Лопотко О.В.

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСІВ K_B

Отримані необхідні і достатні умови багатозначного продовження парних додатно визначених функцій з сегменту на всю піввісь. Описані всі такі продовження.

Ключові слова і фрази: інтегральне представлення, позитивно визначені функції.

Національний лісотехнічний університет, Львів, Україна
e-mail: *Lopotko1304@gmail.com*

Вступ

Проблема продовження додатно визначених функцій $k(x)$ зі скінченного інтервалу на всю вісь розглядалась у працях М.Г.Крейна [3], Ю.М. Березанського [1, 2]. У [8] на основі методики [6] одержано необхідні і достатні умови однозначного продовження парних додатно визначених функцій з інтервала на всю вісь. У даній статті використовуючи методику В.П.Потапова, К.В.Ковалишина [5, 6, 7], одержано необхідні і достатні умови багатозначного продовження парних додатно визначених функцій з сегмента на піввісь. Дано опис у всіх таких продовжень.

1 Постановка задачі

1.1. Функція $S(x)(0 \leq x \leq 2b; \quad b < +\infty)$ належить класу K_b якщо вона неперервна породжує додатно визначене ядро за формулою

$$K(x, y) = \frac{1}{2}\left[S(x+y) + S(|x-y|)\right] \ (0 < x, y < b).$$

Будемо використовувати "точкове" і "інтегральне" означення додатно визначенного ядра $K(x, y)$. Нагадаємо, що ядро $K(x, y) \quad (0 < x, y \leq l; \quad l < b, b \leq +\infty)$ додатно визначене, якщо для $\forall 0 \leq x_1, x_2, ..., x_n \leq l$ і довільних комплексних чисел $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ має місце нерівність

$$\sum_{k,j=1}^{n} K(x_j, x_k)\xi_j\overline{\xi_k} \geq 0$$

УДК 5179
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34860.

© Лопотко О.В., 2019

Ядро $K(x,y)(0 \le x,y \le l; \quad l < b, \quad b \le +\infty)$ додатно визначене, якщо

$$(K\varphi,\varphi) = \int_0^l \int_0^l K(x,y)\varphi(y)\overline{\varphi(x)}dydx \ge 0, \quad \forall\varphi \in L^2\left[0,l\right],$$

де

$$K\varphi = \int_0^l K(x,y)\varphi(y)dy \quad ((f,g) = \int_0^l f(x)\overline{g(x)}dx)$$

М.Г. Крейн [3] довів, що кожна функція $S(x) \in K_b$ допускає зображення

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\sqrt{t}xd\sigma(t), \tag{1.1}$$

де $d\sigma(t) \ge 0$ - міра, яка задовільняє умови

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2l'\sqrt{|t|}}d\sigma(t) < \infty \quad (\forall l' < l) \tag{2.1}$$

$$\int_0^{\infty} d\sigma(t) < \infty \tag{3.1}$$

І навпаки, кожна функція $S(x) \quad (0 \le x < 2b)$ яка допускає зображення (1.1) належить класу K_b.

2.1. З інтегралом (1.1) розглянемо асоціативну функцію

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z} \tag{4.1}$$

В наслідок умови (1.1) випливає що вона визначає пару функцій

$$W(z) = \begin{cases} W_1(z) & (Imz > 0) \\ W_2(z) & (Imz < 0) \end{cases}$$

голоморфних у верхній і нижній півплощинах які мають властивість

$$\frac{W(z) - W^*(z)}{z - \overline{z}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{|t-z|^2} \qquad Imz \ne 0$$

і для яких виконується співвідношення симетрії

$$W_1(z) = W_2^*(\overline{z}).$$

Функція $W(z)$ належить класу неванлиннових функцій. Тому можна використати схему В.П.Потапова [5, 6], в основі якої лежить теорія J-розтягування аналітичних матриць-функції. Для цього ми побудуємо основну матричну нерівність (ОМН) задачі для асоціативної функції $W(z)$ і покажемо що $W(z)$, яка задовільняє (ОМН) має інтегральне зображення (1.1), де $d\sigma(t)$ задовільняє умови (2.1) та (3.1) і породжує функцію

$$S(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{t}xd\sigma(t); \qquad S(x) \text{ належить класу } K_b.$$

Обгрунтуємо існування розв'язку (ОМН). Розглянемо випадок багатозначного зображення (1.1); обговоримо аналітичні властивості резельвентної матриці і критерій багатозначності.

2 Основна матрична нерівність (ОМН)

Нехай $S(x) \in K_b$ і

$$S_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{t}x d\sigma(t)$$

одне із інтегральних зображень $S(x)$,

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z} \text{ — асоціативна функція}$$

Тоді має місце:

Теорема 1. *Асоціативна функція $W(z)$ інтегрального зображення $S_0(x)$ функції $S(x) \in K_b$ задовільняє наступну матричну нерівність*

$$H = \begin{pmatrix} (K\varphi,\varphi) & (\cos\sqrt{z}\cdot W(z) - \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-u)}{\sqrt{z}} S_0(u)du, \varphi) \\ * & \frac{W(z)-W^*(z)}{z-\overline{z}} \end{pmatrix} \geq 0 \text{ (ОМН)}$$

(символ * означає елемент a_{21}, спряжений елементу a_{12}) яка виконується для всіх $\varphi \in L^2[0,l]$ і всіх $z : Imz \neq 0$.

Доведення. Щоб перевірити це твердження достатньо обчислити елементи матриці H.

Дійсно,

$$(K\varphi,\varphi) = \int_o^l \int_0^l \frac{1}{2}\left[S_0(x+y) + S_0(|x-y|)\right]\varphi(y)\overline{\varphi(x)}dydx =$$
$$= \int_0^l \int_0^l \{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left[\cos\sqrt{t}(x+y) + \cos\sqrt{t}(x-y)\right]\varphi(y)\overline{\varphi(x)}\}dydx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_0^l \cos\sqrt{t}x\cdot\overline{\varphi(x)}dx)(\int_0^l \cos\sqrt{t}y\varphi(y)dy)d\sigma(t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\cos\sqrt{x,\varphi}|^2 d\sigma(t) \tag{1.2}$$

$$\cos\sqrt{z}x\cdot W(z) - \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-u)}{\sqrt{z}} S_0(u)du = \cos\sqrt{z}x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{t-z} -$$
$$-\int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-u)}{\sqrt{z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\sqrt{t}ud\sigma(t)du \int_{-\infty}^{+\infty}\{\cos\sqrt{z}x\cdot\frac{1}{t-z} -$$
$$-\frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}\int_0^x \cos\sqrt{z}u\cdot\cos\sqrt{t}udu + \frac{\cos\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}\int_0^x \sin\sqrt{z}u\cos\sqrt{t}udu\}d\sigma(t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\{\cos\sqrt{z}x\cdot\frac{1}{t-z} + (\cos\sqrt{z}x - \cos\sqrt{z}x)\cdot\frac{1}{t-z}d\sigma(t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{z}x}{t-z}\}d\sigma(t) \tag{2.2}$$

$$\frac{W(z)-W^*(z)}{z-\overline{z}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{|t-z|^2}. \tag{3.2}$$

Тому в наслідок (1.2)-(3.2) нерівність (ОМН) буде мати вигляд

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix} |(\cos\sqrt{z}x,\varphi)|^2 & (\cos\sqrt{t}x,\varphi)\frac{1}{t-z} \\ * & \frac{1}{|t-z|^2}\end{pmatrix}d\sigma(t)\geq 0$$

Теорема 1. доведена. □

Розглянемо тепер квадратичну форму

$$[1,\overline{\alpha}]H\begin{bmatrix}1\\ \alpha\end{bmatrix}\geq 0 \tag{4.2}$$

у якій покладемо

$$\varphi(x)=\psi(x)-\beta\frac{\sin\sqrt{z}(l-x)}{\sqrt{z}}$$
$$\alpha=\beta\cos\sqrt{z}l$$

тоді, після перегрупування лівої частини (4.2) прийдемо до перетвореної основній матричної нерівності (ПОМН).

Теорема 2. *Якщо умови теореми 1 виконуються, то асоціативна функція $W(z)$ задовільняє перетворенну матричну нерівність*

$$\left[\begin{array}{c|l} (K\varphi,\varphi) & \frac{1}{2}(\cos(l+x)\sqrt{z}\cdot W(z)-\int_0^{l+x}\frac{\sin\sqrt{z}(l+x-t)}{\sqrt{z}}\cdot S_0(t)dt,\varphi) \\ & -\frac{1}{2}(\cos(l-x)\sqrt{z}\cdot W(z)-\int_0^{l-z}\frac{\sin\sqrt{z}(l-x-t)}{\sqrt{z}}S_0(t)dt,\varphi) \\ \hline & \frac{1}{z-z}\{W(z)\cdot\cos^2\sqrt{z}l-W^*(z)\cdot\cos^2\sqrt{\overline{z}}l\}+ \\ * & +\frac{1}{2(z-\overline{z})}\int_0^{2l}\{\frac{\sin\sqrt{z}(t-2l)}{\sqrt{z}}-\frac{\sin\sqrt{\overline{z}}(t-2l)}{\sqrt{\overline{z}}}\}S_0(t)dt \end{array}\right]\geq 0 \text{ (ПОМН)}$$

яка виконується для всіх $\varphi\in L^2[0,l]$ і всіх $z: Imz\neq 0$.

Оскільки $W(z)$ задовільняє (ОМН), то отримуємо асимптотичне співвідношення

$$w(z)\cos\sqrt{z}x-\int_0^x\frac{\sin\sqrt{z}(x-u)}{\sqrt{z}}S(u)du\to 0,$$

Якщо $z=iy(-iy)\to\infty, y>0,\forall x: 0<x<2b$, то $W(z)$ має зображення (4.1) із $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{1+|t|}<\infty$, тобто $d\sigma(t)$ належить класу (r). Крім того, у нашому випадку на міру $d\sigma(t)$. на півосях, накладаються жорсткіші обмеження, а саме:

Теорема 3. *Нехай дійснозначна, неперервна на $[0,l]$ функція $S(x)$ і $d\sigma(t)\geq 0$ міра класу (r?), яка зосереджена на $(-\infty,-1]$ такі, що для функції $w(z)$:*

$$w(z)=\int_{-\infty}^{-1}\frac{d\sigma(t)}{t-z} \tag{5.2}$$

хоча б на одному промені $arg z = \Theta$ $(0 < \Theta < \frac{\Pi}{2})$ *виконується асимптотика*

$$\cos\sqrt{z}l \cdot w(z) - \int_0^l \frac{\sin\sqrt{z}(l-u)}{\sqrt{z}} S(u)du = 0(1) \qquad (arg z = \Theta, |z| \to \infty) \tag{6.2}$$

Тоді міра $d\sigma(t)$ *задовільняє умову*

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{l'\sqrt{|t|}} d\sigma(t) < \infty \quad \forall (l' < l) \tag{7.2}$$

Доведення. Нехай

$$F(u) = \int_{-\infty}^{-1} \cos l\sqrt{t} \cdot e^{u\sqrt{|t|}} d\rho(t) \tag{8.2}$$

Інтеграл в (8.2) збігається у півплощині $Reu < l$. Нагадаємо, що $d\sigma(t)$ належить класу (r) і визначає у цій площині аналітичну функцію $F(u)$. Утворимо тепер Г-контур, обмежений променями $arg z = \Theta$ і $arg z = -\Theta$. оскільки $S(x)$ дійснозначна функція то асимптотика (6.2) буде виконуватися і на промені $arg z = -\Theta$, тобто функція $w_l(z) = \cos\sqrt{z}l \cdot w(z) = \int_0^l \frac{\sin\sqrt{z}(l-u)}{\sqrt{z}} S(u)du$ аналітична на контурі Г задовільняє умову

$$w_l(z) = 0(1) \qquad (x \in \Gamma, |z| \to \infty) \tag{9.2}$$

Тепер розглянемо інтеграл

$$G(u) = \frac{1}{2\Pi} \int_\Gamma w_l(z) e^{u\sqrt{|z|}} dz \tag{10.2}$$

Внаслідок (9.2) інтеграл зберігається рівномірно на кожному компакті всередині кута $|argu - \Pi| < \frac{\Pi}{2} - \Theta$, тому функція $G(u)$ співпадає з функцією $F(u)$ усередині кута $|arg(u+l) - \Pi| < \frac{\Pi}{2} - \Theta$. Дійсно, для точок u які належать цьому куту інтеграл (10.2) можна розкласти на суму двох інтегралів

$$G(u) = \frac{1}{2\Pi} \int_\Gamma (\int_0^l \frac{\sin\sqrt{z}(l-u)}{\sqrt{z}} S(u)du) \cdot e^{u\sqrt{|z|}} dz.$$

Для u які лежать усередині зсунутого кута ціла функція змінної z

$$\int_0^l \frac{\sin\sqrt{z}(l-u)}{\sqrt{z}} S(u)du.$$

$e^{u\sqrt{|z|}}$ прямує до нуля, коли $|z| \to \infty$, $-\Theta < arg z, \Theta$. Тому

$$\frac{1}{2\Pi} \int_\Gamma (\int_0^l \frac{\sin\sqrt{z}(l-u)}{\sqrt{z}} S(u)du) \cdot e^{u\sqrt{|z|}} dz = 0 \qquad \text{і}$$

$$G(u) = \frac{1}{2\Pi} \int_\Gamma w(z) \cos\sqrt{z}l e^{u\sqrt{|z|}} dz \qquad (|arg(u+l) - \Pi| < \frac{\Pi}{2} - \Theta)$$

Підставляючи вираз (5.2) для $w(z)$ і змінюючи порядок інтегрування, це можливо завдяки теореми Фубіні,одержимо що $G(u) = \int_{-\infty}^{-1} d\rho(t) \cdot (\frac{1}{2\Pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos\sqrt{l \cdot e^{u\sqrt{|z|}}}}{t-z} dz)$.

Внутрішній інтеграл дорівнює $\cos\sqrt{t}l \cdot e^{u\sqrt{|t|}}$, і тому $G(u) = \int_{-\infty}^{-1} \cos\sqrt{t}le^{u\sqrt{|t|}} d\rho(t)$. На основі порівняння з (8.2) одержимо, що $G(u) = F(u)$ $(|arg(u+l) - \Pi| < \frac{\Pi}{2} - \Theta)$. Таким чином, інтеграл (10.2) дає аналітичне продовження функції $F(u)$ в області D, яка є об'єднанням півплощини $Reu < l$ і кута $|argu - \Pi| < \frac{\Pi}{2} - \Theta$. Звідси випливає оцінка (7.2), якщо покласти $d\sigma(t) = \cos\sqrt{t}l \cdot d\rho(t)$. **Теорема 3. доведена.** □

Теорема 4. *Якщо голоморфна у верхній півплощині функція $W(z)$ задовільняє матричну нерівність (ОМН) і міра $d\sigma(t)$ класу r, яка зосереджена на $[0, +\infty)$, то*

$$W(z) = \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-z} \qquad (\int_0^\infty d\sigma(t) < \infty) \tag{11.2}$$

і відповідний інтеграл

$$S(x) = \int_0^\infty \cos\sqrt{t}x d\sigma(t)$$

співпадає на $[0, b]$ із заданою ермітовою додатно визначеною функцією $S_0(x)$. Крім того, функція $W(z)$ продовжється, за симетрією у нижню півплощину.

Доведення. Розглянемо спрощену нерівність (ОМН) коли $\varphi = \delta(x - x_0)$ $(0 < x_0 < l)$, тоді одержимо:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}[S_0(0) + S_0(2x_0)] & \cos\sqrt{z}x_0 \cdot W(z) - \int_0^{x_0} \frac{\sin\sqrt{z}(x_0-u)}{\sqrt{z}} S_0(u)du \\ * & \frac{W(z)-W^*(z)}{z-\overline{z}} \end{pmatrix} \geq 0$$

де $W(z) \in r$. Те що функція $W(z)$ належить класу r_0 випливає з нерівності

$$|\cos\sqrt{z}x_0 W(z) - \int_0^{x_0} \frac{\sin\sqrt{z}(x_0-u)}{\sqrt{z}} S_0(u)du|^2 \leq \frac{1}{2}[S_0(0) + S_0(2x_0)] \cdot$$
$$\cdot \frac{W(z) - W^*(z)}{z - \overline{z}} \leq C \cdot \frac{W(z) - W^*(z)}{z - \overline{z}} \qquad (C > 0, Imz > 0, S_0 \text{ - обмежена}) \tag{12.2}$$

Якщо покладемо

$$z = iy \quad (y > 0), \quad yW(iy) = X, \quad y\int_0^{x_0} \frac{\sin\sqrt{iy}(x_0-u)}{\sqrt{iy}} S_0(u)du = A, \text{ то посилюючи}$$

нерівність (12.2) одержимо

$$|X - A|^2 \leq \frac{C}{2}(X^* - X)$$
$$X * X + (A * + \frac{C}{2})X - X^*(A + \frac{C}{2}) + (A * + \frac{C}{2})(A + \frac{C}{2}) \leq (A * + \frac{C}{2})(A + \frac{C}{2}) - A \cdot A^*,$$
$$|X - (A + \frac{C}{2}|^2 \leq |A + \frac{C}{2}|^2, \quad |x| \leq 2(|A| + \frac{C}{2}).$$

Оскільки

$$|A| \leq \int_0^{x_0} y \frac{\sin\sqrt{iy}(x_0)}{\sqrt{iy}} |S_0(u)|du \leq C, \text{ то}$$

$|yW(y) \leq 3C|$, а тому див.[4] $W(z)$ належить класу r_0 і має зображення (11.2).

Теорема 4. доведена. □

Із теорем 3,4 випливає твердження обернене до теореми 1.

Теорема 5. *Якщо $W(z)$ задовільняє (ОМН), то*

1) *$W(z)$ допускає наступне інтегральне зображення*
$W(z) = \int \frac{d\sigma(t)}{t-z}$ $\quad (\int_{-\infty}^{0} e^{2l'\sqrt{|t|}} d\sigma(t) < \infty; \forall l' < l; \int_{0}^{\infty} d\sigma(t) < \infty)$.

2) *в інтервалі $(0 < x < 2b)$ існує інтеграл $S(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{t}x d\sigma(t)$.*

3 Уніфікація (ОМН). Тотожність Сахновича [5]

1.3. Введемо такі позначення:

$$b_z(x) = \cos\sqrt{z}x$$

$$C_z(x) = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-u)}{\sqrt{z}} \cdot S(u)du$$

$$(Kf)(x) = \int_0^l \frac{1}{2}[S(x+t) + S(x-t)]f(t)dt, \qquad (\forall l < b).$$

Тоді (ОМН) набуває вигляду:

$$\begin{pmatrix} K\varphi, \varphi & (b_z(x)W(z) - c_z(x), \varphi) \\ * & \frac{W(z)-W^*(z)}{z-\overline{z}} \end{pmatrix} \geq 0 \text{ (ОМН)}$$

$(\forall\varphi \in L^2[0,l], \quad \forall l < b; \quad \forall z : Imz \neq 0)$.

Ця форма запису (ОМН) дозволяє використати схему В.П.Потапова [5, 6] для побудови розв'язку (ОМН) у нашому випадку.

2.3 Зазначимо, що для знаходження розв'язку основної матричної нерівності суттєву роль відіграє тотожність Сахновича [5]:

$$(A_z Kg, \varphi) - (A_z^* Kg, \varphi) = (gb_z(x))(c_z, \varphi) - (gc_z(x))(b_z(x), \varphi)$$

яка виконується для $\forall g, \varphi \in l^2[0,l], \quad \forall l < b$.

Тут $A_z g$ обмежений інтегральний оператор, який у задачі визначається рівностями:

$$(A_z g)(x) = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-t)}{\sqrt{z}} g(t)dt \quad ((A_z^* g)(x) = -\int_x^l \frac{\sin\sqrt{z}(x-t)}{\sqrt{z}} g(t)dt)$$

Дія $A_z g$ на функціях b_ξ, c_ξ аналогічні співвідношенням Гільберта

$$A_z b_z(x) = -\frac{b_z - b_\xi}{z-\xi}, \quad A_z c_\xi(x) = -\frac{c_z - c_\xi}{z-\xi}$$

При знаходженні розв'яку (ОМН) розрізняються два випадка: випадок виродженого ядра $(K\varphi, \varphi) \geq 0$ і випадок невиродженого ядра $(K\varphi, \varphi) > 0$. За допомогою обчислень перевіряємо існування розв'язку (ОМН) для виродженого ядра. У другому випадку використовуємо апроксимацію нашої задачі дискретним аналогом.

Основна матрична нерівність задачі про інтегральне зображення функції класу K_b завжди має розв'язок.

4 Випадок багатозначного зображення

1.4. При обговорення питання побудови розв'язку (ОМН) обмежимося існування строгої додатності інформаційного блоку

$$(K\varphi, \varphi) > 0, \quad \forall\varphi \neq 0, \quad \varphi \in L^2[0, l], \quad l < b.$$

Відомо див.[6] що у випадку строгої додатності інформаційного блоку $S_n > 0$ зрізана степенева проблема має безліч розв'язків, причому основну роль у побудові загального розв'язку відіграє матриця-функція

$$H(\xi, \eta) = \frac{\xi - \eta}{i} \begin{bmatrix} c_\xi \\ -b_\xi \end{bmatrix} S_n^{-1}[c_\eta - b_\eta] = \frac{\xi - \eta}{i} \begin{bmatrix} C_\xi \\ -B_\xi \end{bmatrix} S_n[C_\eta - B_\eta]$$

де $S_n B_\xi = b_\xi$, $S_n C_\xi = c_\xi$.

Спроба перенести цю конструкцію на випадок нашої задачі наштовхується на труднощі пов'язані з континуальною природою задачі.

Оператор

$$(Kf)(x) = \int_0^l K(x, y) f(t) dt$$

цілком неперервний, а обернений K^{-1} визначений на щільної у $L^2[0, l]$ області. Більше того, рівняння

$$KB_z = \cos\sqrt{z}x; \quad KC_z = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x - u)}{\sqrt{z}} S(u) du \tag{1.4}$$

не мають розв'язку $L^2[0, l]$.

Але строга додатність оператора K дозволяє розширити оператор K. Суть цього розширення полягає в тому що вводиться нова метрика

$$(f, g)_- = (Kf, g)$$

в просторі $H = L^2[0.l]$ і після поповнення континуальними послідовностями. Коли одержимо новий гільбертовий простір H_-.

Тоді можна показати що, якщо функція класу K_b має більше одного інтегрального зображення то рівняння (1.4) мають розв'язки в просторі H_- і конструкція матриці $H(\xi, \eta)$ може бути реалізоване; Якщо ж $S(x)$ допускає лише одне зображення то рівняння (1.4) не мають розв'язку. Таким чином отримуємо:

Теорема 6. *Якщо (ОМН) має два суттєво різних розв'язків, то вона має безліч розв'язків, які описуються дробово-лінійним перетворенням*

$$W(z) = [a(z)p(z) + b(z)q(z)][c(z)p(z) + d(z)q(z)]^{-1}$$

за допомогою голоморфної в $Imz > 0$ неособливої неванлиновської пари $\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}$.

Матриця коефіцієнтів (резольвентна матриця) дробово-лінійного перетворення

$$A(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}$$

визначається наступними співвідношеннями:

$$A(z) = T(z, z_0)M_0, \quad Imz_0 \neq 0, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(z, z_0) = I + H(z, z_0)S; \quad H(z, z_0) = \frac{z - z_0}{i} \begin{bmatrix} (KC_{z_0}, C_{\overline{z}}) & (KB_{z_0}, C_{\overline{z}}) \\ (KC_{z_0}, B_{\overline{z}}) & (KB_{z_0}, B_{\overline{z}}) \end{bmatrix}$$

$$J - M_0^{*-1} J M_0^{-1} = -JH(\overline{z_0}, z)J = \frac{z - \overline{z}}{i} \begin{bmatrix} (B_{z_0}, b_{z_0}(x)) & (-C_{z_0}, b_{z_0}(x)) \\ (-B_{z_0}, c_{z_0}(x)) & (C_{z_0}, c_{z_0}(x)) \end{bmatrix},$$

отже, будується за двома розв'язками рівнянь

$$KB_{z_0} = \cos\sqrt{z_0}x; \quad KC_{z_0} = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z_0}(x-t)}{\sqrt{z_0}} \cdot S(t)dt.$$

Резольвентна матриця $A(z)$ має наступні властивості:

1) *$A(z)$ є голоморфною матрицею-функцією (точніше парою функцій) в області $Imz > 0$, $Imz < 0$.*

2) *$A(z) - J$ – розтягування у верхній півплощині, J – стискування у нижній півплощині*

$$A^*(z)JA(z) - J \geq 0 \quad (Imz > 0)$$

$$A^*(z)JA(z) - J \leq 0 \quad (Imz < 0)$$

3) *Значення матриці-функції $A(z)$ в $(Imz > 0)$, $(Imz < 0)$ зв'язане зі співвідношенням дзеркальної симетрії*

$$JA^*(\overline{z})J = A_{-1}(z), \quad Imz < 0$$

У наслідок цього є критерій багатозначності інтегрального зображення функцій класу K_b:

Теорема 7. *Якщо неперервна на сегменті $[0, 2l]$ $\quad (\forall l \leq b)$ функція $S(x) \in K_b$ така, що оператор*

$$(Kf)(x) = \int_0^l K(x,t)f(t)dt$$

строго додатний у просторі $L^2[0, l]$, то для її багатозначності інтегрального зображення необхідно, щоб для всіх z виконувалась умова:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(\cos\sqrt{z}x, \varphi_j(x))|^2 < +\infty$$

і достатньо, щоб вона виконувалася хоча б в одній недійсній точці

$$\xi_0(Im\xi_0 \neq 0).$$

Тут λ_j – фундаментальні числа, $\varphi_j(x)$ - фундаментальні функції оператора.

Список літератури

[1] Березанський Ю.М. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, УМЖ, Київ, 1959 - 11 №1 - 16-24 ст.

[2] Березанський Ю.М. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова думка, Київ, 1965.

[3] Крейн М.Г. *Об одном общем методе розложения положительно определенных ядер на элементарные произведения.* Докл. АН СССР, 1950, (6), 1125 – 1128. (in Russian)

[4] Кац И.С., Крейн М.Г. R-функции-аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя - Доп.I к кн. Ф.Аткинсона "Дискретные и непреривные граничные задачи". Мир, Москва, 1968.

[5] Ковалишина И.В., Потапов В.П. Интегральное представление эрмитово положительных функций. 1981.

[6] Ковалишина И.В. *Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач* Изв. АН СССР. 1983,(3), 455 – 497.(in Russian)

[7] Ковалишина И.В. *Интегральное представление функций класса K_a. Функциональный анализ.* Мижвузловский сборник научных трудов, Ульяновск, 1993, 27 – 33. (in Russian)

[8] Лопотко О. В. *Інтегральні зображення функцій класів $K_{n,a}$ і $K_{нn,a}$.* Вісник Київського Національного університету імені Т. Шевченко, Київ, 2015, 1(33) - 5–7. (in Ukrainian)

Список літератури

[1] Berezanskyy Y.M. *Expansion on the eigen functions of the selfajoint operators.* Ukr. Math. Jour. 1959, **11** (1), 16–24.

[2] Berezansky Y.M. Expansion on the eigen functions. Naukova dumka, Kyiv, 1965.

[3] Crein M.G. *On one general method on the expansion of positive definite nuclers into elementary products.* Dokl. AN SSSR 1946, **53** (1), 3–6.

[4] Katz I.S., Crein M.G. R-functions-analytic functions, which are reflecting the upper half phone into itself. Book F. Atkinson 'Discrets amd continious problems' Peace, Moscow, 1968.

[5] Kovalyshyna I.V., Potapov V.P. The integral part presentation of hermitian-positive functions. Moscow, 1981.

[6] Kovalyshyna I.V. *Analytical theory of a class on interpolation problems.* News AN SSSR 1983, **47** (3), 455–497.

[7] Kovalyshyna I.V. Integral represantation of functions to class K_a. Funcrional analysis, issue 34. Ulyanovsk, 1993.

[8] Lopotko O.V. *The integral represantation of $K_{n,a}$ i $K_{H,a}$ classes functions.* Bulletin of Kyiv National University 2015, **1** (33), 5–7.

Надійшло 02.01.2019

Lopotko O.V. *Integral representation of functions of K_b class*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 2 (2019), 48–58.

The problem of the continuation of positively definite functions $k(x)$ of the finite integral on all axis was examined in the works of M.G. Crein and Y.M. Berezanskyy. O.V. Lopotko using the method Y.M. Berezanskyy, the necessary and sufficient conditions of simple continuation of even positively definite functions at intervals at all axis, were obtained. In present article the sum of M.G. Crein and Y.M. Berezanskyy is considering from j-theory's position. the advantage of such approach is that j-theory gives the only universal method of solution the sums such as the problem of moments both discrete and continental. V.P. Potapov expressed a fruitful concession according to which all information of sum about of integral representation of functions is contained in some correlation, which is constructed according to the facts of sum, and so called 'Basic Matrix Inequality' (BMI). With the help of j-theory, using BMI the integral representations of functions of P, K_a classes were integrated in the works of V.P. Potapov, I.V. Kovalyshyna.In this present work, using the j-theory the integral representation even positively definite functions $k(x)$ which are belong to K_b class has been investigating. For this aim the 'associational' $w(z)$ function is connected with $k(x)$ function and the BMI is building. In the BMI we find the aspect of the integral representation for $k(x), w(z)$, then we are coming to find a solution of our sum. As the unification BMI outwardly doesn't differ from principal matrix inequalities of such well-known classic discrete interpolation sums such as Nevolinno-Picka, Caratheodora's problem, the moments and such continental sums as the M.G. Crein's sum about the integral representation of hermitian-positive functions, naturally, the possibility of using the V.P. Potapov's scheme for the construction of solution of BMI and our sum, is arised. Analysing BMI, firstly, we are answering the question: Does though one solution of BMI exist? Or does one representation of function $K_{b's}$ class exist? Answering these questions we have to consider two cases: the case of particular information of $k > 0$ block and the case of not particular information $k > 0$ block. In the first case we are directly calculating the solution of BMI. In the second case we are approximating our sum by discrete analogy. That's why we are proving that BMI always has a solution. Now, let's choose two essentially different solutions on the condition that the information block is $k > 0$ and let's prove that BMI has multitude solutions, and its full totality has been describing by fractional-linear transformation with the help of Nevanlinovsky's not special pair. At last, we are proving the criterion of the significant integral representation of functions of K_b class.