shq_2R_m + \overline{\beta}^m_{jk}chq_2R_m \equiv
$$

$$
\equiv \left(\overline{\alpha}^m_{jk}\frac{d}{dr} + \overline{\beta}^m_{jk}\right)\operatorname{ch} q_2r\Big|_{r=R_m},
$$

$$
V^{m2}_{jk}(q_2R_m) = \overline{\alpha}^m_{jk}q_2\operatorname{ch} q_2R_m + \overline{\beta}^m_{jk}shq_2R_m \equiv
$$

$$
\equiv \left(\overline{\alpha}^m_{jk}\frac{d}{dr} + \overline{\beta}^m_{jk}\right)\operatorname{sh} q_2r\Big|_{r=R_m},
$$

$$
\Phi^m_{jk}(q_2R_m, q_2r) = V^{m2}_{jk}(q_2R_m)\operatorname{ch} q_2r-
$$

$$
-V^{m1}_{jk}(q_2R_m)\operatorname{sh} q_2r,
$$

$$
\Delta_{jk}(q_2R_1, q_2R_2) = V^{11}_{j2}(q_2R_1)V^{22}_{k1}(q_2R_2)-
$$

$$-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{21}(q_2R_2);\ j,k=1,2$$

Нехай функція Коші

$$E_3^*(p,r,\rho)=$$

$$=\begin{cases}\overset{-}{E}{}_3^*\equiv C_1I_{\nu,\alpha}(q_3r)+\\ +D_1K_{\nu,\alpha}(q_3r),R_2<r<\rho<\infty\\ \overset{+}{E}{}_3^*\equiv D_2K_{\nu,\alpha}(q_3r),R_2<\rho<r<\infty\end{cases}$$

Властивості (10) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$-C_1I_{\nu,\alpha}(q_3\rho)+(D_2-D_1)K_{\nu,\alpha}(q_3\rho)=0$$

$$-C_1I'_{\nu,\alpha}(q_3\rho)+(D_2-D_1)K'_{\nu,\alpha}(q_3\rho)=$$

$$=-\left(q_3\rho^{2\alpha+1}\right)^{-1}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_1=q_3^{2\alpha}K_{\nu,\alpha}(q_3\rho),\quad D_2-D_1=q_3^{2\alpha}I_{\nu,\alpha}(q_3\rho)\qquad(19)$$

Доповнимо рівності (19) алгебраїчним рівнянням:

$$\left(\overline{\alpha}_{12}^2\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{12}^2\right)\overset{-}{E}{}_3^*\Big|_{r=R_2}=0\ :$$

$$U_{\nu,\alpha;12}^{21}(q_3R_2)C_1+U_{\nu,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)D_1=0\qquad(20)$$

Із алгебраїчної системи (19), (20) знаходимо, що

$$D_2=-\left(U_{\nu,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)\right)^{-1}q_3^{2\alpha}\Psi_{\nu,\alpha;12}^{2*}(q_3R_2,q_3\rho).$$

Цим функція Коші $E_3^*(p,r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_3^*(p,r,\rho)=-\frac{q_3^{2\alpha}}{U_{\nu,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)}\times$$

$$\times\begin{cases}\Psi_{\nu,\alpha;12}^{2*}(q_3R_2,q_3r)K_{\nu,\alpha}(q_3\rho),\\ R_2<r<\rho<\infty,\\ \Psi_{\nu,\alpha;12}^{2*}(q_3R_2,q_3\rho)K_{\nu,\alpha}(q_3r),\\ R_2<\rho<r<\infty.\end{cases}\qquad(21)$$

Тут

$$U_{\nu,\alpha;jk}^{m1}(q_2R_m)=\Big(\overline{\alpha}_{jk}^m\frac{\nu-\alpha}{R_m}+$$

$$+\overline{\beta}_{jk}^m\Big)I_{\nu,\alpha}(q_2R_m)+\overline{\alpha}_{jk}^mq_2^2R_mI_{\nu+1,\alpha+1}(q_2R_m),$$

$$U_{\nu,\alpha;jk}^{m2}(q_2R_m)=\left(\overline{\alpha}_{jk}^m\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\overline{\beta}_{jk}^m\right)K_{\nu,\alpha}(q_2R_m)-$$

$$-\overline{\alpha}_{jk}^mq_2^2R_mK_{\nu+1,\alpha+1}(q_2R_m),$$

$$\Psi_{\nu,\alpha;jk}^{m*}(q_2R_m,q_2r)=U_{\nu,\alpha;jk}^{m1}(q_2R_m)K_{\nu,\alpha}(q_2r)-$$

$$-U_{\nu,\alpha;jk}^{m2}(q_2R_m)I_{\nu,\alpha}(q_2r),$$

$$\Delta_{\nu,\alpha;jk}(q_2R_1,q_2R_2)=U_{\nu,\alpha;j2}^{11}(q_2R_1)U_{\nu,\alpha;k1}^{22}(q_2R_2)-$$

$$-U_{\nu,\alpha;j2}^{12}(q_2R_1)U_{\nu,\alpha;k1}^{21}(q_2R_2).$$

Крайова умова в точці $r=R_0$ й умови спряження (7) для визначення величин A_j $(j=1,2)$ та B_k $(k=\overline{1,3})$ дають неоднорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu);01}(chR_0)A_1+Z_{\nu_1;11}^{(\mu);02}(chR_0)B_1=\overline{\omega}_0^*(p)$$

$$Z_{\nu_1;j1}^{(\mu);11}(chR_1)A_1+Z_{\nu_1;j1}^{(\mu);12}(chR_1)B_1-$$

$$-V_{j2}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{j2}^{12}(q_2R_1)B_2=\overline{\omega}_{j1}^*+\delta_{j2}G_{12}^*,$$

$$V_{j1}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{j1}^{22}(q_2R_2)B_2-U_{\nu,\alpha;j2}^{22}(q_3R_2)B_3=$$

$$=\overline{\omega}_{j2}^*+\delta_{j2}G_{23}^*,\ j=1,2\qquad(22)$$

В алгебраїчній системі (22) беруть участь функції

$$G_{12}^*=\frac{c_{11}^*}{shR_1}\int\limits_{R_0}^{R_1}\frac{F_{\nu_1;11}^{(\mu);0}(chR_0,ch\rho)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)}F_1^*(p,\rho)\times$$

$$\times sh\rho d\rho+c_{21}^*\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}F_2^*(p,\rho)d\rho,$$

$$G_{23}^*=-c_{12}^*\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}F_2^*(p,\rho)d\rho+$$

$$+\frac{c_{22}^*}{R_2^{2\alpha+1}}\int\limits_{R_2}^{\infty}\frac{K_{\nu,\alpha}(q_3\rho)}{U_{\nu,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)}F_3^*(p,\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2}.

Введемо до розгляду функції:

$$A_{(\mu);j}(p)=\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2)-$$

$$-\Delta_{\nu_1;21}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$B_{\nu,\alpha;j}(p)=U_{\nu,\alpha;22}^{22}(q_3R_2)\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2)-$$

$$-U_{\nu,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2),\ j=1,2$$

$$\Theta_{(\mu);1}(p,r)=\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0,chR_1)\Phi^1_{22}(q_2R_1,q_2r)-$$
$$-\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(chR_0,chR_1)\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2r),$$
$$\Theta_{\nu,\alpha;2}(p,r)=U^{22}_{\nu,\alpha;12}(q_3R_2)\Phi^2_{21}(q_3R_2,q_3r)-$$
$$-U^{22}_{\nu,\alpha;22}(q_3R_2)\Phi^2_{11}(q_3R_2,q_3r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (5)-(7): для $p=\sigma+is$ із $Re\,p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 - абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $Im\,p=s\in(-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (22) відмінний від нуля

$$\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)=A_{(\mu);1}(p)U^{22}_{\nu,\alpha;22}(q_3R_2)-$$
$$-A_{(\mu);2}(p)U^{22}_{\nu,\alpha;12}(q_3R_2)=$$
$$=\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0,chR_1)B_{\nu,\alpha;2}(p)-$$
$$-\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(chR_0,chR_1)B_{\nu,\alpha;1}(p)\neq 0 \qquad (23)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (5)-(7):
1) породжені неоднорідністю крайової умови в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;11}(p,r)=\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\Big[B_{\nu,\alpha;1}(p)\times$$
$$\times F^{(\mu),1}_{\nu_1;21}(chR_1,chr)-B_{\nu,\alpha;2}(p)F^{(\mu),1}_{\nu_1;11}(chR_1,chr)\Big], \qquad (24)$$
$$W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;12}(p,r)=-\frac{c^*_{11}}{B_{(\mu)}(q_1)shR_1}\frac{\Theta_{\nu,\alpha;2}(p,r)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)},$$
$$W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;13}(p,r)=-\frac{c^*_{11}c^*_{12}q_2}{B_{(\mu)}(q_1)shR_1}\frac{K_{\nu,\alpha}(q_3r)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{(\mu);1*}_{\nu,\alpha;11}(p,r)=\frac{B_{\nu,\alpha;2}}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr),$$
$$R^{(\mu);1*}_{\nu,\alpha;21}(p,r)=-\frac{B_{\nu,\alpha;1}}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr),$$
$$R^{(\mu);1*}_{\nu,\alpha;12}(p,r)=-\frac{c^*_{21}q_2}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}U^{22}_{\nu,\alpha;22}(q_3R_2)\times$$
$$\times F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr), \qquad (25)$$
$$R^{(\mu);1*}_{\nu,\alpha;22}(p,r)=\frac{c^*_{21}q_2}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}U^{22}_{\nu,\alpha;12}(q_3R_2)\times$$
$$\times F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr),$$
$$R^{(\mu);2*}_{\nu,\alpha;11}(p,r)=-\frac{\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\Theta_{\nu,\alpha;2}(p,r),$$
$$R^{(\mu);2*}_{\nu,\alpha;21}(p,r)=\frac{\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0,chR_1)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\Theta_{\nu,\alpha;2}(p,r),$$
$$R^{(\mu);2*}_{\nu,\alpha;12}(p,r)=-\frac{U^{22}_{\nu,\alpha;22}(q_3R_2)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\Theta_{(\mu);1}(p,r),$$
$$R^{(\mu);2*}_{\nu,\alpha;22}(p,r)=\frac{U^{22}_{\nu,\alpha;12}(q_3R_2)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\Theta_{(\mu);1}(p,r),$$
$$R^{(\mu);3*}_{\nu,\alpha;11}(p,r)=-\frac{c^*_{12}q_2}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(chR_0,chR_1)K_{\nu,\alpha}(q_3r),$$
$$R^{(\mu);3*}_{\nu,\alpha;21}(p,r)=\frac{c^*_{12}q_2}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0,chR_1)K_{\nu,\alpha}(q_3r),$$
$$R^{(\mu);3*}_{\nu,\alpha;12}(p,r)=\frac{A_{(\mu);2}(p)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}K_{\nu,\alpha}(q_3r),$$
$$R^{(\mu);3*}_{\nu,\alpha;22}(p,r)=-\frac{A_{(\mu);1}(p)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}K_{\nu,\alpha}(q_3r);$$

3) породжені неоднорідністю системи (5) функції впливу:

$$\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;11}(p,r,\rho)=-B_{(\mu)}(q_1)\times$$
$$\times\begin{cases} F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr)W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;11}(p,\rho), \\ R_0<r<\rho<R_1 \\ F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,ch\rho)W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;11}(p,r), \\ R_0<\rho<r<R_1 \end{cases},$$
$$\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;12}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{21}}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr)\times$$
$$\times\Theta_{\nu,\alpha;2}(p,\rho),$$
$$\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;13}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{21}q_2c^*_{22}}{R_2^{2\alpha+1}\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\times$$
$$\times F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr)K_{\nu,\alpha}(q_3\rho),$$
$$\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;21}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{11}}{shR_1}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\times$$
$$\times F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,ch\rho)\Theta_{\nu,\alpha;2}(p,r),$$
$$\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;22}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_2\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\times$$

$$\times\begin{cases}\Theta_{(\mu);1}(p,r)\Theta_{\nu,\alpha;2}(p,\rho), & R_1<r<\rho<R_2\\ \Theta_{(\mu);1}(p,\rho)\Theta_{\nu,\alpha;2}(p,r), & R_1<\rho<r<R_2\end{cases}$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;23}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{22}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\Theta_{(\mu);1}(p,r)\times$$

$$\times K_{\nu,\alpha}(q_3\rho), \qquad (26)$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;31}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{11}c^*_{12}q_2}{shR_1\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\times$$

$$\times F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,ch\rho)K_{\nu,\alpha}(q_3r),$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;32}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{12}}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\Theta_{(\mu);1}(p,\rho)K_{\nu,\alpha}(q_3r),$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;33}(p,r,\rho)=\frac{q_3^{2\alpha}}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(p)}\times$$

$$\times\begin{cases}K_{\nu,\alpha}(q_3\rho)\Big[A_{(\mu);2}(p)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha;12}(q_3R_2,q_3r)-\\ \quad -A_{(\mu);1}(p)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha;22}(q_3R_2,q_3r)\Big],\\ \quad R_2<r<\rho<\infty\\ K_{\nu,\alpha}(q_3r)\Big[A_{(\mu);2}(p)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha;12}(q_3R_2,q_3\rho)-\\ \quad -A_{(\mu);1}(p)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha;22}(q_3R_2,q_3\rho)\Big],\\ \quad R_2<\rho<r<\infty\end{cases}.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (22) й підстановки одержаних значень A_j та B_k у формули (9) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (5)-(7):

$$u^*_j(p,r)=W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;1j}(p,r)\overline{\omega}^*_0(p)+$$

$$+\sum_{m,k=1}^{2}R^{(\mu);j*}_{\nu,\alpha;mk}(p,r)\overline{\omega}^*_{mk}(p)+$$

$$+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;j1}(p,r,\rho)F^*_1(p,\rho)sh\rho d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;j2}(p,r,\rho)F^*_2(\rho)d\rho+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;j3}(p,r,\rho)F^*_3(p,\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho,\quad j=\overline{1,3} \qquad (27)$$

Повертаючись до оригіналу, маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (1)-(4):

$$u_j(t,r)=\int_0^t W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1j}(t-\tau,r)\omega_0(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{m,k=1}^{2}\int_0^t R^{(\mu);j}_{\nu,\alpha;mk}(t-\tau,r)\omega_{mk}(\tau)d\tau+$$

$$+W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1j}(t,r)\psi^0_{11}+\sum_{m,k=1}^{2}R^{(\mu);j}_{\nu,\alpha;mk}(t,r)\psi_{mk}+$$

$$+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j1}(t-\tau,r,\rho)\times$$

$$\times\Big[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)\Big]sh\rho d\rho d\tau a_1^{-2}+$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j2}(t-\tau,r,\rho)\Big[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)\times$$

$$\times g_2(\rho)\Big]a_2^{-2}d\rho d\tau+\int_0^t\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j3}(t-\tau,r,\rho)\times$$

$$\times\Big[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)\Big]a_3^{-2}\rho^{2\alpha+1}d\rho d\tau, \qquad (28)$$

$j=\overline{1,3}$.

У рівностях (28) за означенням [5]

$$W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1j}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;1j}(p,r)e^{pt}dp;$$

$$j=\overline{1,3} \qquad (29)$$

$$R^{(\mu);j}_{\nu,\alpha;mk}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}R^{(\mu);j*}_{\nu,\alpha;mk}(p,r)e^{pt}dp;$$

$$m,k=1,2;\ j=\overline{1,3} \qquad (30)$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{\nu,\alpha;jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp;$$

$$j,k=\overline{1,3} \qquad (31)$$

Теорема. *Якщо* $f_j(t,r)$, $j=\overline{1,3}$, $\omega_{ik}(t)$, $i,k=1,2$, $g_0(t)$, $w_0(t)$ *є оригіналами за Лапласом,* $f_j(t,r)$, $g_j(r)$, $j=\overline{1,3}$, *– двічі неперервно диференційовні за змінною r та задовольняють однорідні умови спряження, то задача (1) – (4) має розв'язок $u_j(t,r)$, що визначається формулою (28), а при виконанні умови однозначної розв'язності алгебраїчної системи (19) він єдиний.*

Особливими точками функцій $W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;1j}(p,r)$, $R^{(\mu);j*}_{\nu,\alpha;mk}(p,r)$ та $\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_j^2$ $(j=\overline{1,3})$ й точка $p=\infty$. Якщо знову покласти $q_j=ib_j\equiv ia_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, при $\gamma^2=\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}$ знаходимо, що $p=-(\beta^2+\gamma^2)\equiv(\beta^2+\gamma^2)\exp(\pi i)$, $dp=-2\beta d\beta$.

Використовуючи метод контурного інтеграла, лему Жордана й теорему Коші, приходимо до розрахункових формул:

$$W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1j}(t,r)=$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Im\Big\{W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;1j}(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2),r)\Big\}\times$$
$$\times e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\beta d\beta,\ j=\overline{1,3}, \tag{32}$$
$$R^{(\mu);j}_{\nu,\alpha;mk}(t,r)=$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Im\Big\{R^{(\mu);j*}_{\nu,\alpha;mk}(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2),r)\Big\}\times$$
$$\times e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\beta d\beta;m,k=1,2;\ j=\overline{1,3}, \tag{33}$$
$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{\nu,\alpha;jk}(t,r,\rho)=$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Im\Big\{\mathcal{H}^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;jk}(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2),r,\rho)\Big\}\times$$
$$\times e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\beta d\beta;\ j,k=\overline{1,3}. \tag{34}$$

Тут $Im(\cdots)$ означає уявну частину виразу $(\cdots)$.

Визначимо величини та функції:

$$a_1^2\sigma_1=\frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_1},\ a_2^2\sigma_2=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha+1},$$
$$a_3^2\sigma_3=1;\ d_1=a_1^2\sigma_1 shR_1:c_{11,1},$$
$$d_2=a_2^2\sigma_2:c_{11,2},\ \delta^{(\mu)}_{\nu_1^*;j1}(chR_0,chR_1)=$$
$$=Y^{(\mu),01}_{\nu_1^*;11}(chR_0)Y^{(\mu),12}_{\nu_1^*;j1}(chR_1)-Y^{(\mu),02}_{\nu_1^*;11}(chR_0)\times$$
$$\times Y^{(\mu),11}_{\nu_1^*;j1}(chR_1);\ Y^{(\mu),m1}_{\nu_1^*;jk}(chR_m)=$$
$$=\Big(\tilde\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^m_{jk}\Big)A^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr)\Big|_{r=R_m},$$
$$Y^{(\mu),m2}_{\nu_1^*;jk}(chR_m)=\Big(\tilde\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^m_{jk}\Big)B^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr)\Big|_{r=R_m};$$
$\nu_1^*=-1/2+ib_1$;
$$\tilde\alpha^m_{jk}=\alpha^m_{jk}-\delta^m_{jk}(\beta^2+\gamma^2),\ \tilde\beta^m_{jk}=\beta^m_{jk}-\gamma^m_{jk}(\beta^2+\gamma^2);$$
$$f^{(\mu),0}_{\nu_1^*;11}(chR_0,chr)=Y^{(\mu),01}_{\nu_1^*;11}(chR_0)B^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr)-$$
$$-Y^{(\mu),02}_{\nu_1^*;11}(chR_0)A^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr);$$
$$V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(r,\beta)=\frac{2c_{21,2}}{\pi b_3^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}}c_{21,1}b_2f^{(\mu),0}_{\nu_1^*;11}(chR_0,chr),$$
$$\Omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(\beta)=\frac{\beta b_3^{2\alpha}}{\Big[\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta)\Big]^2+\Big[\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta)\Big]^2};$$
$$V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(r,\beta)=\frac{2c_{21,2}}{\pi b_3^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}}\Big[\delta^{(\mu)}_{\nu_1^*;11}(chR_0,chR_1)\times$$
$$\times\varphi^1_{22}(b_2R_1,b_2r)-\delta^{(\mu)}_{\nu_1^*;21}(chR_0,chR_1)\times$$
$$\times\varphi^1_{12}(b_2R_1,b_2r)\Big],\ \varphi^1_{j2}(b_2R_1,b_2r)=$$
$$=v^{12}_{j2}(b_2R_1)\cos b_2r-v^{11}_{j2}(b_2R_1)\sin b_2r;$$
$$V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3}(r,\beta)=\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta)N_{\nu,\alpha}(b_3r)-\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta)J_{\nu,\alpha}(b_3r);$$
$$a_{(\mu);j}(\beta)=\delta^{(\mu)}_{\nu_1^*;11}(chR_0,chR_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2)-$$
$$-\delta^{(\mu)}_{\nu_1^*;21}(chR_0,chR_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2),$$
$$\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(\beta)=a_{(\mu);1}(\beta)u^{2j}_{\nu,\alpha;22}(b_3R_2)-$$
$$-a_{(\mu);2}(\beta)u^{2j}_{\nu,\alpha;12}(b_3R_2);\ j=1,2;$$
$$Z^{(\mu),k}_{\nu,\alpha;j2}(\beta)=\Big(\tilde\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^k_{j2}\Big)V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k};$$
$j,k=1,2$. Всі інші функції відомі [2,8].

У результаті виконання зазначених в рівностях (32)-(34) операцій одержуємо функції:

$$W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1j}(t,r)=\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\Big[(-\tilde\alpha^0_{11})^{-1}\times$$

$$\times (a_1^2\sigma_1 shR_0)V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta)\Big]\times$$

$$\times V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta,\ j=\overline{1,3}, \qquad (35)$$

$$R_{\nu,\alpha;mk}^{(\mu);j}(t,r)=\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}Z_{\nu,\alpha;m2}^{(\mu);k}(\beta)\times$$

$$\times V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\cdot d_k; \qquad (36)$$

$m,k=1,2;\ j=\overline{1,3}$;

$$\mathcal{H}_{\nu,\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$

$$\times V_{\nu,\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\sigma_k a_k^2; j,k=\overline{1,3}. \qquad (37)$$

Якщо прийняти до уваги, що

$$(-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}(a_1^2\sigma_1 shR_0)V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta)=$$

$$=\frac{2b_2c_{11,1}c_{11,2}}{\pi b_3^{2\alpha}S_{(\mu)}(b_1)shR_1}\equiv\eta_\alpha^{(\mu)}(\beta),$$

то формула (35) набуде вигляду:

$$W_{\nu,\alpha;1j}^{(\mu)}(t,r)=\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$

$$\times\Omega_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta)\eta_\alpha^{(\mu)}(\beta)d\beta,\ j=\overline{1,3} \qquad (38)$$

Введемо до розгляду функції:

$$D_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\tau,\beta)=\int\limits_{R_0}^{R_1}f_1(\tau,\rho)V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_1 sh\rho d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}f_2(\tau,\rho)V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_2 d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_2}^{\infty}f_3(\tau,\rho)V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_3\rho^{2\alpha+1}d\rho;$$

$$D_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta)=\int\limits_{R_0}^{R_1}g_1(\rho)V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_1 sh\rho d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}g_2(\rho)V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_2 d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_2}^{\infty}g_3(\rho)V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_3\rho^{2\alpha+1}d\rho.$$

Інтегральне зображення (28) аналітичного розв'язку параболічної задачі (1)-(4) буде мати структуру:

$$u_j(t,r)=\int\limits_0^t W_{\nu,\alpha;1j}^{(\mu)}(t-\tau,r)\Big[\omega_0(\tau)+$$

$$+\delta_+(\tau)\psi_{11}^0\Big]d\tau+\sum_{k=1}^2\int\limits_0^t\Big[R_{\nu,\alpha;1k}^{(\mu);j}(t-\tau,r)\Big(\omega_{2k}(\tau)+$$

$$+\delta_+(\tau)\psi_{2k}\Big)-R_{\nu,\alpha;2k}^{(\mu);j}(t-\tau,r)\Big(\omega_{1k}(\tau)+$$

$$+\delta_+(\tau)\psi_{1k}\Big)\Big]d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}D_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\tau,\beta)V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$

$$\times\Omega_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta d\tau+\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}D_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta)\times$$

$$\times V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta;\ j=\overline{1,3} \qquad (39)$$

Тут $\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau=0+$ [7].

Якщо початкові умови нульові (практично це завжди так), то розв'язком параболічної задачі (1)-(4) є функції

$$u_j(t,r)=\int\limits_0^t W_{\nu,\alpha;1j}^{(\mu)}(t-\tau,r)\omega_0(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^2\int\limits_0^t\Big[R_{\nu,\alpha;1k}^{(\mu);j}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)-$$

$$-R_{\nu,\alpha;2k}^{(\mu);j}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)\Big]d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}D_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\tau,\beta)V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$

$$\times\Omega_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta,j=\overline{1,3} \qquad (40)$$

Якщо початкові умови підібрані так, що $\psi_{11}^0=0$, $\psi_{mk}=0$, то в функції $u_j(t,r)$ мають структуру (39) при $\psi_{11}^0 = 0$, $\psi_{2k} = 0$ та $\psi_{1k} = 0$.

Набір функцій $\omega_0(t)$, $f_j(t,r)$, $g_j(r)$ та $\omega_{jk}(t)$ дозволяє варіювати процесом теплопровідності в даному середовищі.

Розв'язок даної задачі $u(t,r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r); u_3(t,r)\}$ поліпараметричний та має замкнутий алгоритмічний характер. Це дає змогу використовувати його як в числових розрахунках, так і в теоретичних дослідженнях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 735с.

2. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. - Чернівці: Прут, 2002. - 248с.

3. *Ленюк М.П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. - 62с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).

4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз. 1959. - 468с.

5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1987. - 688с.

6. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1971. - 432с.

7. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.

8. *Ленюк М.П.* Обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами гібридних диференціальних операторів другого порядку. - Том VI. - Чернівці: Прут, 2010. - 404с.

9. *Ленюк М.П., Мороз В.В.* Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження // Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314-315. Математика. - Чернівці: Рута, 2006. - С. 105-113.