Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 1, 110–117 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №1, 110–117

С.А.Іліка, І.І.Тузик, І.М.Черевко

АПРОКСИМАЦІЯ НЕАСИМПТОТИЧНИХ КОРЕНІВ КВАЗІПОЛІНОМІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу розглядаються обчислювальні алгоритми, що базуються на апроксимації диференціально-різницевих рівнянь за схемою Красовського-Рєпіна та схемою апроксимації підвищеної точності. Здійснено порівняння розглядуваних алгоритмів на модельному прикладі.

Ключові слова і фрази: диференціально-різницеве рівняння, нейтральний тип, апроксимація диференціально-різницевих рівнянь, схема Красовського-Рєпіна, схема апроксимації підвищеної точності, квазіполіном, неасимптотичні корені.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
e-mail: *s.ilika@chnu.edu.ua, i.tuzyk@chnu.edu.ua, i.cherevko@chnu.edu.ua*

Вступ

Схему апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь (ДРР) послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь, яка запропонована М.М.Красовським [1] і розвинена Ю.М.Рєпіним [2], називатимемо схемою Красовського-Рєпіна. Подальше поширення цієї схеми апроксимації на різні класи лінійних диференціально-різницевих рівнянь розглянуто в роботах [3, 4]. Побудова та обгрунтування схеми апроксимації лінійних диференціально-функціональних рівнянь здійснена в [5, 6].

При дослідженні задач стійкості лінійних ДРР важливу роль відіграє розміщення коренів відповідних квазіполіномів. Аналіз розміщення коренів квазіполіномів досліджувався в роботах [7, 8]. Основні методи, що тут розвиваються, стосуються побудови спеціальних многочленів, нулі яких наближать нулі квазіполіномів.

При дослідженні апроксимації лінійних ДРР виявилось, що наближення неасимптотичних коренів їх квазіполіномів можна знаходити за допомогою характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь [3, 4, 5, 9]. На практиці застосування цих результатів виявилось затрудненим, оскільки задовільна точність наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів досягалась при високій розмірності апроксимуючої системи.

УДК 517.925
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K20, 34K28, 34K40.

1 Схема апроксимації Красовського-Рєпіна для диференціального рівняння нейтрального типу

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau) + C\frac{dx(t-\tau)}{dt}, \tag{1}$$

де $A, B, C \in R,\ \tau > 0$.

Характеристичний квазіполіном для рівняння (1) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = A - \lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau}. \tag{2}$$

У працях [6, 9] досліджено наближення рівняння нейтрального типу(1) системою звичайних диференціальних рівнянь згідно схеми Красовського-Рєпіна вигляду

$$\begin{aligned}
&\frac{dz_0(t)}{dt} = Az_0(t) + \mu C z_{m-1}(t) + (B - \mu C)z_m(t),\\
&\frac{dz_i(t)}{dt} = \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)),\\
&i = \overline{1, m},\ \mu = \frac{m}{\tau},\ l_i = [\frac{m\tau_i}{\tau}],\ m \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Для характеристичного рівняння апроксимуючої системи (3) одержано зображення [9]

$$\Psi_m(\lambda) = (A - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m})^m + B + \lambda C = 0 \tag{4}$$

і показано, що послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu+\lambda)^{mn}},\ m \in N \tag{5}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (2). Цю властивість можна використати для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома (2). Оскільки нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно рівності (5), збігаються, то корені характеристичного многочлена (4) можна брати як наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома (2).

Здійснивши заміну $\lambda = (v-1)\frac{m}{\tau}$ в рівності (4), одержимо вигляд многочлена

$$v^{m+1} - (1 + \frac{A\tau}{m})v^m - Cv - (\frac{B\tau}{m} - C) = 0, \tag{6}$$

який зручний для чисельного знаходження коренів.

2 Схема апроксимації підвищеної точності

Схема апроксимації рівняння (1) системою звичайних диференціальних рівнянь (3) базується на використанні послідовності з'єднаних аперіодичних елементів, що здійснюють зсув на величину $\frac{\tau}{m}$ відповідно до розкладу функції у ряд Тейлора:

$$z_{i-1}(t) \approx z_i(t + \frac{\tau}{m}) = z_i(t) + \frac{\tau}{m}z_i'(t) + ...$$

У праці [10] І.М.Черевко використав три члени у розкладі за формулою Тейлора

$$z_{i-1}(t) = z_i(t + \frac{\tau}{m}) = z_i(t) + \frac{\tau}{m} z_i'(t) + \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_i''(t) + ...$$

і розглянув схему апроксимації ДРР підвищеної точності.

Застосуємо для рівняння (1) схему апроксимації диференціально-різницевих рівнянь підвищеної точності. Аналогічно, як в попередньому пункті, одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned}
&\frac{dz_0(t)}{dt} = Az_0(t) + Bz_m(t) + Cz_{2m}(t),\\
&\frac{dz_i(t)}{dt} = z_{m+j}(t),\\
&\frac{dz_{m+j}(t)}{dt} = 2\mu^2(z_{i-1}(t) - z_i(t)) - 2\mu z_{m+j}(t),\\
&j = \overline{1, m},\ m \in \mathbb{N},\ \mu = \frac{m}{\tau}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Лема 1. *Для характеристичного рівняння системи (7) справджується рівність*

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^m + B + C\lambda = 0. \tag{8}$$

Доведення. Для знаходження аналітичного вигляду характеристичного рівняння системи (7) використаємо метод математичної індукції. Перевіримо, що при $m = 2, 3$ рівність (8) справедлива.

Для $m = 2$ безпосередньо обчислюючи, дістаємо

$$D_5(\lambda) = (A - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{2}(1 + \frac{\lambda\tau}{4}))^2 + C\lambda + B = 0.$$

Для $m = 3$ маємо

$$D_7(\lambda) = \begin{vmatrix}
A-\lambda & 0 & 0 & B & 0 & 0 & C\\
0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1\\
2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 & 0\\
0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0\\
0 & 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda
\end{vmatrix}.$$

Розкриваючи виписаний визначник за першим рядком, одержимо

$$D_7(\lambda) = (A - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{3}(1 + \frac{\lambda\tau}{6}))^3 + B + C\lambda = 0.$$

Отже, для $m = 2, 3$ рівність (8) вірна. Припустимо, що для деякого $m - 1$ вона вірна і доведемо, що вона справджується для m.

Виписуючи характеристичне рівняння системи (7)

$$D_{2m+1}(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} A-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & B & 0 & \dots & C \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & \dots & -2\mu-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

і розкриваючи одержаний визначник за елементами першого рядка, маємо

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)I_1^m + (-1)^{m+2}BI_2^m + (-1)^{2m+2}CI_3^m = 0. \tag{9}$$

Для визначників I_1^m та I_3^m неважко одержати рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} I_1^m &= (\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)I_1^{m-1}, \\ I_3^m &= 2\mu^2 I_3^{m-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Із рекурентних співвідношень (10) одержуємо

$$\begin{aligned} I_1^m &= (\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)^m, \\ I_3^m &= \lambda(2\mu^2)^m. \end{aligned}$$

Обчислюючи визначник I_2^m, використавши його структуру, маємо

$$I_2^m = (-1)^{m(m+2)}(2\mu^2)^m.$$

Підставляючи значення I_1^m, I_2^m, I_3^m у рівність (9), одержуємо

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)(\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)^m + B(-1)^{(m+1)(m+2)}(2\mu^2)^m + C\lambda(2\mu^2)^m = 0.$$

Зважаючи на те, що $(m+1)(m+2)$ завжди парне, а $\mu = \frac{m}{\tau}$, тоді

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m + B + C\lambda = 0.$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Для фіксованих $\lambda \in \mathbb{Z}$ послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \frac{D_{2m+1}(\lambda)}{(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m}, m \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (2).

Доведення. Розгляне фіксоване $\lambda \in \mathbb{Z}$. Тоді $\lambda \neq -\frac{m}{\tau} \pm \frac{m}{\tau}i$ за можливим винятком одного значення m. Отже, функція $H_m(\lambda)$ визначена для всіх $m \in \mathbb{N}$ за можливим винятком одного $m \in \mathbb{N}$.

Враховуючи рівність (8), маємо

$$H_m(\lambda) = (A-\lambda) + B(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{-m} + C\lambda(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{-m} = 0. \tag{12}$$

На підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{\lambda\tau}{m}+\frac{\lambda^2\tau^2}{2m^2})^{-m}=e^{-\lambda\tau},$$

переходячи в рівності (12) до границі при $m\to\infty$, для фіксованого $\lambda\in\mathbb{Z}$, одержимо

$$\lim_{m\to\infty}H_m(\lambda)=A-\lambda+Be^{-\lambda\tau}+C\lambda e^{-\lambda\tau}.$$

Лема 2 доведена.

Зауваження. Оскільки нулі функцій $D_{2m+1}(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно з рівністю (11), збігаються, то корені характеристичного многочлена (8) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів квазіполінома (2).

3 Порівняння схем апроксимації

Згідно результатів попередніх пунктів неасимптотичні корені квазіполінома лінійного рівняння нейтрального типу можна наближати нулями характеристичного многочлена відповідної апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь. У випадку схеми Красовського-Рєпіна апроксимуючий многочлен має вигляд (6).

Приведемо характеристичне рівняння (8) із схеми апроксимації підвищеної точності до вигляду, зручного для реалізації на ЕОМ. Здійснимо в (8) заміну $\lambda=\frac{m}{\tau}(s-1)$, одержимо

$$(A+\frac{m}{\tau}-\frac{m}{\tau}s)(s^2+1)^m+2^mB+2^mC\lambda=0.$$

Розкладаючи $(s^2+1)^m$ за степенями s, дістанемо рівняння у стандартному вигляді

$$\alpha_0s^{2m+1}+\alpha_1s^{2m}+\alpha_2s^{2m-1}+\ldots+\alpha_{2m}s+\alpha_{2m+1}=0,$$

де коефіцієнти $\alpha_i, i=\overline{0,2m-1}$ обчислюються за формулами

$\alpha_0=-\frac{m}{\tau},\quad \alpha_1=A+\frac{m}{\tau},$

$\alpha_{2m}=-\frac{m}{\tau}+2^mC\frac{m}{\tau},$

$\alpha_{2m+1}=A+\frac{m}{\tau}+2^mB-2^mC\frac{m}{\tau},$

$\alpha_{2i}=-\frac{m}{\tau}C_m^i,\quad i=\overline{1,m-1},$

$\alpha_{2i+1}=(A+\frac{m}{\tau})C_m^i,\quad i=\overline{1,m-1}.$

Приклад.

Розглянемо рівняння нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt}=2x(t)+x(t-1)+\frac{dx(t-1)}{dt} \tag{13}$$

характеристичний квазіполіном якого має вигляд

$$\lambda=2+e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}. \tag{14}$$

Дійсний корінь квазіполінома (14) з найбільшою дійсною частиною, знайдений методом поділу відрізка навпіл, дорівнює $\lambda=2,32511$.

Здійснимо апроксимацію рівняння (13) системою звичайних диференціальних рівнянь за схемою Красовського–Рєпіна і за схемою підвищеної точності. Для наближення коренів квазіполінома (14) обчислюємо корені характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем за допомогою функції polyroots(v) із пакета Mathcad.

Результати обчислень для кореня із найбільшою дійсною частиною при різних m, наведені в Таблиці 1, де $\lambda_i^{\text{К.Р.}}$ – одержане наближення за схемою Красовського–Рєпіна, а $\lambda_i^{\text{П.Т.}}$ – наближення за схемою підвищеної точності.

Таблиця 1

m	λ_T	$\lambda_1^{\text{К.Р.}}$	$\triangle_{\text{К.Р.}}$	$\lambda_1^{\text{П.Т.}}$	$\triangle_{\text{П.Т.}}$
10	2,32511	2,39012	0,06501	2,33806	0,01295
20	2,32511	2,36001	0,03490	2,32804	0,00293
44	2,32511	2,33190	0,00679	2,32603	0,00092

Із Таблиці 1 видно, що наближення за схемою підвищеної точності є значно ефективнішими, ніж наближення за схемою Красовського–Рєпіна.

Список літератури

[1] Красовський Н. Н. *Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием* // ПММ. – 1964. — **28**, №4. – С. 716–725.

[2] Репин Ю. М. *О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями.* // ПММ. – 1965. – **29**, №2. – С. 226–245.

[3] L. A. Piddubna, I. M. Cherevko *Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials* // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999. – **28**, N1. – P. 15–21.

[4] Матвій О. В., Черевко І. М. *Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість.* // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, №2. — С. 208–216.

[5] Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко І.М. *Про стійкість лінійних систем із запізненням.* Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2008. – Вип. 421 : Математика. – С. 66–70.

[6] ІлікаС. А., Матвій О. В., Піддубна Л. А. *Апроксимація систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу* // Науковий вісник Чернівецького університету. Серія: Математика : зб. наук. праць. – Чернівці : ЧНУ, 2012. – Т. 2, № 1. – С. 35–39.

[7] Беллман Р. Е., Кук К. Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М. : Мир, 1967. – 548 с.

[8] Walther H. O. *On the eigenvalues of linear autonomous differential delay equations* // Ordinary and Partial Differential Equations : Proceedings of the Fourth Conference held at Dundee, Scotland, March 30 – April 2, 1976 : lecture Notes in Mathematics. – 1976. – Vol. 564. – P. 513–517.

[9] Матвій О. В., Черевко І. М. *Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь.* // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, №3. — С. 329–335.

[10] Черевко І.М. *Про наближену заміну різницевих і диференціально-різницевих рівнянь звичайними диференціальними рівняннями.* Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2002. – Вип. 134: Математика. – С. 107–111.

Список літератури

[1] Krasovskii N.N. *Approximation of a problem of analytic design of controllers in a system with Delay* // PMM. – 1964. – 28, N 4. – P. 716–725. (In Russian)

[2] Repin Y. M. *On the approximate replacement of systems with delay by ordinary differential equations.* // PMM. – 1965. – 29, N 2. – P. 226-245.9 (In Russian)

[3] L. A. Piddubna, I. M. Cherevko *Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials* // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999. – 28, N1. – P. 15–21.

[4] Matviy O.V, Cherevko I. M. *About the approximation of systems with delay and their stability.* // Nonlinear Oscillations. – 2004. – **7**, N2. – P. 208–216.(In Ukrainian)

[5] Matviy O.V., Pernay S.A., Cherevko I.M. *About the stability of linear systems with delay.* // Scientific herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi national university. Series of math. 2008. – V.421. – P. 60–66.(In Ukrainian)

[6] Ilika S. A., Matviy O.V, Piddubna L.A *Approximation of systems of linear differential-functional equations of neutral type* // Scientific herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi national university. Series of math. 2012. – 2, N1. – P. 15–21.(In Ukrainian)

[7] Bellman R.E., Cook K.L. *Differential-difference equations.* – M ., 1967. – 548 p.(In Russian)

[8] Walther H. O. *On the eigenvalues of linear autonomous differential delay equations* // Ordinary and Partial Differential Equations : Proceedings of the Fourth Conference held at Dundee, Scotland, March 30 – April 2, 1976 : lecture Notes in Mathematics. – 1976. – Vol. 564. – P. 513–517.

[9] Matviy O.V., Cherevko I.M. *On the approximation of systems of differential-difference equations of neutral type by systems of ordinary differential equations* // Nonlinear Oscillations. – 2007. – **10**, N3. – P. 208–216.(In Ukrainian)

[10] . Cherevko IM *On the approximate replacement of difference and differential-difference equations by ordinary differential equations* // Scientific herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi national university. Series of math. 2002. – V.134. – P. 107–111. (In Ukrainian)

Надійшло 09.11.2020

Ilika S.A, Tuzyk I.I., Cherevko I. M. *Approximation of non-asymptotic quasi-polynomial roots of neutral type differential-difference equations*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 1 (2020), 110–117.

The theory of differential-difference equations stability solutions is currently one of the most important and actively studied sections of their general theory. The problem of studying the stability of linear stationary differential-difference equations is to find the conditions of negativeness of the real parts of asymptotic roots of quasi-polynomials, which can be found, in general, only by approximate methods. For differential-difference equations, the schemes of their approximation are constructed and substantiated by means of special systems of ordinary differential equations. In case of linear differential-difference equations, roots of the approximating system characteristic equation of ordinary differential equations can be taken as approximate values of the non-asymptotic roots of the corresponding quasi-polynomials. In this paper, we consider two algorithms for the approximate finding of non-asymptotic roots of quasi-polynomials of neutral type differential-difference equations, based on the Krasovsky-Repin approximation scheme and the higher accuracy approximation scheme. The form of characteristic equations for ordinary differential equations approximating systems is obtained, which are convenient to use for calculation of their roots. Numerical experiments for a model test example were performed and their results were analyzed.