

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Досліджуючи періодичні розв'язки однорідного та неоднорідного гіперболічних рівнянь другого порядку, побудовано інтегральний оператор, за допомогою якого можна вивчати Т-періодичні розв'язки гіперболічних рівнянь другого порядку.

We construct an integral operator to investigate the T-periodic solutions of second order hyperbolic equations.

Вступ. Постановка задачі. Знаходження періодичних розв'язків диференціальних рівнянь не дає відповіді на питання про єдиність Т-періодичного розв'язку. Це підтверджують роботи А. М. Самойленка та його учнів [1, де й знаходиться широкий перелік джерел], які досліджували Т-періодичні розв'язки систем звичайних диференціальних рівнянь.

Досліджуючи крайові періодичні задачі для гіперболічних рівнянь другого порядку як лінійних, так і квазілінійних [2-5], нами вперше було застосовано нетрадиційний метод відшукування розв'язку вказаних задач. На відміну від ряду вчених [6-8], які використовують методи функціонального аналізу, згідно з якими розв'язок шукається у вигляді тригонометричного ряду $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx$, що автоматично забезпечує виконання крайових умов $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, проте вимагає накладання додаткових умов на праву частину неоднорідного рівняння, ми спочатку шукаємо періодичний розв'язок, а потім перевіряємо виконання крайових умов.

Однак, не беручи до уваги крайових умов, в даній роботі ми досліджуємо існування Т-періодичних розв'язків такої Т-періодичної задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

де $g(x, t + T) = g(x, t)$.

Дослідження задачі та обґрунтування отриманих результатів.

Лема 1. Для довільної функції $\mu(z) \in C^1(\mathbb{R})$, $\mu(z + T) = \mu(z)$ і $g(x, t) \in C^{0,1}([0, \pi] \times \mathbb{R})$, $g(x, t + T) = g(x, t)$, де Т-період даних функцій за змінною t , існує точний розв'язок Т-періодичної задачі (1), (2), який визначений формулою

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t). \quad (3)$$

Доведення. Доведемо спочатку, що функція

$$u^0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha \quad (4)$$

для кожної функції $\mu(z) \in C^1(\mathbb{R})$, $\mu(z + T) = \mu(z)$ є Т-періодичним розв'язком однорідної задачі

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u^0(x, t + T) = u^0(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Справді, обчислюючи частинні похідні u_{tt}^0 і u_{xx}^0 від функції $u^0(x, t)$, визначеної формулою (4), одержимо:

$$u_{tt}^0(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right);$$

$$u_{xx}^0(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 \equiv 0$. Отже, функція $u^0(x, t)$, визначена формулою (4), є розв'язком однорідного рівняння.

Легко перевірити, що для кожної функції $\mu(z) \in C^1(\mathbb{R})$, $\mu(z+T) = \mu(z)$ функція $u^0(x, t)$, визначена формулою (4), є Т-періодичною, тобто $u^0(x, t+T) = u^0(x, t)$. Маємо

$$\begin{aligned} u^0(x, t+T) &= \frac{1}{2} \int_{t+T-x}^{t+T+x} \mu(\alpha) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\beta+T) d\beta = u^0(x, t), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Тепер доведемо, що функція

$$\tilde{u}(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \quad (5)$$

є частинним Т-періодичним розв'язком неоднорідного рівняння (1). Спочатку доведемо, що функція $\tilde{u}(x, t)$, визначена формулою (5), для кожної Т-періодичної функції $g(x, t)$, тобто $g(x, t+T) = g(x, t)$, є також Т-періодичною. Справді, на основі формули (5) маємо

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t+T) &= -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t+T-x+\xi}^{t+T+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \eta+T) d\eta \equiv \tilde{u}(x, t). \end{aligned}$$

Доведемо, що функція $\tilde{u}(x, t)$, задовольняє рівняння (1). На основі формули (5) обчислимо другі частинні похідні $\tilde{u}_{tt}$ і $\tilde{u}_{xx}$ від функції $\tilde{u}(x, t)$. Одержимо

$$\tilde{u}_x(x, t) = \left(-\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \right)'_x =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \right)'_x d\xi - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t-x+x}^{t+x-x} g(x, \tau) d\tau \cdot x' + 0 = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left(g(\xi, t+x-\xi) \cdot (t+x-\xi)'_x - \right. \\ &\quad \left. - g(\xi, t-x+\xi) \cdot (t-x+\xi)'_x \right) d\xi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left(g(\xi, t+x-\xi) + g(\xi, t-x+\xi) \right) d\xi; \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{xx}(x, t) &= \\ &= \left(-\frac{1}{2} \int_0^x \left(g(\xi, t+x-\xi) + g(\xi, t-x+\xi) \right) d\xi \right)'_x = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial g(\xi, t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)} \cdot \frac{\partial(t+x-\xi)}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial g(\xi, t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)} \cdot \frac{\partial(t-x+\xi)}{\partial x} \right) d\xi - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(g(x, t+x-x) + g(x, t-x+x) \right) \cdot x' - 0 = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial g(\xi, t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial g(\xi, t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)} \right) d\xi - g(x, t). \quad (7) \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(x, t) &= \left(-\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \right)'_t = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \right)'_t d\xi + 0 - 0 = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left(g(\xi, t+x-\xi) \cdot (t+x-\xi)'_t - \right. \\ &\quad \left. - g(\xi, t-x+\xi) \cdot (t-x+\xi)'_t \right) d\xi = \end{aligned}$$

$$-g(\xi, t-x+\xi) \cdot (t-x+\xi)'_t d\xi = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(g(\xi, t+x-\xi) - g(\xi, t-x+\xi) \right) d\xi; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt}(x, t) = \\ = \left(-\frac{1}{2} \int_0^x \left(g(\xi, t+x-\xi) - g(\xi, t-x+\xi) \right) d\xi \right)'_t = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial g(\xi, t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)} \cdot \frac{\partial(t+x-\xi)}{\partial t} - \right. \\ \left. - \frac{\partial g(\xi, t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)} \cdot \frac{\partial(t-x+\xi)}{\partial t} \right) d\xi + 0 - 0 = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial g(\xi, t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)} - \frac{\partial g(\xi, t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)} \right) d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

Безпосередньою підстановкою переконаємося, що $\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = g(x, t)$. Отже, функція $\tilde{u}(x, t)$, визначена формулою (5), є частинним Т-періодичним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (1).

Таким чином, функція $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$, яка визначена формулою (3), є Т-періодичним розв'язком задачі (1), (2).

Лемі 1 доведено.

Слід зазначити, що встановлена формула (3) дає змогу досліджувати Т-періодичні задачі для різної класифікації рівнянь гіперболічного типу другого порядку. Для прикладу розглянемо таку Т-періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u), \quad 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Запишемо інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \\ - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi, \tau, u(\xi, \tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

де $\mu(z)$ – довільна Т-періодична функція.

Покажемо, при яких умовах інтегральне рівняння (12) має розв'язок. Для цього побудуємо послідовні наближення:

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha, \\ u_1(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \\ &- \frac{\varepsilon}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi, \tau, u_0(\xi, \tau)) d\tau, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ u_{n+1}(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \\ &- \frac{\varepsilon}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi, \tau, u_n(\xi, \tau)) d\tau, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Якщо функція $F(x, t, u)$ задовольняє умову Ліпшиця по u , тобто

$$|F(x, t, \bar{u}) - F(x, t, \bar{u})| \leq K |\bar{u} - \bar{u}|,$$

де $K = \text{const}$, то по аналогії з теоремою існування і єдиності розв'язку звичайного диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ при достатньо малому ε легко довести існування Т-періодичного розв'язку задачі (10), (11).

Справедливим буде твердження.

Теорема. Нехай задано Т-періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u), \quad 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

і функція $F(x, t, u)$ неперервна по x , t , Т-періодична по аргументу t та задовольняє умову Ліпшиця по аргументу u , тобто $|F(x, t, \bar{u}) - F(x, t, \bar{u})| \leq K |\bar{u} - \bar{u}|$, $K = \text{const}$.

Тоді для кожної функції $\mu(z) \in C(\mathbb{R})$, $\mu(z+T) = \mu(z)$, при достатньо малому ε існує гладкий розв'язок T -періодичної задачі (13), (14).

Висновки. У статті знайдено множини точних розв'язків T -періодичної задачі (1), (2) для неоднорідного гіперболічного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, за допомогою яких можна доводити існування T -періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку. На основі даного твердження можна довести існування:

1) 2π -періодичних розв'язків квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку:

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u);$$

2) T -періодичних розв'язків рівнянь із запізненням:

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u(x, t), u(x, t - \Delta)),$$

де Δ —деяке число;

3) T -періодичних розв'язків інтегродиференціальних рівнянь

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F\left(x, t, u(x, t), \int_t^{t+\tau} \varphi(x, t, s, u(x, s)) ds\right).$$

Оскільки в наведеній у роботі теоремі єдиності розв'язку задачі (13), (14) не встановлюється, це спонукає до подальших досліджень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — К. : Вища школа, 1976. — 184 с.
2. *Самойленко А. М., Хома-Могильська С. Г.* Аналітичний метод відшукування 2π -періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку // Доп. НАН України. — 2010. — N4. — С. 25-29.
3. *Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г.* Окремий випадок існування 2π -періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку // Доп. НАН України. — 2012. — N2. — С. 35-41.

4. *Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г.* Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, N7. — С. 912-921.

5. *Митропольський Ю. О., Хома Г. П., Хома-Могильська С. Г.* Розв'язки крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Доп. НАН України. — 2008. — N7. — С. 30-36.

6. *Rabinowitz P.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1967. — 20, № 1. — P. 145-205.

7. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — К. : Наукова думка, 1984. — 264 с.

8. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — К. : Наукова думка, 2002. — 416 с.