Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 1, 118–129 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №1, 118–129

Слюсарчук В.Ю.

ПРО ОБОРОТНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ АВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Згідно з теоремою Банаха про обернений оператор для неперервної оборотності лінійного неперервного оператора, що діє з одного банахового простору в інший, необхідно і достатньо, щоб цей оператор був сюр'єктивним та ін'єктивним. Цих вимог навіть у випадку нелінійних операторів достатньо для оборотності відповідних операторів. Однак, обернені оператори можуть не бути неперервними. Це стосується диференційовних відображень, для яких обернені відображення можуть не бути диференційовними. Тому для оборотності нелінійних операторів потрібне виконання додаткових вимог. Для диферецційовного відображення такою вимогою є виконання умови невиродженості похідної Фреше відображення в кожній точці простору, в якому діє це відображення.

У статті розглянуто нелінійні автономні диференціальні оператори класу C^1, що діють із простору обмежених і неперервно диференційовних на осі функцій у простір обмежених і неперервних на осі функцій зі значеннями в нескінченновимірному банаховому просторі. Для таких операторів наведено необхідні та достатні умови, при виконанні яких ці оператори є дифеоморфізмами класу C^1. Також наведено умови ін'єктивності та сюр'єктивності досліджуваних операторів.

Ключові слова і фрази: умови оборотності диференційовних відображень, умови оборотності нелінійних автономних диференціальних операторів, умови ін'єктивності та сюр'єктивності операторів.

National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine
e-mail: *V.E.Slyusarchuk@gmail.com*

Вступ

Стаття присвячена встановленню необхідних та достатніх умов, коли нелінійні автономні диференціальні оператори, що визначені на просторі обмежених і неперервних на осі функцій зі значеннями в банаховому просторі, є дифеоморфізмами класу C^1.

1 Загальні теореми про оборотність диференційовних відображень

Спочатку наведемо допоміжні результати про умови оборотності нелінійного відображення $F : X \to Y$, де X і Y – довільні банахові простори над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно.

УДК 517.988; 517.988.5; 517.988.63
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34L30, 47B38, 47E05, 47J35.

1.1 Диференційовні відображення та C^1-дифеоморфізми

Розглянемо потрібні для подальшого позначення та означення, запозичені з [1], [2].

Використаємо банаховий простір $L(X, Y)$ лінійних неперервних операторів $A: X \to Y$ з операторною нормою.

Нехай $U \subset X$ і $V \subset Y$ – відкриті множини і $(Df)_x$ – похідна Фреше відображення $f : U \to V$ в точці $x \in U$. Відображення f називається C^1-*відображенням*, якщо f диференційовне в кожній точці $x \in U$ і природне відображення $Df : U \to L(X, Y)$ неперервне. C^1-відображення f ще називають *диференційовним відображенням класу* C^1.

Відображення $f : U \to V$ називається C^1-*дифеоморфізмом* або *дифеоморфізмом класу* C^1, якщо f гомеоморфно відображає U на V і відображення f та f^{-1} є C^1-відображеннями.

Локальним C^1-*дифеоморфізмом у точці* $x \in X$ називається відображення $f : X \to Y$, для якого існує такий окіл $U \subset X$ точки x, що звуження $f|_U$ відображення f на U встановлює C^1-дифеоморфізм між U і відкритою підмножиною простору Y.

1.2 Умови оборотності диференційовних відображень

Нехай A, B – множини і $g : A \to B$ – деяке відображення.

Відображення g є *ін'єктивним*, якщо із $x \neq y$ випливає $g(x) \neq g(y)$. Це відображення є *сюр'єктивним*, якщо для кожного $b \in B$ існує елемент $a \in A$, такий, що $g(a) = b$.

Правильними є такі два твердження.

Теорема 1. *Нехай X і Y – банахові простори і $F : X \to Y$ – C^1-відображення.*

Відображення $F : X \to Y$ є C^1-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли:

1) відображення F сюр'єктивне;

2) відображення F ін'єктивне;

3) відображення F є локальним C^1-дифеоморфізмом у кожній точці $x \in X$.

Теорема 2. *Нехай X і Y – банахові простори і $F : X \to Y$ – C^1-відображення.*

Відображення $F : X \to Y$ є C^1-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли:

1) відображення F сюр'єктивне;

2) відображення F ін'єктивне;

3) похідна $(DF)_x : X \to Y$ є неперервно оборотним оператором для кожної точки $x \in X$.

Ці твердження отримано автором в [3] з використанням необхідних та достатніх умов існування оберненої функції [4] і є рівносильними.

Зауваження 1. *Виконання перших двох умов теорем 1 і 2 достатньо для оборотності нелінійного відображення $F : X \to Y$, однак, недостатньо, щоб це відображення було C^1-дифеоморфізмом. Це підтверджується прикладом C^1-відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що визначається рівністю $f(x) = x^3$. Відображення f сюр'єктивне, ін'єктивне і має обернене $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, однак, відображення $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ не є диференційовним у точці $x = 0$.*

1.3 Умови ін'єктивності відображення F

Корисною для подальшого є наступна умова ін'єктивності C^1-відображення $F : X \to Y$.

Розглянемо множину

$$\mathcal{K}(X) = \{(x_1, x_2) \in X \times X : x_1 \neq x_2\}.$$

Кожній точці $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}(X)$ співставимо диференційовну на відрізку $[0, 1]$ функцію $F(x_1 + \tau(x_2 - x_1))$ зі значеннями в Y. Очевидно, що

$$\frac{dF(x_1 + \tau(x_2 - x_1))}{d\tau} = (DF)_{x_1+\tau(x_2-x_1)}(x_2 - x_1), \quad \tau \in [0, 1], \tag{1}$$

і за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\left(\int_0^1 (DF)_{x_1+\tau(x_2-x_1)} \, d\tau \right) (x_2 - x_1) = F(x_2) - F(x_1). \tag{2}$$

Розглянемо оператор $\mathcal{I}_{x_1,x_2,F} : X \to Y$, що визначається рівністю

$$\mathcal{I}_{x_1,x_2,F} = \int_0^1 (DF)_{x_1+\tau(x_2-x_1)} \, d\tau, \tag{3}$$

і ядро $\ker \mathcal{I}_{x_1,x_2,F} = \{x \in X : \mathcal{I}_{x_1,x_2,F} x = 0\}$ цього оператора.

Очевидно, що на підставі (2) і (3) справджується

Теорема 3. *C^1-Відображення $F : X \to Y$ ін'єктивне, тоді і тільки тоді, коли*

$$\ker \mathcal{I}_{x_1,x_2,F} = \{0\} \quad \textit{для всіх} \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{K}(X). \tag{4}$$

Зауваження 2. *Виконання співвідношення (4) аналогічне виконанню співвідношення $\ker A = \{0\}$ для лінійного неперервного оператора $A : X \to Y$ (у теоремі Банаха про обернений оператор [5]). Якщо $F(x) = Ax$, то $(DF)_x = A$ для всіх $x \in X$ (оператор $A : X \to Y$ є C^1-відображенням), і тому $\mathcal{I}_{x_1,x_2,F}(x_2 - x_1) = A(x_2 - x_1)$. Отже, якщо $\mathcal{I}_{x_1,x_2,F}(x_2 - x_1) \neq 0$ для всіх $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, то $\ker A = \{0\}$, і навпаки.*

Зауваження 3. *Перевірка в теоремах 1 і 2 виконання для відображення F умови сюр'єктивності є складною задачею навіть у випадку лінійного F (див., наприклад, задачі про обмежені розв'язки лінійних диференціальних або різницевих рівнянь [6], [7], [8], [9]). Вимога виконання цієї умови в теоремах 1 і 2 є природною вимогою (вона присутня і в формулюванні теореми Банаха про обернений оператор [5]). Для деяких класів відображень F твердження теореми 1 є правильним і без умови 1). Простим прикладом такого відображення є лінійний автономний диференціальний оператор у випадку $\dim E < \infty$. Також ця теорема є узагальненням теореми Банаха про обернений оператор на випадок диференційовних відображень класу C^1.*

1.4 Умови сюр'єктивності відображення F

Позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх лінійних неперервних відображень $A : X \to Y$, кожне з яких має неперервне обернене A^{-1}.

Нехай $B_X[0, r]$, де $r \in (0, +\infty)$, – замкнена куля $\{x \in X : \|x\|_X \leqslant r\}$ у просторі X.

Наступна отримана в [10] теорема дає достатні умови сур'єктивності відображення F.

Теорема 4. *Нехай для кожного числа $H \geqslant 0$ існують такі число $r > 0$ і відображення $A \in \mathcal{E}$, що:*
1) $F - A : B_X[0, r] \to Y$ – цілком неперервне відображення;
2) виконується співвідношення

$$\sup_{x \in B_X[0,r]} \|Fx - Ax\|_Y \leqslant \frac{r}{\|A^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H. \tag{5}$$

Тоді для кожного $y \in Y$ рівняння $Fx = y$ має хоча б один розв'язок $x \in X$.

Зазначимо, що у випадку лінійного відображення F виконання співвідношення (5) є необхідним для сюр'єктивності цього відображення [10]

Інші умови сюр'єктивності відображення F наведено в [3].

2 Умови оборотності автономних диференціальних операторів

Спочатку наведемо деякі означення і позначення, потрібні для дослідження диференціальних операторів.

Нехай E – банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через $C^0(\mathbb{R}, E)$ банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в просторі E з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_E,$$

а через $C^1(\mathbb{R}, E)$ – банаховий простір усіх функцій $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt} \in C^0(\mathbb{R}, E)$, з нормою

$$\|x\|_{C^1(\mathbb{R},E)} = \max\left\{\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\right\}.$$

У просторі $C^0(\mathbb{R}, E)$ визначимо оператор зсуву S_h, $h \in \mathbb{R}$, за допомогою співвідношення

$$(S_h x)(t) = x(t + h), \ t \in \mathbb{R}.$$

Елемент $y \in C^k(\mathbb{R}, E)$, $k \in \{0, 1\}$, називається *майже періодичним*, якщо замикання множини $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі $C^k(\mathbb{R}, E)$ є компактною підмножиною цього простору [11].

Множини $B^0(\mathbb{R},E)$ і $B^1(\mathbb{R},E)$ майже періодичних елементів просторів $C^0(\mathbb{R},E)$ і $C^1(\mathbb{R},E)$ є підпросторами цих просторів відповідно з нормами

$$\|x\|_{B^0(\mathbb{R},E)} = \|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \;\text{ і }\; \|x\|_{B^1(\mathbb{R},E)} = \|x\|_{C^1(\mathbb{R},E)}.$$

Оператор $A \in L(C^i(\mathbb{R},E), C^j(\mathbb{R},E))$, де $i,j \in \{0,1\}$, називається *майже періодичним* [12], [13], якщо замикання множини $\{S_\tau A S_{-\tau} : \tau \in \mathbb{R}\}$ у просторі $L(C^i(\mathbb{R},E), C^j(\mathbb{R},E))$ є компактним у цьому просторі.

Позначимо через $\mathfrak{G}$ множину всіх C^1-відображень $g : E \to E$, для кожного з яких похідна Фреше $(Dg)_x$ є рівномірно неперервною на кожній обмеженій множині $M \subset E$.

Розглянемо автономний диференціальний оператор $\mathfrak{D} : C^1(\mathbb{R},E) \to C^0(\mathbb{R},E)$, що визначається рівністю

$$(\mathfrak{D}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)) \;\text{ для всіх }\; t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

де $g \in \mathfrak{G}$.

Вимога рівномірної неперервності похідної $(Dg)_x$ на кожній обмеженій множині $M \subset E$ виконується, якщо, наприклад, банаховий простір E є скінченновимірним (за теоремою Кантора [14, с. 179]).

При виконанні таких вимог до відображення g диференціальний оператор $\mathfrak{D}$ є C^1-відображенням.

Справді, з урахуванням (2) і (3) для довільних $x, u \in C^1(\mathbb{R},E)$ і $t \in \mathbb{R}$ отримуємо

$$(\mathfrak{D}(x+u))(t) - (\mathfrak{D}x)(t) = \left(\frac{d(x(t)+u(t))}{dt} + g(x(t)+u(t))\right) - \left(\frac{dx(t)}{dt} + g(x(t))\right) =$$

$$= \frac{du(t)}{dt} + g(x(t)+u(t)) - g(x(t)) =$$

$$= \left(\frac{du(t)}{dt} + (Dg)_{x(t)}u(t)\right) + \Big((g(x(t)+u(t)) - g(x(t))) - (Dg)_{x(t)}u(t)\Big) =$$

$$= \left(\frac{du(t)}{dt} + (Dg)_{x(t)}u(t)\right) + \int\limits_0^1 (Dg)_{x(t)+\tau u(t)}\, d\tau\; u(t) - (Dg)_{x(t)}u(t) =$$

$$= \left(\frac{du(t)}{dt} + (Dg)_{x(t)}u(t)\right) + \int\limits_0^1 \Big((Dg)_{x(t)+\tau u(t)} - (Dg)_{x(t)}\Big)\, d\tau\; u(t).$$

Оскільки на підставі рівномірної неперервності $(Dg)_x$ на кожній обмеженій множині $M \subset E$ виконується співвідношення

$$\lim_{\|u\|_{C^1(\mathbb{R},E)} \to 0} \frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left\| \int\limits_0^1 \Big((Dg)_{x(t)+\tau u(t)} - (Dg)_{x(t)}\Big)\, d\tau\; u(t) \right\|_E}{\|u\|_{C^1(\mathbb{R},E)}} = 0,$$

то згідно з означенням похідної Фреше (див. [15, с. 196]) похідна $(D\mathfrak{D})_x$ диференціального оператора $\mathfrak{D}$ в точці $x = x(t)$ подається за допомогою співвідношення

$$((D\mathfrak{D})_x u)(t) = \frac{du(t)}{dt} + (Dg)_{x(t)} u(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Ця похідна є неперервною по x на $C^1(\mathbb{R}, E)$ завдяки рівномірній неперервності похідної $(Dg)_x$ на обмежених підмножинах простору E. Тому оператор $\mathfrak{D}$ є C^1-відображенням.

Для подальшого також нам потрібний оператор

$$\mathcal{I}_{x_1,x_2,\mathfrak{D}} = \int\limits_0^1 (D\mathfrak{D})_{x_1+\tau(x_2-x_1)}\, d\tau, \tag{8}$$

де $x_1, x_2 \in C^1(\mathbb{R}, E)$, аналогічний оператору $\mathcal{I}_{x_1,x_2,F}$.

Після проведеної підготовчої роботи наведемо умови оборотності оператора $\mathfrak{D}$.

Згідно з теоремами 1–3 справджується така теорема.

Теорема 5. *Нехай $g \in \mathfrak{S}$.*

C^1-відображення $\mathfrak{D} : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається співвідношенням (6), є C^1-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли:

1) $\mathfrak{D}C^1(\mathbb{R}, E) = C^0(\mathbb{R}, E)$;

2) $\ker \mathcal{I}_{x_1,x_2,\mathfrak{D}} = \{0\}$ для всіх $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}(C^1(\mathbb{R}, E))$;

3) для кожної точки $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ відображення $(D\mathfrak{D})_x$, що визначається співвідношенням (7), має обернений неперервний оператор $((D\mathfrak{D})_x)^{-1} : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^1(\mathbb{R}, E)$.

Зауваження 4. *Для нелінійного автономного оператора $\mathfrak{D} : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ лінійні диференціальні оператори $(D\mathfrak{D})_x : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$, у випадку $x(t) \not\equiv c$, $c \in E$, є неавтономними операторами. Для перевірки виконання умови 3) теореми 4 можна використовувати результати, викладені, наприклад, у [6], [7], [8].*

Зауваження 5. *Завдяки автономності оператора $\mathfrak{D}$ і рівномірній неперервності похідної Фреше $(Dg)_x$ на кожній обмеженій множині $M \subset E$ виконується співвідношення $\mathfrak{D}B^1(\mathbb{R}, E) \subset B^0(\mathbb{R}, E)$. Також для кожного $x \in B^1(\mathbb{R}, E)$ лінійний оператор $(D\mathfrak{D})_x : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ є майже періодичним і $(D\mathfrak{D})_x B^1(\mathbb{R}, E) \subset B^0(\mathbb{R}, E)$.*

Отже, з урахуванням зауваження 5 та теорем 1–3 за допомогою заміни в теоремі 5 просторів $C^1(\mathbb{R}, E)$ і $C^0(\mathbb{R}, E)$ на $B^1(\mathbb{R}, E)$ і $B^0(\mathbb{R}, E)$ відповідно отримаємо таке твердження.

Теорема 6. *Нехай $g \in \mathfrak{S}$.*

C^1-відображення $\mathfrak{D} : B^1(\mathbb{R}, E) \to B^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається співвідношенням (6), є C^1-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли:

1) $\mathfrak{D}B^1(\mathbb{R}, E) = B^0(\mathbb{R}, E)$;

2) $\ker \mathcal{I}_{x_1,x_2,\mathfrak{D}} = \{0\}$ для всіх $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}(B^1(\mathbb{R}, E))$;

3) для кожної точки $x \in B^1(\mathbb{R}, E)$ відображення $(D\mathfrak{D})_x$, що визначається співвідношенням (7), має обернений неперервний оператор $((D\mathfrak{D})_x)^{-1} : B^0(\mathbb{R}, E) \to B^1(\mathbb{R}, E)$.

3 Диференціальні рівняння з C^1-залежними від правих частин обмеженими розв'язками

Подамо твердження теорем 5 і 6 в іншому вигляді з використанням диференціального рівняння, породженого оператором $\mathfrak{D}$, та поняття C^1-залежності між функціями.

3.1 C^1-Залежність розв'язків рівняння $Fx = y$ від y

Для відображення $F : X \to Y$, що досліджувалося в п. 1, розглянемо функціональне рівняння

$$Fx = y, \tag{9}$$

де y – довільний елемент простору Y.

Припустимо, що рівняння (9) для кожного $y \in Y$ має єдиний розв'язок $x \in X$. Очевидно, що в цьому випадку оператор $F : X \to Y$ має обернений F^{-1}, а розв'язок x рівняння (9) є функцією від $y \in Y$, тобто

$$x = x(y). \tag{10}$$

Якщо відображення $x : Y \to X$, що визначається за допомогою (10), є C^1-відображенням, то залежність розв'язку x рівняння (9) від y називатимемо *C^1-залежністю.* Очевидно, що існує оператор $B_y \in L(Y, X)$, неперервно залежний від $y \in Y$, що виконується співвідношення

$$\|x(y+h) - x(y) - B_y h\|_X = o\left(\|h\|_Y\right) \quad \text{при} \quad h \to 0$$

для всіх $y \in Y$. Оскільки $x(y) = F^{-1}y$, то справджується така теорема.

Теорема 7. *C^1-Залежність розв'язку x рівняння* (9) *від y рівносильна C^1-дифференційовності відображення F^{-1}.*

Очевидно, що $B_y = \left(DF^{-1}\right)_y$.

3.2 Умови C^1-залежності обмежених розв'язків диференціального рівняння $\mathfrak{D}x = y$ від $y \in C^0(\mathbb{R}, E)$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)) = y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

де $g \in \mathfrak{S}$ і $y \in C^0(\mathbb{R}, E)$.

Завдяки теоремам 5–7 спраджуються наступні два твердження.

Теорема 8. *Нехай $g \in \mathfrak{S}$.*

Диференціальне рівняння (11) *для кожної функції $y \in C^0(\mathbb{R}, E)$ має єдиний розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ і має місце C^1-залежність цього розв'язку від y тоді і тільки тоді, коли:*

1) $\mathfrak{D}C^1(\mathbb{R},E) = C^0(\mathbb{R},E)$*;*

2) $\ker \mathcal{I}_{x_1,x_2,\mathfrak{D}} = \{0\}$ *для всіх* $(x_1,x_2) \in \mathcal{K}(C^1(\mathbb{R},E))$*;*

3) для кожної точки $x \in C^1(\mathbb{R},E)$ *відображення* $(D\mathfrak{D})_x$*, що визначається співвідношенням* (7)*, має обернений неперервний оператор* $((D\mathfrak{D})_x)^{-1} : C^0(\mathbb{R},E) \to C^1(\mathbb{R},E)$*.*

Теорема 9. *Нехай* $g \in \mathfrak{S}$*.*

Диференціальне рівняння (11) *для кожної функції* $y \in B^0(\mathbb{R},E)$ *має єдиний розв'язок* $x \in B^1(\mathbb{R},E)$ *і має місце* C^1*-залежність цього розв'язку від* y *тоді і тільки тоді, коли:*

1) $\mathfrak{D}B^1(\mathbb{R},E) = B^0(\mathbb{R},E)$*;*

2) $\ker \mathcal{I}_{x_1,x_2,\mathfrak{D}} = \{0\}$ *для всіх* $(x_1,x_2) \in \mathcal{K}(B^1(\mathbb{R},E))$*;*

3) для кожної точки $x \in B^1(\mathbb{R},E)$ *відображення* $(D\mathfrak{D})_x$*, що визначається співвідношенням* (7)*, має обернений неперервний оператор* $((D\mathfrak{D})_x)^{-1} : B^0(\mathbb{R},E) \to B^1(\mathbb{R},E)$*.*

4 Умови сюр'єктивності диференціального оператора $\mathfrak{D}$

Будемо вважати, що банаховий простір E є скінченновимірним.

Позначимо через $\mathcal{E}$ множину операторів $B \in L(E,E)$, для кожного з яких спектр $\sigma(B)$ не має спільних точок з множиною $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$. Для кожного такого оператора оператор $\mathcal{L}_B : C^1(\mathbb{R},E) \to C^0(\mathbb{R},E)$, що визначається формулою

$$(\mathcal{L}_B x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + Bx(t),\ t \in \mathbb{R},$$

має неперервний обернений оператор $\mathcal{L}_B^{-1}$ [7].

Наведемо отримане в [23] твердження, що аналогічне теоремі 4 і дає достатні умови виконання рівності

$$\mathfrak{D}C^1(\mathbb{R},E) = C^0(\mathbb{R},E). \tag{12}$$

Теорема 10. *Нехай для кожного числа* $H > 0$ *існують такі число* $r > 0$ *і елемент* $B \in \mathcal{E}$*, що*

$$\sup_{\|x\|_E \le r} \|g(x) - Bx\|_E \le \frac{r}{\|\mathcal{L}_B^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R},E),C^0(\mathbb{R},E))}} - H.$$

Тоді для кожного $y \in C^0(\mathbb{R},E)$ *диференціальне рівняння* (11) *має хоча б один розв'язок* $x \in C^1(\mathbb{R},E)$*, тобто справджується рівність* (12)*.*

5 Додаткові зауваження та літературні вказівки

Теореми 1 і 2 є окремими випадками отриманих автором в [3] тверджень про умови, при виконанні яких C^k-відображення $F : X \to Y$, $k \in \mathbb{N}$, є C^k-дифеоморфізмом.

Основні в статті теореми 4 і 5 про умови оборотності автономного диференцального оператора $\mathfrak{D}$ та відповідні теореми 7 і 8 про обмежені та майже періодичні розв'язки диференціального рівняння (11) є новими. Для перевірки в цих теоремах виконання умови 3) стосовно оборотності $(D\mathfrak{D})_x$ можна використовувати, наприклад, результати робіт [13], [16], [17], [18].

Умови існування обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з'ясовувалися в [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25].

References

[1] Lang S. Introduction in Differentiable Manifolds. Wiley, New York, 1962.

[2] Golubitsky M., Guillemin V. Stable mappings and their singularities. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.

[3] Slyusarchuk V. Yu. *Necessary and sufficient conditions for the invertibility of nonlinear differentiable maps.* Ukr. Math. J. 2016, **68** (4), 638–652. doi:10.1007/s11253-016-1247-9 (translation of Ukr. Mat. Zh. 2016, 68 (4), 563–576. (in Ukrainian))

[4] Slyusarchuk V. Yu. *Invertibility of the theorem on inverse function for differentiable functions.* Bukovinian. Math. Journal. 2014, **2** (4), 112–113. in Ukrainian)

[5] Kolmogorov A. N. and Fomin S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Vyshcha Shkola, Kyiv, 1974. (in Ukrainian)

[6] Krasnosel'skii M. A., Burd V. Sh., and Kolesov Yu. S. Nonlinear Almost Periodic Oscillations. Nauka, Moscow, 1970. (in Russian)

[7] Daletskii Yu. L. and Krein M. G. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces. Nauka, Moscow, 1970. (in Russian)

[8] Mitropol'skii Yu. A., Samoilenko A. M., and Kulik V. L. Investigation of the Dichotomy of Linear Systems of Differential Equations with the Help of Lyapunov Functions. Naukova Dumka, Kiev, 1990. (in Russian)

[9] Slyusarchuk V. E. *Exponential dichotomy for solutions of discrete systems.* Ukr. Math. J. 1983, **35** (1), 98–103 doi:10.1007/BF01093176 (translation of Ukr. Mat. Zh. 1983, 35 (1), 109–115. (in Russian))

[10] Slyusarchuk V. Yu. *The method of local linear approximation in the theory of nonlinear equations.* Scientific Bulletin of the University of Chernivtsi. Maths 2012, **2** (2-3), 157–163. (in Ukrainian)

[11] Bochner S. *Beitrage zur Theorie der fastperiodischen. I Teil. Funktionen einer Variablen.* Math. Ann., 1927, **96** 119–147; Bochner S. *Beitrage zur Theorie der fastperiodischen. II Teil. Funktionen mehrerer Variablen.* Math. Ann., 1927, **96**, 383–409.

[12] Muhamadiev E. *On the inversion of functional operators in a space of functions bounded on the axes.* Math. Notes 1972 **11** (3), 169–172 doi:10.1007/BF01098519 (translation of Mat. Zametki 1972, **11** (3), 269–274 (in Russian))

[13] Slyusarchuk V. E. *Invertibility of almost periodic c-continuous functional operators* Mat. Sb. 1981, **116(158)** 4(12), 483–501. doi:10.1070/SM1983v044n04ABEH000976 (in Russian))

[14] Fikhtengolts G. M. Course of Differential and Integral Calculus, T. 2. Nauka, Moscow, 1966. (in Russian)

[15] Lyusternik L. A. and Sobolev V. I. Short course of functional analysis. Higher School, Moscow, 1982. (in Russian)

[16] Slyusarchuk V. E. *Invertibility of nonautonomous functional-differential operators.* Math. USSR-Sb. 1987, **58** (1), 83–100. doi:10.1070/SM1987v058n01ABEH003093 (translation of Mat. Sb. 1986, **130(172)** 1(5), 86–104.(in Russian))

[17] Slyusarchuk V.E. *Necessary and sufficient conditions for invertibility of nonautonomous functional-differential operators.* Mathematical Notes 1987, **42**, 648–651. doi:10.1007/BF01240454 (translation of Mat. Zametki 1987, **42** (2), 262–267. (in Russian))

[18] Slyusarchuk V. E. *Necessary and sufficient conditions for the invertibility of uniformly c-continuous functional-differential operators.* Ukr. Math. J. 1989, **41** (2), 180–183. doi:10.1007/BF01060384 (translation of Ukr. Mat. Zh. 1989, **41** (2), 201–205. (in Russian))

[19] Trubnikov Yu. V. and Perov A. I. Differential Equations with Monotone Nonlinearities. Nauka i Tekhnika, Minsk, 1986. (in Russian)

[20] Amerio L. *Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati.* Annali Mat. pura ed. appl. 1955, **39**, (2), 97–119.

[21] Reissig R., Sansone G., and Conti R. Qualitative Theorie Nichtlinear Differentialgleichungen. Edizioni Cremonese, Roma, 1963.

[22] Slyusarchuk V. E. *Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations.* Acta Applicandae Mathematicae 2001, **65**, (1-3), 333–341. doi:10.1023/A:1010687922737

[23] Slyusarchuk V. Yu. *Method of local linear approximation in the theory of bounded solutions of nonlinear differential equations.* Ukr. Math. J. 2009, **61** (11), 1809–1829. doi:10.1007/s11253-010-0314-x (translation of Ukr. Mat. Zh. 2009, **61** (11), 1541–1556. (in Ukrainian))

[24] Slyusarchuk V. E. *The study of nonlinear almost periodic differential equations without recourse to the H-classes of these equations.* Sb. Math. 2014, **205** (6), 892–911. doi:10.4213/sm8188

[25] Slyusarchuk V. E. *Necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of a bounded solution of the equation* $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t) + h_1(t)) + h_2(t)$. Sb. Math. 2017, **208** (2), 255–268. doi:10.1070/SM8684

Список літератури

[1] Lang S. Introduction in Differentiable Manifolds. Wiley, New York, 1962.

[2] Golubitsky M., Guillemin V. Stable mappings and their singularities. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.

[3] Слюсарчук В. Ю. *Необхідні і достатні умови оборотності нелінійних диференційовних відображень.* Укр. мат. журн. 2016, **68** (4), 638–652. doi:10.1007/s11253-016-1247-9

[4] Слюсарчук В. Ю. *Оборотність теореми про обернену функцію для диференційовних функцій,* Буковинський мат. журн. 2014, **2** (4), 112–113.

[5] Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Вища школа, Київ, 1974.

[6] Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. Наука, Москва, 1970.

[7] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, Москва, 1970.

[8] Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова, Наукова думка, Киев, 1990.

[9] Слюсарчук В. Е. *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем.* Укр. мат. журн. 1983, **35** (1), 98–103. doi:10.1007/BF01093176

[10] Слюсарчук В. Ю. *Метод локальної лінійної апроксимації в теорії нелінійних рівнянь,* Науковий вісник Чернівецького університету, Математика. 2012, **2** (2–3), 157–163 (2012).

[11] Bochner S. *Beitrage zur Theorie der fastperiodischen. I Teil. Funktionen einer Variablen.* Math. Ann., 1927, **96** 119–147; Bochner S. *Beitrage zur Theorie der fastperiodischen. II Teil. Funktionen mehrerer Variablen.* Math. Ann., 1927, **96**, 383–409.

[12] Мухамадиев Э. *Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций.* Мат. заметки 1972, **11**, (3), 269–274. doi:10.1007/BF01098519

[13] Слюсарчук В. Е. *Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов* Мат. сб. 1981, **116(158)** 4(12), 483–501. doi:10.1070/SM1983v044n04ABEH000976

[14] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 2. Наука, Москва, 1966.

[15] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. Высшая школа, Москва, 1982.

[16] Слюсарчук В. Е. *Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов.* Мат. сб. 1986, **130**(172) 1(5), 86–104. doi:10.1070/SM1987v058n01ABEH003093

[17] Слюсарчук В. Е. *Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов.* Мат. заметки 1987, **42** (2), 262–267. doi:10.1007/BF01240454

[18] Слюсарчук В. Е. *Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов.* Укр. мат. журн. 1989, **41** (2), 201–205. doi:10.1007/BF01060384

[19] Трубников Ю. В., Перов А. И. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Наука и техника, Минск, 1986.

[20] Amerio L. *Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati.* Annali Mat. pura ed. appl. 1955, **39**, (2), 97–119.

[21] Reissig R., Sansone G., and Conti R. Qualitative Theorie Nichtlinear Differentialgleichungen. Edizioni Cremonese, Roma, 1963.

[22] Slyusarchuk V. E. *Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations.* Acta Applicandae Mathematicae 2001, **65**, (1-3), 333–341. doi:10.1023/A:1010687922737

[23] Слюсарчук В. Ю. *Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.* Укр. мат. журн. 2009, **61**, (11), 1541–1556. doi:10.1007/s11253-010-0314-x

[24] Slyusarchuk V. E. *The study of nonlinear almost periodic differential equations without recourse to the H-classes of these equations.* Sb. Math. 2014, **205** (6), 892–911. doi:10.4213/sm8188

Слюсарчук В. Е. *Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений*, Мат. сб., 2014, **205** (6), 139–160. doi:10.4213/sm8188

[25] Слюсарчук В. Е. *Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений уравнения* $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t) + h_1(t)) + h_2(t)$, Мат. сб., 2017, **208**, (2), 88–103. doi:10.1070/SM8684

Надійшло 25.08.2020

Slyusarchuk V.Yu. *On the reversibility of nonlinear autonomous differential operators*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 1 (2020), 118–129.

According to the Banach theorem on the inverse operator, for the continuous invertibility of a linear continuous operator acting from one Banach space to another, it is necessary and sufficient that this operator be surjective and injective. These requirements, even in the case of nonlinear operators, are sufficient for the invertibility of the corresponding operators. However, inverse operators may not be continuous. This applies to differentiable mappings for which inverse mappings may not be differentiable. Therefore, for the reversibility of nonlinear operators it is necessary to fulfill additional requirements. For a differentiable mapping, such a requirement is that the condition for the non-degeneracy of the Frechet derivative of the mapping at every point in the space in which this mapping acts is satisfied.

The article considers nonlinear autonomous differential operators of class C^1 that act from the space of bounded and continuously differentiable on the axis of functions to the space of bounded and continuous on the axis of functions with values in an infinite-dimensional Banach space. For such operators, necessary and sufficient conditions are given under which these operators are diffeomorphisms of the class C^1. The conditions of injectivity and surjectivity of the studied operators are also given.