Осипова О.В., Черевко І.М.

# ПРО РОЗЩЕПЛЕННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається система лінійних сингулярно збурених стаціонарних диференціальних рівнянь. Наведено схему розщеплення системи на сукупність незалежних підсистем. Встановлено принцип зведення для дослідження стійкості нульового розв'язку.

*Ключові слова і фрази:* сингулярні збурення, інтегральний многовид, декомпозиція, принцип зведення, розщеплення початкових умов.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна (Осипова О.В.)
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна (Черевко І.М.)
e-mail: *shurenkacv@gmail.com (Осипова О.В.), i.cherevko@chnu.edu.ua (Черевко І.М.)*

## Вступ

На даний час широкий клас прикладних задач пов'язаний із сингулярними збуреннями звичайних диференціальних рівнянь. Для дослідження таких задач були поширені асимптотичні методи, методи примежових функцій та малого параметра. Однак для сингулярно збурених задач ефективними виявились не тільки асимптотичні, але й геометричні методи аналізу, які базуються на методі інтегральних многовидів і дозволяють здійснити якісне дослідження поведінки як окремих розв'язків так і цілих їх множин.

Конструктивний підхід дослідження систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь, що базується на методі інтегральних многовидів Боголюбова-Митропольського запропопонований у роботах [1, 2]. Він є ефективним тільки в тому випадку, якщо вдається точно або наближено знайти інтегральний многовид. Для сингулярно збурених систем інтегральні многовиди можна будувати у вигляді асимптотичних розкладів за степенями малого параметра [3, 4]. У випадку лінійних сингулярно збурених систем метод інтегральних многовидів дозволяє здійснити розщеплення вихідної системи на незалежні швидку і повільну підсистеми [5, 6].

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34A30, 34C45, 34D15, 34E15.
Information on some grant ...

У даній роботі розглядаються системи лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь, які вивчалися у працях [3, 5, 8, 9, 10]. Метою роботи є обґрунтування методики зведення вихідної системи до сукупності незалежних підсистем та встановлення принципу зведення для дослідження стійкості розв'язків у випадку лінійних стаціонарних систем.

## 1 Розщеплення системи лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь

Розглянемо сингулярно збурену систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + By, \\ \varepsilon\dot{y} = Cx + Dy, \end{cases} \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A, B, C, D$ – сталі матриці розмірностей відповідно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$, $\varepsilon$ – малий додатній параметр.

**Означення 1.** *[11] Множину точок $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ будемо називати інтегральним многовидом системи* (1), *якщо для довільної точки* $(t_0, x_0, y_0) \in M$ *справджується умова* $(t, x(t), y(t)) \in M$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$, *де* $(x(t), y(t))$ *– розв'язок системи* (1) *з початковими умовами* $(t_0, x_0, y_0)$.

Припустимо, що власні значення $\lambda_k$ матриці $D$ задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re}\lambda_k < -2\beta < 0, \quad \beta > 0. \tag{2}$$

Будемо шукати інтегральний многовид повільних змінних системи (1), який можна зобразити таким співвідношенням [5, 6]

$$y(t) = H(\varepsilon)\, x(t), \tag{3}$$

де $H(\varepsilon)$ – $m \times n$ – матриця, елементи якої регулярно залежать від $\varepsilon$.

Якщо (3) – інтегральний многовид, то функції $x(t)$, $y(t) = H(\varepsilon)\, x(t)$ – розв'язки системи (1). Перше рівняння при цьому має вигляд

$$\dot{x} = (A + BH)\, x, \tag{4}$$

а друге рівняння набуває вигляду

$$\varepsilon H(A + BH)\, x = (C + DH)\, x. \tag{5}$$

Остання рівність виконується при довільних $x$ тоді і тільки тоді, коли

$$\varepsilon H(A + BH) = (C + DH). \tag{6}$$

Навпаки покажемо, що коли виконується рівність (6), то система (1) має інтегральний многовид, який може бути зображений рівністю (3).

Нехай $H(\varepsilon)$ – обмежений розв'язок рівняння (5). Рівняння (4) має єдиний розв'язок для довільного початкового значення $(t_0, x_0)$. Позначимо його через $x(t, H, x_0)$.

Покажемо тепер, що пара функцій $x(t, H, x_0)$, $y(t) = H(\varepsilon)\,x(t, H, x_0)$ є розв'язком системи (1). Для цього достатньо перевірити, що вони є розв'язком другого рівняння системи (1). Маємо

$$\varepsilon H\dot{x} = Cx + DHx.$$

Враховуючи перше рівняння системи (1) дістаємо

$$[\varepsilon H(A + BH) - (C + DH)]\,x = 0.$$

Остання рівність справедлива згідно (6).

Має місце наступне твердження, аналогічне як у [5, 6].

**Теорема 1.** *Нехай справджується умова* (2). *Тоді при достатньо малих* $\varepsilon$ *існує інтегральний многовид повільних змінних системи* (1), *який однозначно визначається рівнянням* (6).

Зробивши в системі (1) заміну змінних

$$y(t) = u(t) + H(\varepsilon)\,x(t)\,, \tag{7}$$

одержимо

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u + Hx)\,, \\ \varepsilon(\dot{u} + H\dot{x}) = Cx + D(u + Hx)\,. \end{cases}$$

Підставивши значення $\dot{x}$ із першого рівняння в друге, дістанемо

$$\varepsilon\dot{u} = (D - \varepsilon HB)\,u + (C + DH - \varepsilon H(A + BH))\,x.$$

Нехай $H(\varepsilon)$ – розв'язок матричного рівняння (6), тоді система (1) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BH)x + Bu, \\ \varepsilon\dot{u} = (D - \varepsilon HB)\,u. \end{cases} \tag{8}$$

Будемо шукати інтегральний многовид швидких змінних системи (8) у вигляді

$$x(t) = P(\varepsilon)\,u(t)\,, \tag{9}$$

де $P(\varepsilon)$ – $n \times m$ – матриця, елементи якої регулярно залежать від $\varepsilon$.

Якщо (9) – інтегральний многовид, то функції $u(t)$, $x(t) = P(\varepsilon)u(t)$ – розв'язки системи (8). Перше рівняння при цьому набуває вигляду

$$P(D - \varepsilon HB)\,u = (\varepsilon(A + BH)\,P + \varepsilon B)\,u. \tag{10}$$

Остання рівність виконується при довільних $u$ тоді і тільки тоді, коли

$$P(D - \varepsilon HB) = \varepsilon(A + BH)\,P + \varepsilon B. \tag{11}$$

Навпаки покажемо, що коли виконується рівність (11), то система (8) має інтегральний многовид, який може бути зображений у вигляді (9).

Нехай $P(\varepsilon)$ – обмежений розв'язок рівняння (11). Друге рівняння системи (8) має єдиний розв'язок для довільного початкового значення $(t_0, u_0)$. Позначимо його через $u(t, P, u_0)$. Покажемо тепер, що пара функцій $u(t, P, u_0)$ і $x(t) = P(\varepsilon)\, u(t, P, u_0)$ є розв'язком системи (8). Для цього достатньо перевірити, що вони є розв'язком першого рівняння системи (8). Маємо

$$P\dot{u} = (A + BH)\, Pu + Bu.$$

Враховуючи друге рівняння системи (8) дістаємо

$$[P\,(D - \varepsilon HB) - (\varepsilon\,(A + BH)\, P + \varepsilon B)]\, u = 0.$$

Остання рівність справедлива згідно (11).

Має місце наступна теорема.

**Теорема 2.** *Нехай справджується умова* (2)*. Тоді при достатньо малих* $\varepsilon$ *існує інтегральний многовид швидких змінних системи* (8)*, який однозначно визначається рівнянням* (11)*.*

Зробимо в (8) заміну змінних

$$x(t) = w(t) + P(\varepsilon)\, u(t)\,. \tag{12}$$

Отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{w} + P\dot{u} = (A + BH)\,(w + Pu) + Bu, \\ \varepsilon\dot{u} = (D - \varepsilon HB)\, u. \end{cases}$$

Підставиши в перше рівняння значення $\dot{u}$ із другого рівняння, одержимо

$$\dot{w} = (A + BH)\, w + \left( (A + BH)\, P + B - \frac{1}{\varepsilon} P\,(D - \varepsilon HB) \right) u.$$

Якщо $P(\varepsilon)$ – розв'язок матричного рівняння (11), то система (8) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{w} = (A + BH)\, w, \\ \varepsilon\dot{u} = (D - \varepsilon HB)\, u. \end{cases} \tag{13}$$

Таким чином, за допомогою замін (7) та (12) систему (1) вдалося повністю розщепити. З (7) та (12) дістаємо

$$y(t) = H(\varepsilon)\, w(t) + (E + H(\varepsilon)\, P(\varepsilon))\, u(t)\,. \tag{14}$$

Підсумуємо наведені вище міркування у вигляді такої теореми.

**Теорема 3.** *Нехай виконується умова* (2), *тоді при достатньо малому* $\varepsilon$ *існує невироджена заміна змінних*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & P \\ H & E+HP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}, \tag{15}$$

*де матриці* $H$ *і* $P$ *є обмеженими розв'язками рівнянь* (6) *та* (11), *яка розщеплює систему* (1) *на дві незалежні підсистеми вигляду* (13).

*Доведення.* Існування матриці $\Phi = \begin{pmatrix} E & P \\ H & E+HP \end{pmatrix}$ випливає з підстановок (12) та (14). Для доведення теореми потрібно показати, що $\Phi$ – невироджена. Вигляд $\Phi^{-1}$ можна знайти, якщо виразити $w$ та $u$ через $x$ та $y$:

$$\begin{cases} x = w + Pu, \\ y = u + Hx. \end{cases}$$

Безпосередньо обчислюючи, дістаємо

$$u = -Hx + y. \tag{16}$$

$$w = (E + PH)\, x - Py. \tag{17}$$

З (16) та (17) випливає, що $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} E+PH & -P \\ -H & E \end{pmatrix}$.

Теорема 3 доведена. □

## 2 Розщеплення початкових умов

Розглянемо для системи (1) задачу Коші з початковими умовами $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Розв'язок цієї задачі можна представити через розв'язки рівнянь системи (13) за допомогою рівностей.

$$\begin{cases} x(t) = w(t) + P(\varepsilon)\, u(t), \\ y(t) = H(\varepsilon)\, w(t) + u(t) + H(\varepsilon)\, P(\varepsilon)\, u(t). \end{cases} \tag{18}$$

Перепишемо (18) у вигляді

$$\begin{cases} x(t) = w(t) + \varphi_1(t,\varepsilon), \\ y(t) = H(\varepsilon)\, w(t) + \varphi_2(t,\varepsilon), \end{cases}$$

де $\varphi_1(t,\varepsilon) = P(\varepsilon)\, u(t), \varphi_2 = u(t) + H(\varepsilon)\, P(\varepsilon)\, u(t)$, $w(t)$ – розв'язок рівняння

$$\dot{w}(t) = (A + BH(\varepsilon))\, w(t), \tag{19}$$

який задовольняє початкову умову

$$w(t_0) = w_0 = x_0 + P(\varepsilon)\, H(\varepsilon)\, x_0 - P(\varepsilon)\, y_0 = x_0 + P(\varepsilon)\,(H(\varepsilon)\, x_0 - y_0), \tag{20}$$

$u(t)$ – розв'язок рівняння

$$\varepsilon \dot{u}(t) = (D - \varepsilon H(\varepsilon)\, B)\, u(t), \tag{21}$$

що задовольняє початкову умову

$$u(t_0) = u_0 = -H(\varepsilon)\, x_0 + y_0. \tag{22}$$

Таким чином, якщо вибрати за початкову умову точку $(x_0, y_0)$ на многовиді $y(t) = H(\varepsilon)\, x(t)$, то очевидно, що $u_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ і, відповідно $x(t) = w(t)$, $y(t) = H(\varepsilon)\, w(t)$ – розв'язок, траєкторія якого лежить на цьому многовиді.

Знайти точний вигляд матриць $H(\varepsilon)$ та $P(\varepsilon)$ вдається тільки у найпростіших випадках, тому представляє інтерес виписати розщеплені системи при наближеному знаходженні цих матриць і дослідити точність знаходження наближень розв'язків вихідної системи (1).

Застосовуючи теорему про неявну функцію, можна показати, що розв'язок рівняння (6) можна шукати у вигляді асимптотичного розкладу за степенями малого параметра [5, 9]

$$H(\varepsilon) = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \dots. \tag{23}$$

Підставивши (23) в рівняння (6) і враховуючи, що згідно нерівності (2) матриця $D$ – невироджена, можна знайти для коефіцієнтів $H_i$, $i = 0, 1, \dots$ відповідні співвідношення

$$H_0 = -D^{-1}C, \quad H_i = D^{-1}\left(H_{i-1}A + \sum_{j=0}^{i-1} H_j B H_{i-1-j}\right), \quad i = 1, 2, \dots.$$

Розв'язок (11) також можна шукати у вигляді асимптотичного розкладу за степенями малого параметра

$$P(\varepsilon) = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 + \dots. \tag{24}$$

Підставивши (24) в рівняння (11), знаходимо для коефіцієнтів $P_i$, $i = 0, 1, \dots$ співвідношення

$$P_0 = 0, \quad P_1 = BD^{-1}, \quad P_i = ((A + BH)\, P_{i-1} + P_{i-1} HB)\, D^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots.$$

Обчислюючи нульові та перші наближення $H(\varepsilon)$ та $P(\varepsilon)$ і обмежуючись ними в задачах (19)–(20) та (21)–(22), дістанемо наближення для розщепленої системи. При врахуванні нульових наближень $H(\varepsilon)$ та $P(\varepsilon)$ маємо

$$\begin{cases} \dot{w} = (A - BD^{-1}C)\, w, \\ \varepsilon \dot{u} = (D + \varepsilon D^{-1}CB)\, u, \end{cases}$$

$$w_0 = x_0 + P_0 H_0 x_0 - P_0 y_0 = x_0,$$

$$u_0 = -H_0 x_0 + y_0 = D^{-1}C x_0 + y_0.$$

При врахуванні нульових і перших наближень $H(\varepsilon)$ та $P(\varepsilon)$, дістаємо

$$\begin{cases} \dot{w} = (A + B(-D^{-1}C + \varepsilon D^{-1}(-D^{-1}CA + D^{-1}CBD^{-1}C)))\, w, \\ \varepsilon \dot{u} = (D - \varepsilon (D^{-1}C + \varepsilon D^{-1}(-D^{-1}CA + D^{-1}CBD^{-1}C)))\, u, \end{cases}$$

$$w_0 = x_0 + \varepsilon BD^{-1}\left(\left(-D^{-1}C + \varepsilon D^{-1}\left(-D^{-1}CA + D^{-1}CBD^{-1}C\right)\right) x_0 - y_0\right),$$

$$u_0 = -\left(-D^{-1}C + \varepsilon D^{-1}\left(-D^{-1}CA + D^{-1}CBD^{-1}C\right)\right) x_0 + y_0.$$

## 3 Принцип зведення

За допомогою розщеплюючого перетворення (15) вихідна система (1) зводиться до двох незалежних підсистем вигляду (13). Встановимо зв'язок між розв'язками цих систем.

Нехай $(x(t), y(t))$ розв'язок системи (1) з початковими умовами $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Покажемо, що існує такий розв'язок $(u(t), w(t))$ системи (13) з початковими умовами $(t_0, u_0, w_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, що для всіх $t \geq t_0$ справджуються рівності (7) та (12). В силу єдиності розв'язку досить показати, що рівності (7) та (12) мають місце для $t = t_0$.

Підставляючи в (7) та (12) $t = t_0$, дістанемо

$$x_0 = w_0 + Pu_0, \quad y_0 = u_0 + Hx_0. \tag{25}$$

Розв'язуючи систему (25) маємо

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 - Hx_0, \\ w_0 &= x_0 - P(y_0 - Hx_0). \end{aligned} \tag{26}$$

Отже, кожний розв'язок $(x(t), y(t))$ системи (1) може бути представлений у вигляді (7) та (12), де $(u(t), w(t))$ – розв'язок системи (13) з початковими умовами (26).

Розглянемо рівності (12) та (14). Маємо оцінки [7]

$$\begin{gathered} |P(\varepsilon) u(t)| \leq K_1 e^{-\frac{\mu}{2\varepsilon}(t-t_0)} |u_0|, \\ |u(t) + H(\varepsilon) P(\varepsilon) u(t)| \leq K_2 e^{-\frac{\mu}{2\varepsilon}(t-t_0)} |u_0|, \ t \geq t_0, \end{gathered} \tag{27}$$

де $K_1 > 0$, $K_2 > 0$. Із оцінок (27) випливає принцип зведення для дослідження стійкості нульового розв'язку системи (1).

**Теорема 4.** *Нехай справджується умова* (2). *Тоді при достатньо мадих $\varepsilon$ нульовий розв'язок системи* (1) *стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий) тоді і тільки тоді, коли нульовий розв'язок рівняння*

$$\dot{w} = (A + BH) w$$

*стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий).*

Застосування теореми 4 на практиці є затрудненим, оскільки потрібно знайти точний вираз для матриці $H$, що визначає інтегральний многовид повільних змінних.

Розглянемо можливість використання наближеного інтегрального многовиду в задачі про стійкість нульового розв'язку системи (1).

Поряд із рівнянням

$$\dot{w} = (A + BH) w \tag{28}$$

розглянемо рівняння

$$\dot{w} = (A + BH_0) w, \tag{29}$$

де $H_0$ – нульовий член асимптотичного розкладу інтегрального многовиду (3), який визначається співвідношенням $H_0 = -D^{-1}C$.

Нехай нульовий розв'язок рівняння (29) експоненціально стійкий, тобто фундаментальна матриця цього рівняння $W(t, t_0)$ задовольняє нерівність

$$|W(t, t_0)| < Ke^{-\beta(t-t_0)}, \beta > 0, K > 0, t \geq t_0. \tag{30}$$

Перепишемо рівняння (28) у вигляді

$$\dot{w} = (A + BH_0)\, w + B\,(H - H_0)\, w.$$

Із нерівності (30) та співвідношення

$$w(t) = W(t, t_0)\, w(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} W(t, s)\, B\,(H - H_0)\, w(s)\, ds$$

випливає оцінка

$$|w(t)| \leq Ke^{-\beta(t-t_0)}\, |w(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{t} Ke^{-\beta(t-s)} M\, |H - H_0|\, |w(s)|\, ds. \tag{31}$$

Із зображення (23) дістаємо, що існує таке $\overline{\varepsilon}$, що для всіх $0 < \varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$ має місце оцінка

$$|H - H_0| < \frac{\beta}{2KM}.$$

Тоді оцінку (31) можна переписати у вигляді

$$|w(t)| \leq Ke^{-\beta(t-t_0)}\, |w(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\beta}{2} e^{-\beta(t-s)}\, |w(s)|\, ds. \tag{32}$$

Домножимо (32) справа на $e^{\beta(t-t_0)}$

$$e^{\beta(t-t_0)}\, |w(t)| \leq K\, |w(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\beta}{2} e^{\beta(s-t_0)}\, |w(s)|\, ds. \tag{33}$$

Застосовуючи до (33) нерівність Гронуолла-Беллмана, отримаємо

$$e^{\beta(t-t_0)}\, |w(t)| \leq K\, |w(t_0)|\, e^{\frac{\beta}{2}(t-t_0)},$$

$$|w(t)| \leq K\, |w(t_0)|\, e^{-\frac{\beta}{2}(t-t_0)}. \tag{34}$$

Отже, нульовий розв'язок рівняння (28) експоненціально стійкий при $0 < \varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$.

З нерівності (34) випливає наступна теорема.

**Теорема 5.** *Нехай нульовий розв'язок системи, виродженої для* (1) *(при* $\varepsilon = 0$*) і укороченого рівняння* $\dot{y} = Dy$ *експоненціально стійкі. Тоді при достатньо малих* $\varepsilon$ *нульовий розв'язок вихідної системи* (1) *також експоненціально стійкий.*

## 4 Reference style

### Список літератури

[1] Strygin V.V., Sobolev V.A. Razdelenie dvizhenij metodom integral'nyh mnogoobrazij. Moscow:Nauka, 1988. (in Russian)

[2] Voropaeva N.V., Sobolev V.A. Konstruktivnyy metod rasshchepleniya nelineynykh singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh system. Differentsial'nyye uravneniya. 1995, 31 (4), 569-578. (in Russian)

[3] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system. Syst. and Contr. Left. 1984, 5, 169-179. DOI: 10.1016/S0167-6911(84)80099-7

[4] Gol'dshteyn N.V., Sobolev V.A. Kachestvennyy analiz singulyarno vozmushchennykh sistem. Novosibirsk, 1988. (in Russian)

[5] Sobolev V.A. Decomposition of linear singularly perturbed systems. Acta Math. Hung. 1987, 4 (3-4), 365-376. DOI: 10.1007/BF01950998.

[6] Cherevko I.M. Rozsheplennia liniinyh singuliarno zburenyh dyferencial'no-funkcional'nyh rivnian. Dop. NAN Ukrainy, 2002, 6, 32-36. (in Ukrainian)

[7] Sel's'kyy S.S., Cherevko I.M. Intehral'ni mnohovydy ta rozshcheplennya system liniynykh synhulyarno zburenykh rivnyan' z dvoma malymy parametramy. Naukovyy visnyk Chernivets'koho nats. un-tu, seriya "Matematyka 2011, 1 (3), 104-107. (in Ukrainian)

[8] Voropaeva N.V., Sobolev V.A. Geometricheskaya dekompozitsiya singulyarno vozmushchennykh sistem. Moscow: Fizmatlit, 2009. (in Russian)

[9] Schepakina E.A., Sobolev V.A., Mortell M.P. Singular Perturbations: Introduction to system order reduction methods with applications. Berlin: Springer, 2014.

[10] Cherevko I.M., Osypova O.V. Asymptotic decomposition of linear singularly perturbed multiscale systems. Miskolc Mathematical Notes, 2015, 16 (2), 729-745. DOI: 10.18514/MMN.2015.1627

[11] Bogolyubov N.N. O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoy fizike. L'vov: Izd-vo AN USSR, 1945. (in Russian)

*Надійшло 19.12.2019*

---

Osypova O.V., Cherevko I.M. *On splitting and stability of linear stationary singularly perturbed differential equations*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 2 (2019), 76–85.

In this paper we are studying the problem of linear stationary singularly perturbed systems by the method of integral manifolds. The method of integral manifolds was proposed by M.M. Bogolyubov and J.O. Metropolsky for the study of perturbed nonlinear systems. This method was especially effective in the study of singularly perturbed systems of differential equations.

The first studies of integral manifolds and bounded solutions of linear singularly perturbed systems of differential equations were carried out in the works of Y.S. Baris and V.I. Fodchuk. The qualitatively new results in the study of singularly perturbed problems by the method of integral manifolds were obtained by V.A. Sobolev. Using integral manifolds of fast and slow variables, a variable replacement is built that transforms the input system to two independent subsystems. The results of V.A. Sobolev were generalized in the works of I.M. Cherevko and O.V. Osypova for the case of linear singularly perturbed systems with several small parameters.

The purpose of this work is to research methods of investigation of linear singularly perturbed stationary systems. An explicit form of non-degenerate replacement of variables is obtained, which splits the input system into two independent subsystems. The initial conditions were split and the principle of construction was established to study the stability of the zero solution. The possibility of using a zero approximation of the integral manifold of slow variables for investigating the stability of the solution of the input singularly perturbed system is considered.