В.В. Городецький, Р.С. Колісник, Н.М. Шевчук

НЕЛОКАЛЬНА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ В ПРОСТОРАХ ТИПУ S

Встановлена розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором $\sqrt{I-\Delta}$ у випадку, коли багатоточкова умова містить псевдодиференціальні оператори, а початкова функція є елементом простору узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

Ключові слова і фрази: нелокальна задача, перетворення Фур'є, перетворення Бесселя, згортка, простори типу S, мультиплікатор, узагальнені функції.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *r.kolisnyk@chnu.edu.ua*

Вступ

Досить широкий клас диференціальних рівнянь з частинними похідними утворюють лінійні параболічні та B-параболічні рівняння, теорія яких бере свій початок із дослідження рівняння теплопровідності. Класична теорія задачі Коші та крайових задач для таких рівнянь і систем рівнянь побудована в працях І.Г. Петровського, С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, М.І. Матійчука, М.В. Житарашу, А. Фрідмана, С. Теклінда, В.О. Солонникова, В.В. Крехівського та ін. Задача Коші з початковими даними з просторів узагальнених функцій типу розподілів та ультрарозподілів вивчалася Г.Є. Шиловим, Б.Л. Гуревичем, М.Л. Горбачуком, В.І. Горбачук, О.І. Кашпіровським, Я.І. Житомирським, С.Д. Івасишеним, В.В. Городецьким, В.А. Літовченком та ін.

Формальним розширенням класу рівнянь параболічного типу є еволюційні рівняння з псевдодиференціальними операторами (ПДО), які можна подати у вигляді $A = J^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)J_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a – функція (символ), що задовольняє певні умови, J, J^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є або Бесселя. До ПДО належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, оператори згортки, оператор Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$, який у своїй структурі містить вираз $1/x$ і формально зображається у вигляді $B_\nu = F^{-1}_{B_\nu}[-\sigma^2 F_{B_\nu}]$, де F_{B_ν} – інтегральне перетворення Бесселя.

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55, 46T30.

Якщо A – невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H, то, як відомо [1], неперервна на $[0,T)$ функція $u(t)$ є неперервно диференційовним на $(0,T)$ розв'язком диференціально-операторного рівняння $u'(t)+Au(t)=0$, $t\in(0,T)$, яке відноситься до абстрактних рівнянь параболічного типу, тоді й лише тоді, коли вона подається у вигляді $u(t)=e^{-tA}f$, $f=u(0)\in H$. Виявляється [1], що всі неперервно диференційовні всередині інтервала $(0,T)$ розв'язки цього рівняння описуються такою ж формулою, де f є елементом вже більш широкого, порівняно з H простором H'_a, спряженого з простором H_a аналітинчих векторів оператора A, а роль A відіграє розширення $\hat{A}$ оператора A в просторі H'_a, при цьому граничне значення $u(t)$ при $t\to+0$ існує в просторі H'_a.

Якщо $A=(I-\Delta)^{1/2}$, $\Delta=d^2/dx^2$, то A – невід'ємний самоспряжений оператор в $H=L_2(\mathbb{R})$, оскільки $i\,d/dx$ – самоспряжений в $L_2(\mathbb{R})$ оператор з областю визначення $\mathcal{D}(id/dx)=\{\varphi\in L_2(\mathbb{R}):\exists\varphi'\in L_2(\mathbb{R})\}$. Якщо E_λ, $\lambda\in\mathbb{R}$, – спектральна функція оператора id/dx, то, внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів,

$$A\varphi=(I+(id/dx)^2)^{1/2}\varphi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\lambda^2)^{1/2}dE_\lambda\varphi.$$

Відомо (див., наприклад, [2]), що

$$E_\lambda\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\Big\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)e^{i\sigma\tau}d\tau\Big\}e^{-it\sigma}d\sigma.$$

Звідси випливає, що $dE_\lambda\varphi(t)=\dfrac{1}{2\pi}F[\varphi](\lambda)e^{-it_\lambda}d\lambda$. Отже,

$$A\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\lambda^2)^{1/2}F[\varphi](\lambda)e^{-it\lambda}d\lambda=F^{-1}[(1+\lambda^2)^{1/2}F[\varphi]].$$

Слідуючи [3], оператор A називатимемо оператором Бесселя дробового диференціювання. Отже, A можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за функцією-символом $(1+\lambda^2)^{1/2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Це дозволяє трактувати функцію $e^{-tA}f$ – розв'язок відповідної задачі Коші, як згортку вигляду $G(t,\cdot)*f$ [4, 5], де $G(t,\cdot)=$ $=F^{-1}[e^{-(1+\lambda^2)^{1/2}}]$.

У цій роботі дається аналогічне зображення розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння $\partial u(t,x)/\partial t+Au(t,x)=0$, $(t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}$, коли початкова умова $u|_{t=0}=f$ замінюється умовою $\sum\limits_{k=0}^{m}\alpha_kB_ku(t,\cdot)|_{t=t_k}$, де $t_0=0$, $\{t_1,...,t_m\}\subset(0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_m\}\subset\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$, – фіксовані числа, $B_1,\dots,B_m$ – псевдодиференціальні оператори, побудовані за гладкими символами (якщо $\alpha_0=1$, $\alpha_1=...=\alpha_m=0$, $B_0=I$, то маємо, очевидно, задачу Коші). При цьому вказана умова трактується в класичному або слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція (узагальнений елемент оператора A)

типу ультрарозподілів. Досліджені властивості фундаментального розв'язку зазначеної багатоточкової задачі.

Зауважимо, що нелокальна багатоточкова за часом задача відноситься до нелокальних задач для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними, при описі всіх коректних задач для конкретного оператора, побудові загальної теорії крайових задач (див., наприклад, [6, 7, 8, 9, 10, 11]).

1 Простори основних та узагальнених функцій

І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов ввели в [12] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k\varphi^{(m)}(x)| \leq c_{km}$, $x \in \mathbb{R}$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{km}\}$ – деяка подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{km}\}$ не накладаються жодні обмеження, то маємо, очевидно, простір $S \equiv S(\mathbb{R})$ Л. Шварца швидко спадних на нескінченності функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні простори містяться в S і називаються просторами типу S. Означимо деякі з них.

Для будь-яких α, $\beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta = \Big\{\varphi \in S \,\Big|\, \exists c > 0\, \exists A > 0 \exists B > 0\, \forall \{m, n\} \subset \mathbb{Z}_+\, \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^m \varphi^{(n)}(x)| \leq cA^m B^n m^{m\alpha} n^{n\beta}\Big\}.$$

Введені простори типу S можна охарактеризувати ще й так [12].

S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c, B і a, залежними лише від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1-\beta$, то S_α^β складається з тих й тільки тих функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в комплексну площину $\mathbb{C}$ і для яких

$$|\varphi(x + iy)| \leq c\exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, c > 0, a > 0, b > 0.$$

Простір S_α^1 складається з функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в деяку смугу $|\mathrm{Im} z| < \delta$ (залежну від φ) комплексної площини, при цьому справджується оцінка

$$|\varphi(x + iy)| \leq c\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, c, a > 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β, $\alpha, \beta > 0$ нетривіальні, якщо $\alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини.

Топологічна структура в S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, $A, B > 0$, позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову

$$\forall \overline{A} > A\ \forall \overline{B} > B : |x^k \varphi^{(m)}(x)| \le c\overline{A}^k \overline{B}^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k \varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}}, \{\delta, \rho\} \subset \Big\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\Big\}.$$

Вказану систему норм іноді замінюють еквівалентною їй системою норм

$$\|\varphi\|'_{\delta\rho} = \sup_{x,m} \frac{\exp\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha}\} \cdot |\varphi^{(m)}(x)|}{(B+\rho)^m m^{m\beta}},\ \{\delta, \rho\} \subset \Big\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\Big\}, a = \frac{\alpha}{eA^{1/\alpha}}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, тобто в S_α^β вводиться топологія індуктивної границі просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ [12]. Отже, збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset S_\alpha^\beta$ до нуля в просторі S_α^β – це збіжність за топологією одного з просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, до якого належать всі функції φ_ν. Іншими словами (див. [12]) $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі S_α^β тоді й лише тоді, коли послідовність $\{\varphi_\nu^{(n)}, \nu \ge 1\}$ при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$ рівномірно збігається до нуля на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і для деяких c, $a, B > 0$, не залежних від ν, справджується нерівність

$$|\varphi_\nu^{(n)}(x)| \le cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

У просторах S_α^β визначена і неперервна операція зсуву аргумента T_x: $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi+x)$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [12]) у тому розумінні, що граничне співвідношення $(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x)$, $h \to 0$, справджується для кожної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ в сенсі збіжності за топологією простору S_α^β. У S_α^β визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими [12] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні), вони тісно пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$, $\alpha, \beta > 0$, де

$$F[S_\alpha^\beta] := \Big\{\psi :\ \psi(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx,\ \varphi \in S_\alpha^\beta\Big\},$$

при цьому оператор F: $S_\alpha^\beta \to S_\beta^\alpha$ є неперервним.

Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю. Оскільки в основному просторі S_α^β визначена операція зсуву T_x, то згортку узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ з основною функцією $\varphi \in S_\alpha^\beta$ задамо формулою

$$(f * \varphi) = \langle f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot)\rangle \equiv \langle f, \varphi(x - \cdot)\rangle, \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi).$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргумента в просторі S_α^β випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ означимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle, \ \ \forall \varphi \in S_\beta^\alpha,$$

при цьому оператор F: $(S_\alpha^\beta)' \to (S_\beta^\alpha)'$ є неперервним.

Нехай $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f * \varphi \in S_\alpha^\beta$, $\forall \varphi \in S_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається згортувачем у просторі S_α^β. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$ – згортувач у просторі S_α^β, то для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f*\varphi] = F[f]F[\varphi]$, при цьому $F[f]$ – мультиплікатор у просторі S_β^α [12].

Нагадаємо, що функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ називається мультиплікатором у просторі S_α^β, якщо $g\varphi \in S_\alpha^\beta$ для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$, при цьому відображення $\varphi \to g\varphi$ є неперервним у просторі S_α^β.

2 Нелокальна за часом задача

Розглянемо функцію $a(\sigma) = (1+\sigma^2)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Очевидно, що функція $a(\sigma)$ задовольняє нерівність

$$a(\sigma) \le \sqrt{2}|\sigma| < \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\exp\{\varepsilon|\sigma|\}, \ \ |\sigma| \ge 1, \tag{1}$$

для довільного $\varepsilon > 0$. За допомогою безпосередніх обчислень та з урахуванням формули Стірлінга знаходимо, що

$$|D_\sigma^m a(\sigma)| \le c_0 B_0^m m! \le c_1 B_1^m m^m, m \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

З (1) та (2) випливає, що $a(\sigma)$ – мультиплікатор у просторі S_1^1. Справді, нехай $\varphi \in S_1^1$, тобто функція φ та її похідні задовольняють нерівність

$$|D_\sigma^k \varphi(\sigma)| \le cA^k k^k \exp\{-a|\sigma|\}, k \in \mathbb{Z}_+, \sigma \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

з деякими додатними сталими c, A, a. Тоді, скориставшись формулою Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, а також нерівностями (1), (2), (3), знайдемо, що

$$|(a(\sigma)\varphi(\sigma))^{(k)}| \le \sum_{l=0}^{k} C_k^l |a^{(l)}(\sigma)|\,|\varphi^{(k-l)}(\sigma)| = |a(\sigma)|\varphi^{(k)}(\sigma) + \sum_{l=1}^{k} C_k^l |a^{(l)}(\sigma)| \cdot |\varphi^{(k-l)}(\sigma)| \le$$

$$\le \frac{c\sqrt{2}}{\varepsilon} A^k k^k \exp\{-a|\sigma| + \varepsilon|\sigma|\} + c_1 c \sum_{l=1}^{k} C_k^l B_1^l l^l A^{k-l}(k-l)^{(k-l)} \exp\{-a|\sigma|\}.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то покладемо $\varepsilon = a/2$. Тоді

$$|(a(\sigma)\varphi(\sigma))^{(k)}| \le \frac{2c\sqrt{2}}{a} A^k k^k \exp\Big\{-\frac{a}{2}|\sigma|\Big\} + c_1 c B_2^k k^k \exp\Big\{-\frac{a}{2}|\sigma|\Big\} \le$$

$$\le c_2 B_2^k k^k \exp\Big\{-\frac{a}{2}|\sigma|\Big\}, \sigma \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

де $c_2 = \dfrac{2c\sqrt{2}}{a} + c_1 c$, $B_2 = 2\max\{A, B_1\}$. З останньої нерівності випливає, що $a\varphi$ є елементом простору S_1^1.

Операція множення на функцію a неперервна в просторі S_1^1. Справді, нехай $\{\varphi_n, n \geq 1\}$ – послідовність функцій з простору S_1^1, яка збігається до нуля в цьому просторі. Це означає, що $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset S_{1,A_0}^{1,B_0}$ з деякими сталими A_0, $B_0 > 0$ і

$$\|\varphi_n\|_{\delta\rho} = \sup_{k,\sigma} \frac{\exp\{a(1-\delta)|\sigma|\} \cdot |\varphi_n^{(k)}(\sigma)|}{(B_0+\rho)^k k^k} \to 0, n \to \infty,$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}, a = \frac{1}{eA_0}.$$

Іншими словами, для довільного $\tilde{\varepsilon} > 0$ існує номер $n_0 = n_0(\varepsilon)^m$ такий, що для $n \geq n_0$

$$|\varphi_n^{(k)}(\sigma)| \leq \tilde{\varepsilon}(B_0+\rho)^k k^k \exp\{-a(1-\delta)|\sigma|\}, \sigma \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Скориставшись нерівностями (1), (2), (3) (поклавши при цьому в (1) $\varepsilon = \dfrac{a}{2}(1-\delta)$) дістанемо, що

$$|(a(\sigma)\varphi_n(\sigma))^{(k)}| \leq c_3\tilde{\varepsilon}(\tilde{B}+\rho)^k \exp\left\{-\frac{a}{2}(1-\delta)|\sigma|\right\}, k \in \mathbb{Z}_+, n \geq n_0,$$

де $c_3 = 2\sqrt{2}(a(1-\varepsilon))^{-1} + c_1$, $\tilde{B} = 2\max\{B_0, B_1\}$. З останньої нерівності випливає, що $\|\tilde{a}\varphi_n\|_{\delta\rho} < c_3\tilde{\varepsilon}$, $\forall n \geq n_0$, тобто послідовність $\{a\varphi_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля в просторі $S_{1,\tilde{A}}^{1,\tilde{B}}$, де $\tilde{A} = 2A_0$, $\tilde{B} = 2\max\{B_0, B_1\}$. Це і означає, що послідовність $\{a\varphi_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля в просторі S_1^1, що й потрібно було довести.

Зауваження 1. *Із доведеної властивості випливає, що функція $a(\sigma) = (1+\sigma^2)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, є мультиплікатором і у кожному просторі S_1^β, де $\beta > 1$. Отже, у просторі S_β^1, $\beta \geq 1$, визначений, є лінійним і неперервним псевдодиференціальний оператор A, побудований за символом $a(\sigma)$:*

$$A\varphi = F^{-1}[a(\sigma)F[\varphi]], \forall \varphi \in S_\beta^1,$$

при цьому $A\varphi = \sqrt{1-\Delta}\varphi$, $\Delta = d^2/dx^2$, $\forall \varphi \in S_\beta^1$.

Розглянемо еволюційне рівняння з оператором A (оператором Бесселя дробового диференціювання)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Au(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega. \tag{4}$$

Під розв'язком рівняння (4) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, таку, що: 1) $u(t,\cdot) \in C^1(0,T]$ при кожному $x \in \mathbb{R}$; 2) $u(\cdot,x) \in S_\beta^1$ при кожному $t \in (0,T]$; 3) $u(t,x)$ неперервна в кожній точці $(0,x)$ межі $\Gamma_\Omega := \{0\} \times \mathbb{R}$ області Ω; 4) $\exists M$: $\mathbb{R} \to [0,\infty)$ $\forall t \in (0,T)$: $|u_t'(t,x)| \leq M(x)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} M(x)dx < +\infty$; 5) $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$ задовольняє рівняння (4).

Для рівняння (4) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (4), який задовольняє умову

$$\mu u(0,x) - \mu_1 B_1 u(t_1,x) - \cdots - \mu_m B_m u(t_m,x) = f(x), x \in \mathbb{R}, f \in S^1_\beta, \tag{5}$$

де $u(0,x) := \lim\limits_{t\to+0} u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,T]$ – фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \le T$, $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $B_1, \ldots, B_m$ – псевдодиференціальні оператори в просторі S^1_β, побудовані за функціями (символами) g_k: $\mathbb{R} \to (0,+\infty)$ відповідно: $B_k = F^{-1}[g_k(\sigma)F]$, $k \in \{1,\ldots,m\}$. Функції g_k, $k \in \{1,\ldots,m\}$, задовольняють умови: $g_k \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \sigma \in \mathbb{R} : g_k(\sigma) \le \exp\{\varepsilon|\sigma|\},$$

$$\exists L_k > 0 \, \forall s \in \mathbb{N} \, \forall \sigma \in \mathbb{R} : |D^s_\sigma g_k(\sigma)| \le L^s_k s^s.$$

Зауважимо, що з наведених властивостей функції g_k випливає, що g_k, $k \in \{1,\ldots,m\}$, – мультиплікатор у просторі S^1_β.

Розв'язок задачі (4), (5) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є. Внаслідок умови 4)

$$F[u_t] = \int\limits_{\mathbb{R}} u_t(t,x) e^{-i\sigma x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\mathbb{R}} u(t,x) e^{-i\sigma x} dx = \frac{\partial}{\partial t} F[u].$$

Введемо позначення: $F[u(t,x)] = v(t,\sigma)$. Врахувавши вигляд операторів A, B_1, …, B_m дістанемо, що

$$F[Au(t,x)] = F[F^{-1}[a(\sigma)F[u]]] = a(\sigma)F[u(t,x)] = a(\sigma)v(t,\sigma),$$

$$F[B_k u(t,x)] = g_k(\sigma)F[u(t,x)] = g_k(\sigma)v(t,\sigma), k \in \{1,\ldots,m\}.$$

Отже, для функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ маємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + a(\sigma)v(t,\sigma) = 0, \;\; (t,\sigma) \in \Omega, \tag{6}$$

$$\mu v(0,\sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) v(t_k,\sigma) = \widetilde{f}(\sigma), \;\; \sigma \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $\widetilde{f}(\sigma) = F[f]$. Загальний розв'язок рівняння (6) має вигляд:

$$v(t,\sigma) = c\exp\{-ta(\sigma)\}, \;\; (t,\sigma) \in \Omega, \tag{8}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (7). Підставивши (8) у (7) знайдемо, що

$$c = \widetilde{f}(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma)\exp\{-t_k a(\sigma)\}\right)^{-1}, \;\; \sigma \in \mathbb{R}.$$

Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\}, Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}.$$

Далі, міркуючи формально, прийдемо до співвідношення:

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x)*f(x), \quad (t,x)\in\Omega.$$

Справді,

$$u(t,x)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{i\sigma\xi}d\xi\right)e^{-i\sigma x}d\sigma=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}}(2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{-i\sigma(x-\xi)}d\sigma\right)f(\xi)d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi=$$

$$=G(t,x)*f(x),\ \ (t,x)\in\Omega. \tag{9}$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів, а, отже, правильність формули (9) випливає з властивостей функції G, які наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G=F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції змінної σ.

Лема 1. *Для похідних функції $Q_1(t,\sigma)$, $(t,\sigma)\in\Omega$, правильними є оцінки:*

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)|\le cA^s t^{\gamma s}s^s\exp\{-t|\sigma|\}, s\in\mathbb{N}, \tag{10}$$

де $\gamma=0$, якщо $0<t\le 1$ і $\gamma=1$, якщо $t>1$, сталі $c>1$, $A>0$ не залежать від t.

Доведення. Для доведення твердження скористаємось формулою Фаа де Бруно диференціювання складної функції

$$D_\sigma^s F(g(\sigma))=\sum_{p=1}^{s}\frac{d^p}{dg^p}F(g)\sum\frac{s!}{p_1!\dots p_l!}\Big(\frac{d}{d\sigma}g(\sigma)\Big)^{p_1}\dots\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}g(\sigma)\Big)^{p_l}, s\in\mathbb{N} \tag{11}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $p_1+2p_2+\dots+lp_l=s$, $p_1+\dots+p_l=p$), де покладемо $F=e^g$, $g=-ta(\sigma)$. Тоді

$$D_\sigma^s e^{-ta(\sigma)}=e^{-ta(\sigma)}\sum_{p=1}^{s}\sum\frac{s!}{p_1!\dots p_l!}\Lambda,$$

де символом Λ позначено вираз

$$\Lambda:=\Big(\frac{d}{d\sigma}(-ta(\sigma))\Big)^{p_1}\cdot\Big(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\sigma^2}(-ta(\sigma))\Big)^{p_2}\dots\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}(-ta(\sigma))\Big)^{p_l}.$$

Урахувавши оцінки (2), знайдемо, що

$$|\Lambda|\le c_0^{p_1+\dots+p_l}t^{p_1+\dots+p_l}B_0^{p_1+2p_2+\dots+lp_l}\le \tilde c_0^s t^p B_0^s, \tilde c_0=\max\{c_0,1\}. \tag{12}$$

Скориставшись (12) та формулою Стірлінга, прийдемо до нерівностей

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)|\le \tilde c_0^s t^{\gamma s}s!\exp\{-ta(\sigma)\}\le cA^s t^{\gamma s}s^s\exp\{-t|\sigma|\}, \sigma\in\mathbb{R}, \tag{13}$$

де $\gamma=0$, якщо $0<t\le 1$ і $\gamma=1$, якщо $t>1$, сталі $c>1$, $A>0$ не залежать від t.

Лема доведена. □

Зауваження 2. *Із оцінок* (10) *випливає, що* $Q_1(t,\cdot) \in S_1^1$ *при кожному* $t \in (0;T]$.

Лема 2. *Функція* Q_2 – *мультиплікатор у просторі* S_1^2.

Доведення. Для доведення твердження здійснимо оцінку похідних функції Q_2. З цією метою скористаємося формулою (11), у якій покладемо $F = \varphi^{-1}$, $\varphi = R$, де

$$R(\sigma) = \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) \exp\{-t_k a(\sigma)\}.$$

Тоді $Q_2(\sigma) = F(\varphi) = R^{-1}$ і

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| = \Big| \sum_{p=1}^{s} \frac{d^p}{dR^p} R^{-1} \sum \frac{s!}{p_1! \dots p_l!} \Big(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma)\Big)^{p_1} \dots \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma)\Big)^{p_l} \Big|, s \in \mathbb{N}.$$

Врахувавши властивості функцій $g_1, \dots, g_m$ та нерівності (13), знайдемо, що

$$\Big|\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\sigma^j} R(\sigma)\Big| \le \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \sum_{i=0}^{j} C_j^i |D_\sigma^i g_k(\sigma)| \cdot |D_\sigma^{j-i} e^{-t_k a(\sigma)}| \le$$

$$\le \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \sum_{i=0}^{j} C_j^i L_k^i i! \tilde{c}_0^{j-i} t_k^{\gamma(j-i)} (j-i)! e^{-t_k a(\sigma)} \le \sum_{k=1}^{m} \mu_k \sum_{i=0}^{j} C_j^i L_k^i \tilde{c}_0^{j-i} t_k^{\gamma(j-i)}$$

(тут враховано, що $i!(j-i)! \le j!$). Нехай $\tilde{L} := \max\{L_1, \dots, L_m\}$, $L_0 := 2\max\{\tilde{L}, \tilde{c}_0 T\}$. Тоді

$$\Big|\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\sigma^j} R(\sigma)\Big| \le \alpha_0 L_0^j, \alpha_0 = \sum_{k=1}^{m} \mu_k, j \in \{1, \dots, l\}.$$

$$\Big|\Big(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma)\Big)^{p_1}\Big| \dots \Big|\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma)\Big)^{p_l}\Big| \le (\alpha_0 L_0)^{p_1} (\alpha_0 L_0^2)^{p_2} \dots (\alpha_0 L_0^l)^{p_l} =$$
$$= \alpha_0^{p_1+\dots+p_l} L_0^{p_1+2p_2+\dots+lp_l} = \alpha_0^p L_0^s.$$

Крім того, $\dfrac{d^p}{dR^p} R^{-1} = (-1)^p p! R^{-(p+1)}$,

$$R^{-1}(\sigma) = Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) \exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1} \le$$

$$\le \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_1|\sigma| + \varepsilon|\sigma|\}\Big)^{-1} \le \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1} \equiv \beta_0 > 0, \varepsilon = t_1,$$

оскільки, за умовою $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$ (тут враховані властивості функцій $g_1, \dots, g_m$, а також те, що $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$). Отже, $\Big|\dfrac{d^p}{dR^p} R^{-1}\Big| \le \beta_0^{p+1} p!$,

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le s! \sum_{p=1}^{s} \beta_0^{p+1} p! \alpha_0^p L_0^s \le \beta_0 L_0^s (s!)^2 \sum_{p=1}^{s} \beta_0^p \le \beta_0 L_0^s s \cdot (s!)^2 \beta_1^s \le$$

$$\leq \beta_2 \beta_2^s s^{2s}, s \in \mathbb{N}.$$

З останньої нерівності та обмеженості функції $Q_2(\sigma)$ на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі S_1^2. □

Наслідок 1. *При фіксованому $t \in (0, T]$ функція $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, є елементом простору S_1^2, при цьому справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t, \sigma)| \leq \tilde{c} \tilde{A}^s t^{\gamma s} s^{2s} \exp\{-t|\sigma|\}, \ s \in \mathbb{N}, (t, \sigma) \in \Omega, \tag{14}$$

де сталі $\tilde{c}$, $\tilde{A} > 0$ не залежать від t.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та формулу $F^{-1}[S_1^2] = S_2^1$ дістаємо, що $G(t, \cdot) \in S_2^1$ при кожному $t \in (0, T]$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t. Для цього скористаємося співвідношенням

$$x^k D_x^s F[\varphi](x) = i^{k+s} F[(\sigma^s \varphi(\sigma))^{(k)}] = i^{k+s} \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s \varphi(\sigma))^{(k)} e^{i\sigma x} d\sigma, \ \{k, s\} \subset \mathbb{Z}_+, \ \varphi \in S_1^2.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t, x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s} (-1)^s \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t, -\sigma))^{(k)} e^{i\sigma x} d\sigma.$$

В [12] доведено твердження: якщо функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ задоволняє нерівність

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n a_k b_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

де числа a_k та b_n такі, що

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} \geq c_a k^{1-\chi}, \frac{b_n}{b_{n-1}} \geq c_b n^{1-\lambda}, \chi + \lambda = \theta \leq 1, \lambda, \chi \geq 0,$$

то подвійна послідовність $m_{kn} = a_k b_n$ задовольняє нерівність

$$k_n \frac{m_{k-1,n-1}}{m_{kn}} \leq \tilde{\gamma}(k+n)^\theta, \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{c_a c_b}.$$

Для послідовностей $a_k = k^k b_n = n^{2n}$ маємо $\chi = \lambda = 0$ (див. [12, с. 243]). Отже, $\theta = 0$ і подвійна послідовність $m_{kn} = k^k n^{2n}$ задовольняє нерівність

$$k_n \frac{m_{k-1,n-1}}{m_{kn}} \leq \tilde{\gamma}.$$

Можна безпосередньо перевірити, що для послідовності $a_k = k^k$ стала $c_a = 1/2$, для послідовності $b_n = n^{2n}$ стала $c_b = 1/4$, тобто $\tilde{\gamma} = 8$.

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (14) похідних функції $Q(t, \sigma)$ та останню нерівність, знайдемо, що

$$|(\sigma^s Q(t, -\sigma))^{(k)}| = \Big| \sum_{p=0}^{k} C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t, -\sigma) \Big| \leq$$

$$\leq |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1}Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| + \frac{k(k-1)}{2!}s(s-1)\times$$

$$\times|\sigma^{s-2}Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \dots \leq \tilde{c}[\tilde{A}^k t^{\gamma k} B^s t^{-s} m_{ks} + ks\tilde{A}^{k-1}t^{\gamma(k-1)}B^{s-1}t^{-(s-1)}m_{k-1,s-1} +$$

$$+\frac{1}{2!}k(k-1)s(s-1)\tilde{A}^{k-2}t^{\gamma(k-2)}B^{s-2}t^{-(s-2)}m_{k-2,s-2} + \dots]e^{-\frac{t}{2}|\sigma|},$$

де $B = 2/e$, $m_{ks} = k^{2k}s^s$. Тоді

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| \leq \tilde{c}\tilde{A}^k t^{\gamma k} B^s t^{-s} m_{ks}\Big(1 + \frac{t}{(\tilde{A}/t^\gamma)B}ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} +$$

$$+\frac{1}{2!}k(k-1)s(s-1)\frac{t^2}{(\tilde{A}/t^\gamma)^2B^2}\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{ks}} + \dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|} \leq \tilde{c}\tilde{A}^k t^{\gamma k}B^s t^{-s}m_{ks}\times$$

$$\times\Big(1 + \frac{kst}{(\tilde{A}/t^\gamma)B}\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} + \frac{1}{2!}\frac{t^2}{(\tilde{A}/t^\gamma)^2B^2}ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}(k-1)(s-1)\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{k-1,s-1}} + \dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|} \leq$$

$$\leq \tilde{c}\tilde{A}^k t^{\gamma k}B^s t^{-s}m_{ks}\Big(1 + \frac{T^{1+\gamma}}{\tilde{A}B}\tilde{\gamma} + \frac{1}{2!}\frac{T^{2+2\gamma}}{(\tilde{A}B)^2}\tilde{\gamma}^2 + \dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|} =$$

$$= c_1\tilde{A}^k t^{\gamma k}B^s t^{-s}m_{ks}e^{-\frac{t}{2}|\sigma|}, c_1 = \tilde{c}\exp\left(\frac{T^{1+\gamma}}{\tilde{A}B}\tilde{\gamma}\right) = \tilde{c}\exp\left(\frac{8T^{1+\gamma}}{\tilde{A}B}\right), \tilde{\gamma} = 8.$$

Отже,

$$|x^k D_x^s G(t,x)| \leq (2\pi)^{-1}c_1\tilde{A}^k t^{\gamma k}B^s t^{-s}m_{ks}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{2}|\sigma|}d\sigma =$$

$$= c_2\tilde{A}^k t^{\gamma k}B^s t^{-(s+1)}k^{2k}s^s, c_2 = 4(2\pi)^{-1}c_1, t \in (0,T], \sigma \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$|D_x^s G(t,x)| \leq c_1 B^s s^s t^{-(s+1)}\inf_k \frac{\tilde{A}^k k^{2k}}{(t^{-\gamma}|x|)^k} \leq c_2 B^s s^s t^{-(s+1)}\exp\{-a_0 t^{-\gamma/2}|x|^{1/2}\}, s \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_2 = c_1 e^e$, $a_0 = 2/(e\tilde{A})^{1/2}$, $\gamma = 0$, якщо $0 < t \leq 1$, $\gamma = 1$, якщо $t > 1$; тут ми скористались відомою нерівністю з [12, с. 204]:

$$e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}} \leq \inf_k \frac{A^k k^{k\alpha}}{|x|^k} \leq ce^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}}, c = e^{\frac{\alpha e}{2}},$$

в якій $\alpha = 2$, $A = \tilde{A}$. Таким чином, правильним є твердження.

Лема 3. *Функція $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, та її похідні (за змінною x) задовольняють нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \leq c_2 B^s s^s t^{-(s+1)}\exp\{-a_0 t^{-\gamma/2}|x|^{1/2}\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{15}$$

де $\gamma = 0$, якщо $0 < t \leq 1$ і $\gamma = 1$, якщо $t > 1$, сталі c_2, B, $a_0 > 0$ не залежать від t.

Зауваження 3. *Оскільки $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \le T$, то з властивостей функцій $g_k(\sigma)$, $k \in \{1, \dots, m\}$, випливають нерівності*

$$g_k(\sigma) e^{-t_k a(\sigma)} \le e^{\varepsilon|\sigma| - t_k|\sigma|} \le e^{\varepsilon|\sigma| - t_1|\sigma|}, k \in \{1, \dots, m\}, \sigma \in \mathbb{R},$$

де $\varepsilon > 0$ – довільно фіксований параметр. Якщо покласти $\varepsilon = t_1$, то

$$g_k(\sigma) e^{-t_k a(\sigma)} \le 1, \sigma \in \mathbb{R}, k \in \{1, \dots, m\},$$

і

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{-t_k a(\sigma)} = \mu\Big(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{-t_k a(\sigma)}\Big).$$

Тоді

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{-t_k a(\sigma)} \le \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k < 1, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Оскільки, за умовою, $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$. Скориставшись цією нерівністю та поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{-t_k a(\sigma)}\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r}\Big(\sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{-t_k a(\sigma)}\Big)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \dots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} (\mu_1 g_1(\sigma) e^{-t_1 a(\sigma)})^{r_1} \dots (\mu_m g_m(\sigma) e^{-t_m a(\sigma)})^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \dots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m} g_1^{r_1}(\sigma) \dots g_m^{r_m}(\sigma) Q_1(\lambda, \sigma),$$

де $\lambda = t_1 r_1 + \dots + t_m r_m$, $Q_1(\lambda, \sigma) = e^{-\lambda a(\sigma)}$. Отже, для функції $G(t, x)$ маємо таке зображення:

$$G(t, x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-t a(\sigma)} Q_2(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1 + \dots + r_m = r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} \tilde{G}(\lambda + t, x), (t, x) \in \Omega,$$

де

$$\tilde{G}(\lambda + t, x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} g_1^{r_1}(\sigma) \dots g_m^{r_m}(\sigma) e^{-(t_1 r_1 + \dots + r_m t_m + t) a(\sigma)} e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Зауваження 4. *Надалі вважатимемо, що в умові (5) параметр $\beta = 2$.*

Наведемо ще деякі властивості функції $G(t, x)$.

Лема 4. *Функція $G(t, \cdot)$, $t \in (0, T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі S_2^1, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення леми досить показати, що функція $F[G(t,\cdot)] = Q(t,\cdot)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $F[S^1_2] = S^2_1$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}\left[Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\sigma)\right] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma), \quad \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

1) $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} D^s_\sigma(-a(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s \in \mathbb{Z}_+$,

рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \overline{c}\,\overline{B}^s s^{2s} \exp\{-\overline{a}|\sigma|\}$, $s \in \mathbb{Z}_+$,

де сталі $\overline{c}, \overline{a}, \overline{B} > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma) \in \Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому, внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости,

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -a(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma), 0<\theta<1, t+\theta\Delta t \le T.$$

Отже,

$$D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma a(\sigma) D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) \tag{16}$$

і

$$D^s_\sigma\left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right) = -\sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma a(\sigma)[D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma)].$$

Оскільки

$$D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^s_\sigma Q(t,\sigma) = D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t, \quad 0<\theta_1<1,$$

то звідси та з оцінок (14) випливає, що

$$D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0, \quad \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тоді і

$$D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D^s_\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big), \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Врахувавши (16), оцінки (1), (2), (14), які задовольняють функції $a(\sigma)$, $Q(t,\sigma)$ та їхні похідні, знайдемо, що

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \tilde{c}_1\tilde{c}\sum_{l=0}^{s} C^l_s B^l_1 l^l \widetilde{A}^{s-l} t^{\gamma(s-l)}(s-l)^{2(s-l)} \exp\{-(t+\theta\Delta t)|\sigma| + \varepsilon|\sigma|\}$$

(тут $\varepsilon > 0$ – довільно фіксований параметр). Візьмемо $\varepsilon = t/2$ і врахуємо, що $t+\theta\Delta t \leq T$. Тоді

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \overline{c}\overline{B}^s s^{2s} \exp\{-\overline{a}|\sigma|\}, s \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\overline{c} = \tilde{c}_1 c$, $\tilde{c}_1 = \max\left\{c, \dfrac{2\sqrt{2}}{t}\right\}$, $\overline{B} = 2\max\{B_1, \widetilde{A}t^\gamma\}$, $\overline{a} = t/2$, причому всі сталі не залежать від Δt. □

Наслідок 2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}, \forall f \in (S_2^1)', \quad t \in (0,T].$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основою маємо, що

$$f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle, \quad \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[(f * G(t+\Delta t, x)) - (f * G(t,x))] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle.$$

Внаслідок леми 4 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\cdot), \Delta t \to 0,$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору S_2^1. Тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \langle f_\xi, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = \langle f_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\xi)\rangle = f * \frac{\partial}{\partial t}G(t,x).$$

Твердження доведено. □

Оскільки

$$F[G(t,\cdot)] = Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x)e^{i\sigma x}d\sigma, t \in (0,T],$$

то звідси дістаємо формулу

$$\int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x)dx = Q_1(t,0)Q_2(0) = \lambda_0 e^{-t}, \quad \lambda_0 = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(0)e^{-t_k}\right)^{-1}$$

(тут враховано, що $a(0) = 1$).

Лема 5. *У просторі $(S_2^1)'$ правильними є співвідношення:*

1) $G(t,\cdot) \to F^{-1}[Q_2]$, $t \to +0$;

$$2) \quad \mu G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l B_l G(t_l,\cdot) \to \delta, t \to +0 \tag{17}$$

(тут δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. 1. Урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S', для доведення твердження досить встановити, що

$$F[G(t,\cdot)] = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} Q_2(\cdot)$$

у просторі $(S_1^2)'$. Для цього візьмемо довільну функцію $\varphi \in S_1^2$ і, скориставшись тим, що Q_2 – мультиплікатор у просторі S_1^2, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\langle Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot),\varphi\rangle = \langle Q_1(t,\cdot), Q_2(\cdot)\varphi(\cdot)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma \underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma = \langle 1, Q_2(\cdot)\varphi(\cdot)\rangle = \langle Q_2,\varphi\rangle.$$

Звідси вже випливає твердження 1 леми 5.

2. Урахувавши твердження 1 та вигляд операторів $B_1,\dots,B_m$ знайдемо, що

$$\mu G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l B_l G(t_l,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l B_l G(t_l,\cdot) =$$

$$= \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l F^{-1}[g_l(\cdot)Q(t_l,\cdot)] = F^{-1}\Big[\mu Q_2(\sigma) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l g_l(\sigma)Q(t_l,\sigma)\Big].$$

Доведемо, що в просторі $(S_1^2)'$ виконується рівність

$$\mu Q_2(\sigma) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l g_l(\sigma)Q(t_l,\sigma) = 1. \tag{18}$$

Для доведення (18) візьмемо довільну функцію $\varphi \in S_1^2$ і, розуміючи $Q_2(\cdot)$, $g_l(\cdot)Q(t_l,\cdot)$, $l \in \{1,\dots,m\}$, як регулярні узагальнені функції з простору $(S_1^2)'$, знайдемо, що

$$\Big\langle \mu Q_2(\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l g_l(\cdot)Q(t_l,\cdot),\varphi\Big\rangle = \langle \mu Q_2(\cdot),\varphi\rangle - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \langle g_l(\cdot)Q(t_l,\cdot),\varphi\rangle =$$

$$= \mu \int\limits_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \int\limits_{\mathbb{R}} g_l(\sigma)Q(t_l,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{l=1}^{m} \frac{\mu_l g_l(\sigma) Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) Q_1(t_k,\sigma)}\Big]\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum\limits_{l=1}^{m} \mu_l g_l(\sigma) Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) Q_1(t_k,\sigma)}\varphi(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma)d\sigma = \langle 1, \varphi\rangle,$$

тобто співвідношення (18) виконується в просторі $(S_1^2)'$. Оскільки $F^{-1}[1] = \delta$, то звідси дістаємо, що в просторі $(S_2^1)'$ виконується (17).

Твердження 2 леми доведено. □

Зауваження 5. *Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, то нелокальна багатоточкова за часом задача вироджується в задачу Коші для цього рівняння, при цьому $Q_2(\sigma) = 1$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $F^{-1}[1] = \delta$. Отже, у випадку задачі Коші для рівняння (4) функція $G(t,x) = F^{-1}[e^{-ta(\sigma)}]$ володіє властивістю $G(t,\cdot) \to \delta$ при $t \to +0$ у просторі $(S_1^1)'$.*

Наслідок 3. *Нехай*

$$\omega(t,\cdot) = f * G(t,\cdot), \quad f \in (S_{2,*}^1)', (t,x) \in \Omega.$$

Тоді у просторі $(S_2^1)'$ виконується граничне співвідношення

$$\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k \omega(t_k,\cdot) \to f, t \to +0. \tag{19}$$

Доведення. Урахувавши властивість неперервності відображення F: $(S_2^1)' \to (S_1^2)'$, доведемо, що в просторі $(S_1^2)'$ виконується граничне співвідношення

$$F\Big[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k \omega(t_k,\cdot)\Big] \to F[f], t \to +0. \tag{20}$$

Оскільки $f \in (S_{2,*}^1)'$, то

$$F[\omega(t,\cdot)] = F[f * G(t,\cdot)] = F[f]F[G(t,\cdot)] = F[f]Q(t,\cdot).$$

Отже, (20) набуває вигляду

$$F[f]\Big[\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\cdot) Q(t_k,\cdot)\Big] \to F[f], t \to +0.$$

При доведенні твердження 1 леми 5 встановлено, що $Q(t,\cdot) = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \to Q_2(\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі $(S_1^2)'$. Тоді, з урахуванням (18) знайдемо, що в просторі $(S_1^2)'$ справджується граничне співвідношення

$$\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\cdot) Q(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\cdot) Q(t_k,\cdot) = 1.$$

Таким чином, співвідношення (20), а, отже, і (19) виконуються у відповідних просторах. Твердження доведено.

Функція $G(t,\cdot)$ задовольняє при $t>0$ рівняння (4). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)=\frac{\partial}{\partial t}F^{-1}[Q(t,\sigma)]=F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big],$$

$$AG(t,x)=F^{-1}[a(\sigma)F[G(t,x)]]=F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)]=-F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big].$$

Отже,

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}+AG(t,x)=0,(t,x)\in\Omega,$$

що й потрібно було довести. □

Надалі функцію G називатимемо фундаментальним розв'язком нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (4).

З наслідку 3 випливає, що для рівняння (4) нелокальну багатоточкову за часом задачу можна сформулювати так: знайти функцію $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, яка задовольняє рівняння (4) і умову

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_kB_ku(t,\cdot)=f,\quad f\in(S^1_{2,*})',\tag{21}$$

де граничне співвідношення розглядається в просторі $(S^1_2)'$ (обмеження на параметри μ, μ_1, ..., μ_m, t_1, ..., t_m такі ж, як у випадку задачі (4), (5)).

Основний результат містить наступне твердження.

Теорема. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (4), (21) *є розв'язною, розв'язок дається формулою:*

$$u(t,x)=f*G(t,x),\ \ f\in(S^1_{2,*})',(t,x)\in\Omega.$$

Доведення. Переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, задовольняє рівняння (4). Справді (див. наслідок 2),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,x))=f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

$$Au(t,x)=F^{-1}[a(\sigma)F[f*G]](t,x).$$

Оскільки f – згортувач у просторі S^1_2, то

$$F[f*G(t,x)]=F[f]F[G(t,x)]=F[f]Q(t,\sigma).$$

Отже,

$$Au(t,x)=F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)F[f](\sigma)]=-F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F[f](\sigma)\right]=$$

$$=-F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\Big]\cdot F[f]\Big]=-F^{-1}\Big[F\Big[f*\frac{\partial G}{\partial t}\Big]\Big]=-f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, задовольняє рівняння (4). З наслідку 3 випливає, що $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$ задовольняє умову (21) у зазначеному сенсі. Теорема доведена. □

Зауваження 6. *Якщо в умові* (21) $B_1 = \dots = B_m = I$ *(I – одиничний оператор), то можна довести, що задача* (4), (21) *коректно розв'язна, при цьому* $u(t,x) = f * \tilde{G}(t,x)$, $f \in (S^1_{2,*})'$, $(t,x) \in \Omega$, *де* $\tilde{G} = F^{-1}[\tilde{Q}]$,

$$\tilde{Q}(t,\sigma) = e^{-ta(\sigma)}\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{-t_k a(\sigma)}\Big)^{-1}.$$

Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$ *(випадок задачі Коші), то тоді задача* (4), (21) *коректно розв'язна,* $u(t,x) = f * G_0(t,x)$, $f \in (S^1_{1,*})'$, *де* $G_0 = F^{-1}[e^{-ta(\sigma)}]$, $G_0(t,\cdot) \to \delta$ *при* $t \to +0$ *у просторі* $(S^1_1)'$.

Список літератури

[1] *Gorbachuk V.I. Gorbachuk M.L.* The boundary value problems for differential-operator equations Nauk. Dumka, Kyiv, 1984. (in Russian)

[2] *Horodetskyi V.V., Nagnubida N.I., Nastasiev P.P.* The methods of solve for functional analysis problems. Vyscha shkola, Kyiv, 1990. (in Russian)

[3] *Samko S.G., Kilbas A.A, Marychev O.I.* Integrals and fractional order derivatives and some ot tteir applications. Nauka, Minsk, 1987. (in Russian)

[4] *Gelfand I.M., Shilov G.E.* Some questions of differential equations theory. Fizmatgiz, M, 1958. (in Russian)

[5] *Gorodetskyi V.V., Lenyuk O.M.* On fractional differentiation in spaces of S' type. Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. 1998, (11), 20–24. (in Ukrainian)

[6] *Dezin A.A.* General questions of the boundary value problems theory. Nauka, M., 1980. (in Russian)

[7] *Nahushev A.M.* The mathemetical biology equations. Vysh. shkola, 1995. (in Russian)

[8] *Belavin I.A., Kapitsa S.G., Kurdyumov S.P.* A mathematical model of global demographic processes with regard to the spatial distribution. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 1998, 38 (6), 885-902. (in Russian)

[9] *Gorodetskyi V.V., Martynyuk O.V.* The Cauchy problem and nonlocal problems for first-order evolution equations by time variable. Rodovid, Chernivtsi, 2015. (in Ukrainian)

[10] *Gorodetskyi V.V., Myronyk V.I.* The two point problem for one class of evolution equations. I. Differents. uravneniya, 2010, 46(3), 349-363. (in Russian)

[11] *Gorodetskyi V.V., Myronyk V.I.* The two point problem for one class of evolution equations. II. Differents. uravneniya, 2010, 46(4), 520-526. (in Russian)

[12] *Gelfand I.M., Shilov G.E.* The spaces of main and generilized functions, Fizmatgiz, M., 1958. (in Russian)

Надійшло 25.08.2020

Gorodetskiy V.V., Kolisnyk R.S., Shevchuk N.M. *On a nonlocal by time problem for a evolutionary equation in S type spaces*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 1 (2020), 65–83.

The evolution equation with the operator $A = \sqrt{I - \Delta}$, $\Delta = d^2/dx^2$ was investigated. It is established that the operator A coincides in certain spaces of S type with a pseudodifferential operator constructed by the function (symbol) $a(\sigma) = (1+\sigma^2)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. For this equation a nonlocal multi-point by time problem which contains pseudodifferential operators constructed by smooth symbols and the initial function is an element of the space of generalized functions of the ultradistribution type. An analytical representation of the solution for the specified problem in the form of a convolution of the fundamental solution with the initial function is found. The properties of the fundamental solution of the specified multi-point problem are investigated. Obtained results are new and represent high scientific interest for specialists in the area of partial differential equation theory.