Городецький В.В., Мартинюк О.В.

ПРИНЦИП ЛОКАЛІЗАЦІЇ ДЛЯ ФОРМАЛЬНИХ РЯДІВ ФУР'Є, ПІДСУМОВАНИХ МЕТОДАМИ ТИПУ ГАУССА-ВЕЙЄРШТРАССА

Для формальних рядів Фур'є 2π-періодичних гіперфункцій та ультрарозподілів, підсумованих методами типу Гаусса-Вейєрштрасса, встановлено властивість локалізації (аналог принципу локалізації Рімана).

Ключові слова і фрази: ряди Фур'є, властивість локалізації, узагальнені періодичні функції, перетворення типу Гаусса-Вейєрштрасса.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *alfaolga1@gmail.com (Мартинюк О.В.)*

Вступ

Для рядів Фур'є сумовних на відрізку $[0, 2\pi]$ функцій добре відомий принцип локалізації Рімана: якщо $\{f_1, f_2\} \subset L_1[0, 2\pi]$ збігаються на інтервалі $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, то на кожному відрізку $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset (a, b)$ різниця їхніх рядів Фур'є рівномірно збігається до нуля. Для розподілів цей принцип вже не виконується. Наприклад, δ-функція Дірака збігається з нулем на довільному проміжку, який не містить точку 0, але її ряд Фур'є $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx}$ не збігається рівномірно до нуля на довільному такому проміжку. Однак, виконання принципу локалізації (властивості локалізації) є більш прирордним для рядів Фур'є, підсумованих певними регулярними методами, оскільки за допомогою таких рядів зображаються розв'язки багатьох задач математичної фізики та аналізу. Так, наприклад, розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в одиничному крузі дається у вигляді ряду Фур'є граничної функції, підсумованого методом Абеля-Пуассона.

Якщо перейти до функцій багатьох змінних, то принцип локалізації вже не справджується і для сумовних функцій. Для його виконання оптрібно накладати додаткову умову гладкості [1]. Але, як доведено М.Л. Горбачуком і В.І. Горбачук в [2], для рядів Фур'є, підсумованих методом Абеля-Пуассона та Гаусса-Вейєрштрасса, принцип локалізації виконується в класі ультрарозподілів Жевре $G'_{\{\beta\}}$, де $\beta > 1$. У праці І.Г. Ізвєкова [3] аналогічний принцип встановлений вже у класі гіперфункцій $G'_{\{\beta\}}$ у випадку сумування

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55, 46T30.

кратних рдів Фур'є сферичними абелевими середніми. У цій праці методом, відмінним від методу, запропонованого в [3], доводиться, що принцип локалізації справджується у просторі гіперфункцій для кратних рядів Фур'є, підсумованих методами типу Гаусса-Вейєрштрасса.

1 Простори основних та узагальнених періодичних функцій

Нехай $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний простір, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ – його елементи, $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультиіндекс, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $Q_n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_j \le 2\pi,\ j \in \{1, \dots, n\}\}$ – куб в $\mathbb{R}^n$, $H = L_2(Q_n)$ – гільбертів простір 2π-періодичних в $\mathbb{R}^n$ вимірних за Лебегом та інтегровних з квадратом функцій.

Позначимо через Φ множину всіх тригонометричних поліномів

$$P(x) = \sum_{-s \le |k| \le s} c_k(P) e^{ikx}, x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}^n,$$

над полем комплексних чисел. Нехай Φ_r, $r \in \mathbb{Z}_+$, – сукупність усіх поліномів з Φ, степінь яких не перевищує r. Тоді $\Phi = \bigcup\limits_r \Phi_r$. Отже, топологія в просторі Φ – топологія індуктивної границі просторів Φ_r. У просторі Φ визначені і є неперервними операції диференціювання та згортки

$$(P * Q)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q_n} P(t) Q(x - t) dt, \quad \{P, Q\} \subset \Phi.$$

Очевидно також, що Φ лежить щільно в $L_2(Q_n)$.

Символом Φ' позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Елементи простору Φ' називатимемо 2π-періодичними узагальненими функціями. Операція диференціювання у просторі Φ' визначається звичайним способом за допомогою формули

$$\langle D^l f, P \rangle = (-1)^{|l|} \langle f, D^l P \rangle, \quad f \in \Phi', P \in \Phi, l \in \mathbb{Z}_+^n$$

(тут $\langle f, P \rangle$ – позначає дію функціонала $f \in \Phi'$ на довільний поліном $P \in \Phi$). Операція диференціювання неперервна в Φ', оскільки неперервною є така операція у просторі Φ. Отже, кожний елемент простору Φ' є нескінченно диференційовним у Φ'.

Операція згортки в просторі Φ' визначається за допомогою співвідношення

$$\langle f * g, P \rangle = \langle f, \langle g(y), P(x, y) \rangle \rangle, \quad P \in \Phi.$$

Вона завжди має сенс, оскільки

$$\langle g(y), P(x + y) \rangle = \left\langle g(y), \sum_{-s \le |k| \le s} c_k(P) e^{i(k, x+y)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{-s \le |k| \le s} c_k(P) \langle g, e^{i(k,x)} \rangle \in \Phi.$$

Крім того, правильною є формула [4]:

$$D^l(f*g) = D^l f * g = f * D^l g, \quad \{f,g\} \in \Phi', l \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Зіставлення

$$\Phi \ni Q \to f_Q \in \Phi' : \langle f_Q, P\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{Q_n} Q(x)P(x)dx, \quad \forall P \in \Phi,$$

визначає неперервне вкладення простору Φ у Φ'.

Рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції $f \in \Phi'$ називається ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f)e^{i(k,x)}$, де $c_k(f) = \langle f, e^{-i(k,x)}\rangle$ – коефіцієнти Фур'є функції f.

Для довільної узагальненої 2π-періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі Φ'. Навпаки, послідовність частинних сум довільного тригонометричного ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{i(k,x)}$ збігається в Φ' до деякого елемента $f \in \Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [4]. Отже, простір Φ' можна розуміти як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{i(k,x)}$.

Зауважимо також, що коефіцієнти Фур'є узагальненої функції $f*g \in \Phi'$ пов'язані з коефіцієнтами Фур'є узагальнених функцій $\{f,g\} \subset \Phi'$ так:

$$c_k(f*g) = \langle f*g, e^{-i(k,x)}\rangle = \langle f, \langle g(y), e^{-i(k,x+y)}\rangle\rangle =$$

$$= \langle f, \langle g(y), e^{-i(k,y)}\rangle e^{-i(k,x)}\rangle = c_k(f)\cdot c_k(g), \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Звідси випливає комутативність та асоціативність операції згортки в Φ', тобто Φ' – згорткова алгебра з одиницею, роль якої виконує δ-функція Дірака.

Простори $G_{\{\beta\}}$ та $G'_{\{\beta\}}$. Простір $G_{\{\beta\}}$, $\beta > 0$, визначається як сукупність нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій, які задовольняють умову

$$\exists c>0\,\exists B>0\,\forall l \in \mathbb{Z}_+^n\,\forall x \in \mathbb{R}^n: \ |D^l\varphi(x)| \le cB^{|l|}l_1^{l_1\beta}\dots l_n^{l_n\beta}$$

(сталі c, $B>0$ залежать від функції φ). Множина функцій $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, для яких справджуються вказані нерівності з фіксованою сталою B, утворює банахів простір $G_{\beta,B}$ відносно норми

$$\|\varphi\|_{\beta,B} = \max_{\substack{x\in Q_n\\ 0\le|l|<\infty}} \frac{|D^l\varphi(x)|}{B^{|l|}l_1^{l_1\beta}\dots l_n^{l_n\beta}}.$$

При цьому вкладення $G_{\beta,B_1} \subset G_{\beta,B_2}$, $B_1 < B_2$, є компактними [5] і $G_{\{\beta\}} = \bigcup\limits_{B>0} G_{\beta,B}$. При $\beta \le 1$ елементами простору $G_{\{\beta\}}$ є 2π-періодичні в $\mathbb{R}^n$ функції, які аналітично продовжується в $\mathbb{C}^n$ при $\beta<1$ або у область $|\mathrm{Im} z_r| \le c$, $i \in \{1,\dots,n\}$ при $\beta = 1$. При $\beta > 1$ в $G_{\{\beta\}}$ є фінітні функції.

Простір усіх лінійних неперервних функціоналів на $G_{\{\beta\}}$ зі слабкою збіжністю позначається символом $G'_{\{\beta\}} \equiv G'_{\{\beta\}}(Q)$. Його елементи при $\beta > 1$ називаються ультрарозподілами класу Жевре порядку β. Оскільки при $\beta > 1$ в основному просторі $G_{\{\beta\}}$ є фінітні функції, то для ультрарозподілів класу Жевре має зміст таке означення: функціонал $f \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, дорівнює нулеві в області $Q \subset Q_n$, якщо $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для довільної основної функції $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, носій якої лежить в Q.

Зауважимо, що оскільки простір $G_{\{1\}}$ складається з аналітичних 2π-періодичних в $\mathbb{R}^n$ функцій, то елементи простору $G'_{\{1\}}$ називаються аналітичними 2π-періодичними функціоналами або гіперфункціями. Для гіперфункції f також можна ввести поняття носія (supp$f$), хоча у просторі основних функцій $G_{\{1\}}$ фінітних функцій немає.

Нехай $\mathbb{K}$ – компактна множина в Q_n, а $G_{\{1\}}(\mathbb{K})$ – простір аналітичних на $\mathbb{K}$ функцій із стандартною топологією. В [5] встановлено, що носій гіперфункції $f \in G'_{\{1\}}$ міститься в $\mathbb{K}$, якщо f допускає продовження до лінійного неперервного функціонала $\hat{f}$, заданого на $G_{\{1\}}(\mathbb{K})$. Для неквазіаналітичного класу функцій $G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, умова supp$f \subset \mathbb{K}$ означає, що $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для довільної функції $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, яка рівна нулю на $Q_n \setminus \mathbb{K}$. Обидва означення носія для $f \in G'_{\{\beta\}}$ при $\beta > 1$ збігаються.

Відомо [4], що функції $e^{i(k,x)}$, $k \in \mathbb{Z}^n$, є власними функціями оператора $B = \sqrt{A^2}$, де A^2 – самоспряжений оператор, породжений в $L_2(Q_n)$ диференціальним виразом $-\Big(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}\Big)$; власними значеннями оператора B є числа $\lambda_k = \|k\|$, $k \in \mathbb{Z}^n$; при цьому елементи просторів $G_{\{\beta\}}$, $G'_{\{\beta\}}$ можна охарактеризувати за допомогою їхніх коефіцієнтів Фур'є так [4]:

а) для того, щоб 2π-періодична функція f належала до простору $G_{\{\beta\}}$, необхідно й досить, щоб

$$\exists c > 0\, \exists \mu > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}^n: \ \ |c_k(f)| \leq c \exp\{-\mu \|k\|^{1/\beta}\};$$

б) для того, щоб узагальнена 2π-періодична функція f належала до простору $G'_{\{\beta\}}$ необхідно й досить,щоб

$$\forall \mu > 0\, \exists c = c(\mu) > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}^n: \ \ |c_k(f)| \leq c \exp\{\mu \|k\|^{1/\beta}\}.$$

2 Перетворення типу Гаусса-Вейєрштрасса формальних тригонометричних рядів

Для ряду Фур'є

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f) e^{i(k,x)}, \quad c_k(f) = \langle f, e^{-i(k,x)} \rangle,$$

узагальненої функції $f \in \Phi'$ введемо перетворення

$$f_\gamma(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f) \exp\{i(k,x) - t\|k\|^\gamma\}, \quad t > 0,$$

яке будемо називати перетворенням типу Гаусса-Вейєрштрасса ряду Фур'є функції f. Якщо $\gamma = 1, 2$, то $f_1(\ln r, x)$, $0 < r < 1$, $f_2(t,x)$ – відповідно перетворення Абеля-Пуассона та Гаусса-Вейєрштрасса ряду Фур'є функції $f \in \Phi'$. Функція $\varphi_\gamma(t,x) = \exp\{-t\|x\|^\gamma\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, називається суматорною функцією вказаного методу.

Зауважимо, що $f_\gamma(t,x) = f * \Gamma_\gamma(t,x)$, де

$$\Gamma_\gamma(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \exp\{-t\|k\|^\gamma + i(k,x)\},$$

оскільки

$$c_k(f_\gamma) = c_k(f)e^{-t\|k\|^\gamma} = c_k(f)c_k(\Gamma_\gamma) = c_k(f * \Gamma_\gamma),$$

при цьому, як випливає з твердження а) $\Gamma_\gamma(t,\cdot) \in G_{\{1/\gamma\}}$ при кожному $t > 0$. Якщо $f \in G'_{\{1/\gamma\}}$ або $f \in G'_{\{1\}}$, то правильним є таке зображення функції f_γ: $f_\gamma(t,x) = \langle f_\xi, \Gamma(t, x - \xi)\rangle$. Справді, внаслідок властивостей лінійності і неперевності функціонала f маємо,що

$$\langle f_\xi, \Gamma(t, x-\xi)\rangle = \Big\langle f_\xi, \lim_{s\to\infty} \sum_{-s\le\|k\|\le s} e^{-t\|k\|^\gamma} e^{i(k,x-\xi)} \Big\rangle =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \sum_{-s\le\|k\|\le s} \langle f_\xi, e^{-i(k,\xi)}\rangle e^{-t\|k\|^\gamma} e^{i(k,x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f) e^{-t\|k\|^\gamma} e^{i(k,x)} = f_\gamma(t,x).$$

Граничне значення функції f_γ при $t \to +0$ існує в просторі Φ', проте при виконанні певних обмежень на узагальнену функцію $f \in \Phi'$ має місце локальне покращення збіжності (властивість локалізації).

Теорема 1. *Якщо 2π-періодична гіперфункція f дорівнює нулеві в області $Q \subset Q_n$ (тобто* $\mathrm{supp} f \subset Q_n \setminus Q$*), то $f_\gamma(t,x) \to 0$ при $t \to 0+$ рівномірно на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$ ($\gamma \ge 1$).*

Доведення. Припустимо насамперед, що параметр $\gamma > 1$ і $\gamma \ne 2b$, $b \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1 \times \cdots \times \mathbb{K}_n$, $Q = Q'_1 \times \cdots \times Q'_n$, де $\mathbb{K}_j \subset Q'_j$, $j \in \{1,\dots,n\}$. Оскільки функціонал f лінійний, то правильним є співвідношення

$$f_\gamma(t,x) = t\langle f_\xi, t^{-1}\Gamma_\gamma(t, x-\xi)\rangle, \quad t > 0.$$

Згідно з означенням носія гіперфункції f, для доведення теореми досить встановити, що сім'я функцій

$$\Psi_{t,x,\gamma}(\xi) = t^{-1}\Gamma_\gamma(t, x-\xi)$$

обмежена в просторі $G_{\{1\}}(Q_n \setminus Q)$ рівномірно відносно t (для досить малих значень t) і $x \in \mathbb{K}$, тобто

$$|D_\xi^m \Psi_{t,x,\gamma}(\xi)| \le cB^{|m|} m_1^{m)1} \dots m_n^{m_n}, \quad m \in \mathbb{Z}_+^n,$$

де сталі c, $B > 0$ не залежать від t, x, ξ.

Нехай $G_\gamma(t,x)$ – обернене перетворення Фур'є суматорної функції, тобто

$$G_\gamma(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[\varphi_\gamma(t,\sigma)](x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[e^{-t\|\sigma\|^\gamma}](x).$$

Тоді, внаслідок формули сумування Пуассона кратних рядів Фур'є (див. [6, с. 281]) маємо співвідношення

$$\Gamma_\gamma(t, x-\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} G_\gamma(t, x-\xi+2\pi k). \tag{1}$$

Цей ряд при $t > 0$ і $x \in \mathbb{K}$ є аналітичною функцією по кожній змінній $\xi_i \in [0, 2\pi] \setminus Q'_j$, $j \in \{1,\dots,n\}$, оскільки, як було встановлено раніше, $\Gamma_\gamma(t,\cdot) \in G_{\{1/\gamma\}}$ при кожному

$t > 0$. За умовою $1/\gamma < 1$, то елементами такого простору є функції, аналітичні в Q_n. Візьмемо тепер область

$$G = \{z \in \mathbb{C}^n | z_j \in G_j, j \in \{1, \dots, n\}\},$$

яка містить $Q_n \setminus Q$, де G_j – обмежена область в $\mathbb{C}$, що містить $[0, 2\pi] \setminus Q'_j$, з гладкою межею ∂G_j, яка не перетинає $\mathbb{K}_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Тоді, внаслідок інтегральної формули Коші маємо, що

$$D_\xi^m \Gamma_\gamma(t, x - \xi) = \frac{m!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial G_1} \dots \int\limits_{\partial G_n} \frac{\Gamma_\gamma(t, x - z)}{(z - \xi)^{m+I}} dz, \xi \in Q_n \setminus Q.$$

(тут $m \in \mathbb{Z}_+^n$, $m! = m_1! \dots m_n!$, $I = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n})$). Звідси дістаємо, що

$$|D_\xi^m \Gamma_\gamma(t, x - \xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^n \frac{l_j \cdot m_j!}{A_j^{m_j + I}} \max_{z \in \partial G} |\Gamma_\gamma(t, x - z)|,$$

де l_j – довжина контура ∂G_j, $A_j = \inf |z_j - \xi_j|$, $z_j \in \partial G_j$, $\xi_j \in [0, 2\pi] \setminus Q'_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Для того, щоб здійснити оцінку $\max\limits_{z \in \partial G} |\Gamma_\gamma(t, x - z)|$, скористаємося формулою (1).

Із результатів, одержаних в [7], випливає оцінка

$$|G_\gamma(t, x)| \leq c_0 t \|x\|^{-(n+\gamma)}, \quad 0 < t < t_0, \|x\| \geq a > 0, \tag{2}$$

де стала $c_0 > 0$ залежить від t_0, a, γ, n. Оскільки $x \in \mathbb{K}$, $\xi \in Q_n \setminus Q$, то $\|x - \xi\| \geq a_0 > 0$, де a_0 – віддаль між межами компактів $\mathbb{K}$ і $Q_n \setminus Q$. Скориставшись (2), знайдемо, що

$$t^{-1} |\Gamma_\gamma(t, x - \xi)| \leq c_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|x - \xi + 2\pi k\|^{-(n+\gamma)} \leq c_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (a_0 + b_0 \|k\|^2)^{-(n+\gamma)/2} = M < \infty,$$

де $b_0 > 0$, стала M не залежить від t, x, ξ. Взявши до уваги неперервність $\Gamma_\gamma(t, x - z)$ за сукупністю змінних $t > 0$, $x \in \mathbb{K}$ і $z \in G$, підберемо область інтегрування так, щоб $t^{-1} |\Gamma_\gamma(t, x - z)| \leq M + 1$. Таким чином,

$$t^{-1} |D_\xi^m \Gamma_\gamma(t, x - \xi)| \leq c B^{|m|} m_1^{m_1} \dots m_n^{m_n},$$

де сталі c, $B > 0$ не залежать від t, x, ξ.

Якщо $\gamma = 2b$, $b \in \mathbb{N}$, то функція $G_{2b}(t, x)$, $(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^n$, задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{b-1} \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

і є цілою функцією аргументів x_1, …, x_n. При цьому, як випливає з результатів, одержаних у [8, 9], для її похідних правильними є оцінки

$$|D_x^m G_{2b}(t, x)| \leq c B^{|m|} \prod_{j=1}^n m_j^{m_j/(2b)} t^{-(n+|m|)/(2b)} \exp\{-c_0 \|x\|^q t^{1-q}\}, \tag{3}$$

де $m \in \mathbb{Z}_+^n$, $q = (2b)/(2b-1)$, c_0, c, $B > 0$. Тоді, зберігши ті самі позначення, що і у випадку $\gamma > 1$, $\gamma \neq 2b$, і скориставшись оцінкою (3), знайдемо, що

$$|D_\xi^m \Psi_{t,x,2b}(\xi)| \leq t^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |D_\xi^m G_{2b}(t, x-\xi+2\pi k)| \leq$$

$$\leq cB^m \prod_{j=1}^n L_j m_j^{m_j/(2b)} \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \exp(-\varepsilon_0 \|x-\xi+2\pi k\|^q t^{1-q}),$$

де $\varepsilon_0 \in (0, c_0)$ – фіксоване, а

$$L_j = \sup_{t\in[0,T]} (t^{-((1+m_j)n+2b)/(2bn)}) \exp\{-(c_0-\varepsilon)n^{-1}a_0^q t^{1-q}\}.$$

Безпосередньо знаходимо, що $L_j \leq A_0 B_0^{m_j} m_j^{m_j/q}$, де сталі A_0, B_0 залежать від n, b, a_0, ε_0. Якщо $0 < t_0 \leq T$, то скориставшись нерівностями

$$\exp\Big(-\frac{\alpha}{e}\|\xi\|^{1/\alpha}\Big) \leq \inf_s \frac{s^{s\alpha}}{\|\xi\|^s} \leq c\exp\Big(-\frac{\alpha}{e}\|\xi\|^{1/\alpha}\Big),$$

з [10, с. 204] дістанемо, що

$$\exp\{-\varepsilon_0\|x-\xi+2\pi k\|^q t^{1-q}\} \leq L^s s^{s/q}\|x-\xi+2\pi k\|^{-s} \leq L^s s^{s/q}(a_0^2+b_0\|k\|^2)^{-s/2}, k\in\mathbb{Z}_+^n,$$

де $L = t^{1/(2b)}(qe\varepsilon_0)^{-1/q}$, $b_0 > 0$. Візьмемо $s = n+1$. Тоді, врахувавши співвідношення $1/(2b)+1/q = 1$, прийдемо до оцінки

$$|D_\xi^m \Psi_{t,x,2b}(\xi)| \leq c_1(BB_0)^{|m|} m_1^{m_1}\dots m_n^{m_n},$$

де всі сталі не залежать від t, x, ξ.

Якщо $\gamma = 1$, то (див. [7])

$$G_1(t,x) = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)t(t^2+\|x\|^2)^{-(n+1)/2}.$$

Доведення теореми у цьому випадку здійснюється аналогічно.

Теорема доведена. □

Теорема 2 (властивість локалізації). *Якщо 2π-періодичний ультрарозподіл $f \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, збігається в області $Q \subset Q_n$ з неперервною 2π-періодичною функцією g, то $f_\gamma(t,x) \to g(x)$ при $t \to +0$ рівномірно на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1 \subset Q$, де $\mathbb{K}_1$ – компактна множина в Q_n. Побудуємо функцію $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, з носієм в Q таку, що $\varphi = 1$ для $x \in \mathbb{K}_1$. Така функція існує, бо при $\beta > 1$ у просторі $G_{\{\beta\}}$ є фінітні функції. Оскільки $f - g = 0$ в Q, то $\varphi(f-g) = 0$ в Q, $(1-\varphi)f = 0$ на $\mathbb{K}_1$ і за доведеним у теоремі 1

$$\langle \varphi(f-g), \Gamma_\gamma(t, x-\xi)\rangle \to 0, \quad t\to+0,$$

$$\langle (1-\varphi)f, \Gamma_\gamma(t, x-\xi)\rangle \to 0, \quad t\to+0,$$

рівномірно відносно $x \in \mathbb{K}$. Але

$$f_\gamma(t,x) = \langle \varphi(f-g), \Gamma_\gamma(t,x-\xi)\rangle + \langle (1-\varphi)f, \Gamma_\gamma(t,x-\xi)\rangle + \langle \varphi g, \Gamma_\gamma(t,x-\xi)\rangle$$

і

$$\langle \varphi g, \Gamma_\gamma(t,x-\xi)\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(\varphi g)\exp(-t\|k\|^\gamma + i(k,x)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(\varphi g)e^{i(k,x)} = (\varphi g)(x), \quad t\to +0,$$

рівномірно на $\mathbb{K}$. Оскільки $\varphi g = g$ на $\mathbb{K}$, то звідси дістаємо, що $f_\gamma(t,x)\to g(x)$ при $t\to +0$ рівномірно відносно $x\in\mathbb{K}$.

Зауваження 1. *Як приклад застосування теореми 2 розглянемо періодичну задачу Коші для рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}, \tag{4}$$

з початковою умовою

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \tag{5}$$

де $f \in G'_{\{1/2\}} = G'_{\{1/2\}}[0,2\pi]$*. Під розв'язком задачі* (4), (5) *розумітимемо функцію* $u(t,x)$*, диференційовну за змінною* t *і нескінченно диференційовну за змінною* x*, яка задовольняє рівняння* (4) *та співвідношення* (5) *у тому розумінні, що* $u(t,\cdot)\to f$ *при* $t\to+0$ *у просторі* $G'_{\{1/2\}}$ *(тобто в слабкому сенсі). Як відомо [2], розв'язок задачі Коші* (4), (5) *дається формулою*

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{-tk^2+ikx}, \quad c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle, \tag{6}$$

тобто u *збігається з перетворенням Гаусса-Вейєрштрасса ряду Фур'є початкової узагальненої функції* f*. Отже, властивість локалізації для ряду* (6) *стосовно розв'язку задачі Коші* (4), (5) *формулюється так: якщо початкова функція* f *є елементом простору ультрарозподілів* $G'_{\{\beta\}}\subset G'_{\{1/2\}}$*, де* $\beta>1$*,* g *– неперервна* 2π*-періодична на* $\mathbb{R}$ *функція і* $f=g$ *на* $(a,b)\subset[0,2\pi]$*, то розв'язок* u *задачі* (4), (5) *володіє властивістю локалізації (властивістю локального покращення збіжності):* $u(t,x)\to g(x)$ *при* $t\to+0$ *рівномірно на довільному відрізку* $[c,d]\subset(a,b)$*.*

Наприклад, якщо $f=\delta$, де δ – дельта-функція Дірака, то

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\{-tk^2+ikx\},$$

де $\delta\in G'_{\{\beta\}}$, $\beta>1$, $\delta=0$ на довільному проміжку $(a,b)\subset[0,2\pi]$, який не містить точку 0. Отже, $u(t,x)\to 0$ при $t\to+0$ рівномірно на довільному відрізку $[c,d]\subset[0,2\pi]$, який не містить точку 0.

Список літератури

[1] *Alimov Sh. A., Ilin V.A, Nykyshyn E.M. The questions of convergence of multiple trigonometric series and spectral decompositions.* Uspekhi mat. nauk, 1976. **3**, (6). 28–33. (in Russian)

[2] *Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L. The trigonometric series and generalized periodic functions.* Dokl. AN SSSR, 1981. **257**, (4). 799–803. (in Russian)

[3] *Izvekov I.G. The Riemann localization principle for Fourier series in spaces of generalized functions.* Dokl. AN USSR, Ser. A. 1986. **2**. 5–8. (in Russian)

[4] *Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L. The boundary value of solutions of differential-operator equations.* Naukova Dumka, Kyiv, 1984. (in Russian)

[5] *Gorbachuk V.I. On the solvability of the Dirichlet problem for a second-order differential-operator equation in different spaces.* Pryamye i obratnye zadachi operatornoy teorii differentsialnyh operatorov. Kyiv, 1985. 8–22. (in Russian)

[6] *Steyn I, Weis G. Introduction to harmonic analysis in Euclidean spaces.* Mir, Moskva. 1974. (in Russian)

[7] *Drin Ya.M. Study of an class of parabolic pseudodifferential operators in spaces of Helder functions.* Dop. AN URSR. Ser. A 1974. **1**. 19–21. (in Ukrainian)

[8] *Eidelman S.D. Parabolic systems.* Nauka, Moskva. 1964. (in Russian)

[9] *Gorodetskiy V.V., Zhytaryuk I.V. On the solutions of the Cauchy problem for equations of parabolic type with degeneration.* Dokl. AN URSR. Ser. A. 1989. **12**. 5–8. (in Russian)

[10] Gelfand I.M., Shylov G.E. The spaces of main and generilized functions. Fizmatgiz, Moskva, 1958. (in Russian)

Надійшло 25.11.2019

Gorodetskyi V.V., Martynyuk O.V. *The localization principle for formal Fourier series summarized by Gauss-Weierstrass method*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 2 (2019), 30–38.

For formal series identifying linear continuous functionals given on the space of trigonometric polynomials and summarized by Gauss-Weierstrass methods, we prove an analog of the Riemann localization principle: if $\{f_1, f_2\} \subset L_1[0, 2\pi]$ are converge at the interval $(a, b) \subset [0, 2\pi]$ then at each segment $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset (a, b)$ their difference of Fourier series uniformly converges to zero.

Generally speaking, the principle of localization for Fourier series of 2π-periodic generalized functions is not fulfilled. When studying various problems of mathematical physics and analysis, it is often used not the Fourier series itself, but the series summarized by one or another regular method, so it is natural to fulfill the principle of localization for such series. For example, the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a unit circle is represented by the Fourier series of the boundary function summarized by the Abel-Poisson method; the solution of the Cauchy periodic problem for the equation of thermal conductivity and the initial condition in the space of generalized periodic functions is treated as a formal Fourier series of the initial function summarized by the Gauss-Weierstrass method.

The paper investigates multiple Fourier series of periodic hyperfunctions and ultradistributions.