Симотюк М. М.

ЗАДАЧА З ДВОМА КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Запроваджено класи H, H_δ, S_δ лінійних систем рівнянь із частинними похідними. Ці класи характеризуються нетривіальністю та наявністю степеневих оцінок знизу для певних симетричних многочленів від коренів характеристичних рівнянь даних систем. На підставі метричного підходу та теорії симетричних многочленів показано, що до запроваджених класів належать майже всі системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами (стосовно міри Лебега у просторі, натягнутому на коефіцієнти системи).

Досліджено задачу з двома кратними вузлами за виділеною змінною t та умовами періодичності за іншими координатами $x_1, \ldots, x_p$ для лінійних систем рівнянь із частинними похідними, які належать до описаних класів. Встановлено умови розв'язності задачі у просторах гладких вектор-функцій із експоненційним спаданням вектор-коефіцієнтів Фур'є. Доведено, що оцінки знизу для малих знаменників, достатні для існування розв'язку задачі, виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега та фрактальної міри Гаусдорфа) значень другого вузла інтерполяції для лінійних систем з класів H, H_δ, S_δ.

Ключові слова і фрази: двоточкова задача, системи рівнянь із частинними похідними, малі знаменники, метричний підхід.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна (Симотюк М. М.)
e-mail: *quaternion@ukr.net (Симотюк М. М.)*

1. Вступ

Задачі з багатоточковими умовами для диференціальних рівнянь та їх систем активно досліджуються в останні десятиріччя. Інтерес до їх вивчення зумовлений як потребою побудови загальної теорії багатоточкових задач, так і тим, що такі задачі є моделями багатьох фізичних процесів. У роботах [1, 2, 3, 9, 11, 28, 29] переважно виділені випадки коректно поставлених багатоточкових задач для окремих класів рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь. Проте багатоточкові задачі для загальних рівнянь із частинними похідними в обмежених областях є, взагалі, некоректними, а питання про їх розв'язність у багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників [4, 16], яка полягає у тому, що знаменники коефіцієнтів рядів,

УДК 517.95, 511.42
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35G15.

якими зображуються розв'язки цих задач, можуть ставати як завгодно малими, що спричиняє розбіжність вказаних рядів.

У працях [5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 33] для подолання негативного впливу малих знаменників на збіжність рядів-розв'язків багатоточкових задач використано метричний підхід [4, 16] та результати метричної теорії чисел [6]. Це дозволило встановити розв'язність багатоточкових задач з простими вузлами інтерполяції для рівнянь із частинними похідними та їх систем для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених зі значень вузлів інтерполяції та коефіцієнтів рівнянь.

Поряд із цим, недостатньо вивченими залишаються багатоточкові задачі з кратними вузлами інтерполяції для загальних безтипних систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Це зумовлено, очевидно, складною нелінійною структурою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків таких задач, та відсутністю ефективних підходів для встановлення оцінок знизу цих знаменників. Розробці вказаних питань присвячена дана робота.

У роботі запроваджено класи $H, H_\delta,\ S_\delta$ ($\delta \in \mathbb{R}$) систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Ці класи характеризують наявність певних діофантових властивостей у симетричних многочленів, пов'язаних із такими системами. За допомогою метричного підходу та теорії симетричних многочленів доведено твердження, які вказують, що до класів $H, H_{\delta_1},\ S_{\delta_2}$ (із належно вибраними показниками δ_1, δ_2) належать майже всі системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами (стосовно міри Лебега у просторі, натягнутому на коефіцієнти системи). Встановлено умови коректної розв'язності задачі з локальними двоточковими умовами за виділеною змінною та умовами періодичності за рештою координат для систем рівнянь, які належать до запроваджених класів. Доведено, що оцінки знизу для малих знаменників, достатні для існування розв'язку задачі з двома кратними вузлами, виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега та фрактальної міри Гаусдорфа) значень другого вузла інтерполяції, якщо система належить до описаних класів. Відзначимо, що дана стаття доповнює дослідження роботи [24], у якій розглянуто задачу з двома кратними вузлами для систем рівнянь із частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання.

Зауважимо, що для випадку необмежених за просторовими координатами областях класи єдиності двоточкових задач для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними встановлено у роботах [30, 31, 32], при цьому використано диференціально-символьний метод відокремлення змінних [13].

2. Основні позначення. Формулювання задачі

Нехай Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $Q_p^T = (0,T) \times \Omega_p$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$; $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_p$; $D_x = \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$; $(t,x) = (t, x_1, \ldots, x_p) \in Q_p^T$; $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$; $W^\gamma_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, — простір, отриманий поповненням простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x)=\sum\varphi_k\exp(ik,x)$ за нормою

$$\|\varphi(x);W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\|=\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}|\varphi_k|^2(1+|k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|k|^{\gamma})};$$

$C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ — простір функцій $u(t,x)=\sum\limits_{|k|\geq 0}u_k(t)\exp(ik,x)$, $u_k(t)\in C^n[0,T]$, $k\in\mathbb{Z}^p$, таких, що при фіксованому $t\in[0,T]$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j\equiv\sum\limits_{|k|\geq 0}u_k^{(j)}(t)\exp(ik,x)$, $0\leq j\leq n$, належать до простору $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$; норму в просторі $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ задаємо формулою

$$\|u(t,x);C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})\|=\sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j};W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\right\|;$$

$\overline{W}^{\,m,\gamma}_{\alpha,\beta}(\alpha,\beta\in\mathbb{R},\gamma>0)$ — простір вектор-функцій $\vec{\varphi}=\mathrm{col}(\varphi^1,\ldots,\varphi^m)$ таких, що $\varphi^j\in W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$, $j=1,\ldots,m$, з нормою

$$\|\vec{\varphi}(x);\overline{W}^{\,m,\gamma}_{\alpha,\beta}\|=\max_{1\leq j\leq m}\|\varphi^j(x);W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\|;$$

$C^n([0,T];\overline{W}^{\,m,\gamma}_{\alpha,\beta})$ — простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x)=\mathrm{col}(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x))$ таких, що $u^j(t,x)\in C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, $j=1,\ldots,m$, з нормою

$$\|\vec{u}(t,x);C^n([0,T];\overline{W}^{\,m,\gamma}_{\alpha,\beta})\|=\max_{1\leq j\leq m}\|u^j(t,x);C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})\|.$$

Розглядаємо задачу про знаходження розв'язку $\vec{u}(t,x)=\mathrm{col}(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x))$ лінійної системи рівнянь із частинними похідними

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},D_x\right)\vec{u}(t,x)\equiv\sum_{j=0}^{n}A_j(D_x)\frac{\partial^j\vec{u}(t,x)}{\partial t^j}=\vec{0},\ (t,x)\in Q_p^T, \tag{1}$$

який справджує такі двоточкові умови

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^{j-1}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0}=\vec{\varphi}_j(x),\ j=1,\ldots,r,\ x\in\Omega_p,\\[2ex] \left.\dfrac{\partial^{j-1}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=t_1}=\vec{\varphi}_{r+j}(x),\ j=1,\ldots,n-r,\ x\in\Omega_p,\end{cases} \tag{2}$$

де $1\leq r<n$, $0<t_1\leq T$, $A_j(\xi)=\|a^j_{q,r}(\xi)\|^m_{q,r=1}$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_p)$, $j=0,1,\ldots,n$, — квадратні матриці розміру $m\times m$, елементи $a^j_{q,r}(\xi),q,r=1,\ldots,m$, $j=0,1,\ldots,n-1$, яких є многочленами від $\xi_1,\ldots,\xi_p$ степеня не вищого, ніж N, $N\in\mathbb{N}$, з комплексними коефіцієнтами вигляду

$$a^j_{q,r}(\xi)=\sum_{|s|\leq N}a^{j,s}_{q,r}\xi_1^{s_1}\ldots\xi_p^{s_p},\ a^{j,s}_{q,r}\in\mathbb{C},\ s=(s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}^p_+,\ |s|\leq N, \tag{3}$$

$A_n(\xi)$ — одинична матриця розміру $m\times m$; $\vec{\varphi}_j(x)=\mathrm{col}(\varphi^1_j(x),\ldots,\varphi^m_j(x))$, $j=1,\ldots,n$.

При дослідженні задачі (1), (2) будемо використовувати такі позначення:

- $l(\lambda,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, — визначник матриці $L(\lambda,k)$;

- $l_{1,r}(\lambda,k)$, $r=1,\dots,m$, $k\in\mathbb{Z}^p$, — алгебричне доповнення визначника матриці $L(\lambda,k)$, що відповідає викресленим першому рядку та r-ому стовпцю; зауважимо, що для визначників $l(\lambda,k)$, $l_{1,r}(\lambda,k)$, $r=1,\dots,m$, $k\in\mathbb{Z}^p$, справедливими є такі розвинення:

$$l(\lambda,k)=\lambda^{mn}+B_1(k)\lambda^{mn-1}+\ldots+B_{mn}(k), \tag{4}$$

$$\begin{gathered} l_{1,r}(\lambda,k)=\delta_{1,r}\lambda^{mn-n}+C_{1,r}(k)\lambda^{mn-n-1}+\ldots+C_{mn-n,r}(k),\\ r=1,\dots,m, \end{gathered} \tag{5}$$

де

$$B_j(k)=\sum_{\substack{0\le l_1\le n,\dots,0\le l_m\le n,\\ l_1+\ldots+l_m=mn-j}}\det\|a_{q,r}^{l_q}(k)\|_{q,r=1}^{m},\quad j=1,\dots,mn, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} C_{j,r}(k)=(-1)^{r-1}\sum_{\substack{0\le l_1\le n,\dots,0\le l_{r-1}\le n,\\ 0\le l_{r+1}\le n,\dots,0\le l_m\le n,\\ l_1+\ldots+l_{r-1}+l_{r+1}+\ldots+l_m=mn-n-j}}\det\|a_{q,s}^{l_q}(k)\|_{s=2,\dots,m}^{q=1,\dots,r-1,r+1,\dots,m},\\ j=1,\dots,mn-n,\quad r=1,\dots,m, \end{gathered} \tag{7}$$

- $\lambda_1(k),\dots,\lambda_{mn}(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, — корені рівняння

$$l(\lambda,k)=0; \tag{8}$$

- N_j, $j=1,\dots,mn$, — степінь $B_j(k)$ як многочлена від $k_1,\dots,k_p$;

$$\gamma=\max_{1\le j\le mn}\{N_j/j\}; \tag{9}$$

зауважимо, що $N_j\le mN$, $j=1,\dots,mn$, $\gamma\le mN$;

- відомо (див. розділ 5, §7 у [26]), що скінченними є числа

$$\begin{gathered} M_1=\max_{1\le j\le mn}\sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\left\{\frac{|\lambda_j(k)|}{1+|k|^\gamma}\right\},\ M_2=\max\left\{0;\max_{1\le j\le mn}\sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\left\{\frac{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}{1+|k|^\gamma}\right\}\right\},\\ M_3=-\min\left\{0;\min_{1\le j\le mn}\inf_{k\in\mathbb{Z}^p}\left\{\frac{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}{1+|k|^\gamma}\right\}\right\}, \end{gathered} \tag{10}$$

тому для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$|\lambda_j(k)|\le M_1\left(1+|k|^\gamma\right),\ j=1,\dots,mn, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \max_{t\in[0,T]}|\exp(\lambda_j(k)t)|\le\widetilde{M}_2\exp\left(M_2T|k|^\gamma\right),j=1,\dots,mn,\widetilde{M}_2=\exp(M_2T),\\ \max_{t\in[0,T]}|\exp(\lambda_j(k)t)|\ge\widetilde{M}_3\exp\left(-M_3T|k|^\gamma\right),j=1,\dots,mn,\widetilde{M}_3=\exp(-M_3T); \end{gathered} \tag{12}$$

- $\vec{h}_q(k),k\in\mathbb{Z}^p$, — перший стовпець матриці $L^*(\lambda_q(k),k)$, яка є приєднаною до матриці $L(\lambda_q(k),k)$, $q=1,\dots,mn$:

$$\vec{h}_q(k)\equiv\operatorname{col}(h_q^1(k),\dots,h_q^m(k))=\operatorname{col}(l_{1,1}(\lambda_q(k),k),\dots,l_{1,m}(\lambda_q(k),k)),\ q=1,\dots,mn;$$

- $\vec{H}_q(k) \equiv \mathrm{col}(H_q^1(k), \ldots, H_q^{mn}(k)) \in \mathbb{C}^{mn}$, $q = 1, \ldots, mn$, — вектор
$$\mathrm{col}\Big(\vec{h}_q(k), \lambda_q(k)\vec{h}_q(k), \ldots, \lambda_q^{n-1}(k)\vec{h}_q(k)\Big);$$

- $C(mn, q)$, $1 \le q \le mn$, — множина всіх наборів $(i_1, \ldots, i_q)$, складених з натуральних чисел $i_1, \ldots, i_q$ таких, що $1 \le i_1 < \ldots < i_q \le mn$; для набору $\omega = (i_1, \ldots, i_q) \in C(mn, q)$ символом $\mathrm{set}\,\omega$ позначатимемо множину $\{i_1, \ldots, i_q\}$;

- $\Lambda_\omega(k) \equiv \lambda_{i_1}(k) + \ldots + \lambda_{i_q}(k)$, де $\omega = (i_1, \ldots, i_q) \in C(mn, q)$, $1 \le q \le mn$;

- означимо функції $H(k)$, $S(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, такими рівностями:
$$H(k) \equiv \det(\vec{H}_1(k), \ldots, \vec{H}_{mn}(k)), \tag{13}$$
$$S(k) \equiv \prod_{\sigma,\omega \in C(mn, mn-mr), \sigma \ne \omega} (\Lambda_\sigma(k) - \Lambda_\omega(k)), \tag{14}$$

- $h_\omega(k)$, $\omega = (i_1, \ldots, i_{ml}) \in C(mn, ml)$, $1 \le l \le n-1$, — визначник, який отримується з визначника $H(k)$ викреслюванням перших ml рядків та ml стовпців, номери яких складають множину $\mathrm{set}\,\omega = \{i_1, \ldots, i_{ml}\}$.

3. Класи систем рівнянь з діофантовими умовами H, H_δ, S_δ

Запровадимо класи систем рівнянь (1), які справджують певні діофантові умови H, H_{δ_1}, S_{δ_2}, а також встановимо, що до цих класів належать майже всі системи рівнянь (1) (стосовно міри Лебега у просторі, натягнутому на коефіцієнти рівнянь).

Означення 1. *Будемо говорити, що система* (1) *справджує умову H, якщо*
$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \quad H(k) \ne 0. \tag{15}$$

Зауваження 1. *Із формули* (13) *випливає, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ корені рівняння* (8) *є простими для системи* (1)*, яка справджує умову H. Справді, якщо для деякого $k^0 \in \mathbb{Z}^p$ і деяких j, q, $j \ne q$, справджується рівність $\lambda_j(k^0) = \lambda_q(k^0)$, то визначник $H(k^0)$ має два однакових стовпці $\vec{H}_j(k^0)$, $\vec{H}_q(k^0)$, а, отже, дорівнює нулеві. Це суперечить виконанню умови H.*

Означення 2. *Будемо говорити, що система* (1) *справджує умову H_δ, $\delta \in \mathbb{R}$, якщо для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність*
$$|H(k)| > (1 + |k|)^{-\delta}. \tag{16}$$

Означення 3. *Будемо говорити, що система* (1) *справджує умову S_δ, $\delta \in \mathbb{R}$, якщо для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність*
$$|S(k)| > (1 + |k|)^{-\delta}. \tag{17}$$

Наведемо приклади систем, для яких щойно введені умови виконуються, а також приклади систем, для яких ці умови не виконуються.

Приклад 1. *Нехай у системі* (1)

$$A_j(D_x) = \begin{pmatrix} a^j_{1,1}(D_x) & a^j_{1,2}(D_x) & \ldots & a^j_{1,m}(D_x) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$A_0(D_x) = \begin{pmatrix} a^0_{1,1}(D_x) & a^0_{1,2}(D_x) & \ldots & a^0_{1,m-1}(D_x) & a^0_{1,m}(D_x) \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a^j_{1,r}(D_x) = \alpha^j_{1,r} b^{nr-j}(D_x)$, $r = 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $b(D_x)$ *— диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами, а числа* $\alpha^j_{1,r}$, $r = 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *є такими, що рівняння*

$$\lambda^{mn} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{m} \alpha^j_{1,r} \lambda^{j+n(m-r)} = 0$$

має різні корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$. *Тоді корені* $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{mn}(k)$ *характеристичного рівняння* (8) *можна занумерувати так, щоб виконувалися рівності* $\lambda_j(k) = \mu_j b(k)$, $j = 1, \ldots, mn$. *У даному випадку перший стовпець матриці, яка є приєднаною до матриці* $L(\lambda_q(k), k)$, $q = 1, \ldots, mn$, *має вигляд* $h_q(k) = col\,(\lambda_q^{n(m-1)}(k), \ldots, \lambda_q^n(k), 1)$. *Тоді*

$$\vec{H}_q(k) = col\Big(\lambda_q^{n(m-1)}(k), \ldots, 1, \lambda_q^{n(m-1)+1}(k), \ldots, \lambda_q(k), \lambda_q^{nm-1}(k), \ldots, \lambda_q^{n-1}(k)\Big), q = 1, \ldots, mn.$$

Із (13) *дістаємо, що в даному випадку визначник* $H(k)$ *з точністю до знаку є визначником Вандермонда чисел* $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{mn}(k)$, *тобто*

$$H(k) = \pm \prod_{mn \geq j > q \geq 1} (\lambda_j(k) - \lambda_q(k)) = \pm b^{n_2}(k) \prod_{mn \geq j > q \geq 1} (\mu_j - \mu_q), \tag{18}$$

де $n_2 = mn(mn-1)/2$. *Оскільки* $\mu_j \neq \mu_q$, $mn \geq j > q \geq 1$, *то з формули* (18) *випливає, що для даної системи умова* (15) *виконується тоді і тільки тоді, коли оператор* $b(D_x)$ *є таким, що* $b(k) \neq 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$. *Прикладом такого оператора є оператор*

$$b(D_x) = \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \beta_p \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - 1\right)^{n_1}, \quad n_1 \in \mathbb{N},$$

де $\beta_1, \ldots, \beta_p$ *— будь-які невід'ємні дійсні числа. Якщо при цьому всі* $\beta_1, \ldots, \beta_p$ *є додатними, то виконується нерівність* $|b(k)| \geq C(1 + |k|)^{2n_1}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *і тоді з формули* (18) *випливає істинність нерівності* (16) *для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\delta > -2n_1 n_2$, *тобто виконання умови* H_δ *для* $\delta > -2n_1 n_2$. *Якщо ж серед чисел* $\beta_1, \ldots, \beta_p$ *хоча б одне є нулем, то система з так вибраним оператором* $b(D_x)$ *справджує умову* H_δ *тоді і тільки тоді, коли* $\delta < 0$.

Розглянемо тепер оператор $b(D_x)$ *наступного вигляду*

$$b(D_x) = \left(-i\beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \ldots - i\beta_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{n_1}, \quad n_1 \in \mathbb{N},$$

де $\beta_1, \dots, \beta_p$ — раціонально незалежні [27] дійсні числа. Зауважимо, що якщо розглядувана система з так вибраним оператором $b(D_x)$ справджує умову H_δ, то $\delta \le (p-1)n_1 n_2$. Обгрунтуємо це твердження. Добре відомо (див. задачу 43 у [22, с. 67]), що нерівність

$$|\beta_1 k_1 + \ldots + \beta_p k_p| < \beta |k|^{1-p}, \quad \beta = 2\sum_{j=1}^{p} |\beta_j|,$$

має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_1, \dots, k_p$. Звідси та з формули (18) *дістаємо, що нерівність, протилежна до нерівності* (16), *виконується для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\delta > (p-1)n_1 n_2$, тому для таких значень δ система не може справджувати умову H_δ.*

Приклад 2. *Нехай у системі* (1) *диференціальні матриці $A_j(D_x)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, мають верхній трикутний вигляд*

$$A_j(D_x) = \begin{pmatrix} a^j_{1,1}(D_x) & a^j_{1,2}(D_x) & \dots & a^j_{1,m}(D_x) \\ 0 & a^j_{2,2}(D_x) & \dots & a^j_{2,m}(D_x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a^j_{m,m}(D_x) \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Легко перевірити, що тоді

$$l(\lambda, k) = \det \|L(\lambda, k)\| = \prod_{q=1}^{m} \Big(\lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a^j_{q,q}(k)\lambda^j\Big), \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

$$l_{1,1}(\lambda, k) = \prod_{q=2}^{m} \Big(\lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a^j_{q,q}(k)\lambda^j\Big), \quad l_{1,r}(\lambda, k) = 0, \quad r = 2, \dots, m, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ хоча б один серед коренів $\lambda_1(k), \dots, \lambda_{mn}(k)$ многочлена $l(\lambda, k)$ є коренем многочлена $l_{1,1}(\lambda, k)$: нехай для визначеності $l_{1,1}(\lambda_{q_0}(k), k) = 0$, $q_0 = q_0(k)$. Тоді $\vec{h}_{q_0}(k) = \vec{0}$, і, отже, $H(k) = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$. Таким чином, для розглядуваної системи умова H не виконується.

Приклад 3. *Розглянемо при $n = m = 2$ систему* (1), *у якій*

$$A_1(D) = \begin{pmatrix} a_1(1-\Delta) & b_1(1-\Delta)^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0(D) = \begin{pmatrix} a_2(1-\Delta)^2 & b_2(1-\Delta)^4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$ — p-вимірний лапласіан, а числа a_1, b_1, a_2, b_2 визначаються рівностями $a_1 = (\alpha - 1 - i)$, $b_1 = -\beta(\alpha-1) - i(2\alpha - 1)$, $a_2 = \beta - \alpha + i(\beta - \alpha + 1)$, $b_2 = \alpha\beta(1+i)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 0; 1\}$. У даному випадку множина коренів $\lambda_1(k), \lambda_2(k), \lambda_3(k), \lambda_4(k)$ рівняння (8) *співпадає з множиною $\{|k|^2+1, -\alpha(|k|^2+1), i(|k|^2+1), -i\beta(|k|^2+1)\}$, і тоді, як легко перевірити, нерівність* (17) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\delta > -2C_4^2(C_4^2 - 1) = -60$. Отже, дана система* (1) *справджує умову S_δ для всіх $\delta > -2C_4^2(C_4^2 - 1) = -60$. Зазначимо також, що розглядувана система справджує умову H_δ при $\delta > -12$ (це випливає з того, що визначник $H(k)$ з точністю до знаку є визначником Вандермонда чисел $\lambda_1(k), \lambda_2(k), \lambda_3(k), \lambda_4(k)$).*

Нехай

$$\vec{Y} \equiv \mathrm{col}(Y_1, \dots, Y_\nu) \equiv \mathrm{col}(a_{q,r}^{j,s}; |s| \le N, q, r = 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n-1) -$$

вектор розміру $\nu = nm^2\mu$ (де μ — кількість усіх розв'язків нерівності $s_1 + \ldots + s_p \le N$ у невід'ємних цілих числах $s_1, \dots, s_p$), складений з коефіцієнтів системи (1); при цьому порядок слідування коефіцієнтів $a_{q,r}^{j,s}$ у векторі $\vec{Y}$ визначається за правилом: $a_{q_1,r_1}^{j_1,\sigma}$, слідує за $a_{q,r}^{j,s}$, якщо перша відмінна від нуля серед різниць $j_1 - j$, $q_1 - q$, $r_1 - r$, $\sigma_1 - s_1, \dots, \sigma_p - s_p$ є додатною. Кожній системі (1) відповідає вектор $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, компонентами якого є виписані у вказаному порядку коефіцієнти $a_{q,r}^{j,s}$, $|s| \le N$, $q, r = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, цієї системи; і, навпаки, кожний вектор $\vec{Y} = \mathrm{col}\,(Y_1, \dots, Y_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$ задає систему вигляду (1), коефіцієнти $a_{q,r}^{j,s}$, $|s| \le N$, $q, r = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, якої визначаються вказаним способом за компонентами $Y_1, \dots, Y_\nu$.

Позначимо: $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\nu} M$ — міра Лебега в $\mathbb{C}^\nu$ вимірної множини $M \subset \mathbb{C}^\nu$; $\Pi_\nu(\rho) = \{\vec{z} = (z_1, \dots, z_\nu) \in \mathbb{C}^\nu : \max\limits_{1 \le j \le \nu} |z_j| \le \rho\}$ — ν-вимірний полікруг радіуса $\rho > 0$; $\widetilde{\Pi}_\nu(\rho)$ — множина тих векторів $\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho)$, для яких:

1) $a_{q,r}^{j,s} = 0$, $|s| \le N$, $q = 2, \dots, m$, $r = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n-1$,
2) $a_{q,r}^{0,s} = 0$, $1 \le |s| \le N$, $q = 2, \dots, m$, $r = 1, \dots, m$,
3) $a_{q,r}^{0,(0)} = 0$, $q = 2, \dots, m$, $r = 1, \dots, m$, $r \ne q - 1$,
4) $a_{q,q-1}^{0,(0)} = \rho$, $q = 2, \dots, m$;

Доведемо тепер, що множини векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, що задають системи (1), для яких виконуються запроваджені в означеннях 1, 2, 3 умови H, H_δ, S_δ є множинами повної міри Лебега (якщо показники δ належно вибрані).

Лема 1. *[23] Нехай $P(z_1, \dots, z_n)$ — відмінний від тотожного нуля многочлен від змінних $z_1, \dots, z_n$ з цілими коефіцієнтами і нехай $\alpha_s z_1^{s_1} \dots z_n^{s_n}$, $\alpha_s \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, — старший член (тобто одночлен, який стоїть на першому місці при лексикографічному впорядкуванні* [25]*) многочлена $P(z_1, \dots, z_n)$. Тоді для довільних $\varepsilon, \rho > 0$ та $s \ne (0)$*

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^n} \{\vec{z} \in \Pi_n(\rho) : |P(z_1, \dots, z_n)| \le \varepsilon\} \le C(s, \rho) \cdot \varepsilon^{2/(s_1 + \ldots + s_n)},$$

а для довільних $\varepsilon \in (0, 1)$, $\rho > 0$ і $s = (0)$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^n} \{\vec{z} \in \Pi_n(\rho) : |P(z_1, \dots, z_n)| \le \varepsilon\} = 0.$$

Теорема 1. *Множина тих векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, що задають системи (1), для яких не виконується умова H, має нульову міру Лебега в $\mathbb{C}^\nu$.*

Доведення. Із формул (5) випливають наступні зображення:

$$H_j^{m(q-1)+r}(k) = \sum_{l=0}^{mn-n} C_{l,r}(k) \lambda_j^{mn-n-l+q-1}(k), \;\; k \in \mathbb{Z}^p, \qquad j = 1, \dots, mn, \quad q, r = 1, \dots, n. \tag{19}$$

З формул (3), (7) видно, що коефіцієнти $C_{l,r}(k), l = 0, 1, \ldots, mn - n,\ r = 1, \ldots, n$, у зображеннях (19) є многочленами від $Y_1, \ldots, Y_\nu$ з цілими коефіцієнтами степеня не вищого, ніж $(m-1)$. Тоді із формул (13), (19) та елементарних властивостей визначника випливає, що $H(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, можна подати у вигляді

$$H(k) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{mn}),\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_{mn}\le mn(2mn-n-1)/2}} p_\alpha(k)\lambda_1^{\alpha_1}(k)\ldots\lambda_{mn}^{\alpha_{mn}}(k),$$

де $p_\alpha(k)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn})$, — многочлени від $Y_1, \ldots, Y_\nu$ з цілими коефіцієнтами, степінь яких не перевищує $mn(m-1)$. Таким чином,

$$H^2(k) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{mn}),\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_{mn}\le mn(2mn-n-1)}} \widetilde{p}_\alpha(k)\lambda_1^{\alpha_1}(k)\ldots\lambda_{mn}^{\alpha_{mn}}(k), \tag{20}$$

де $\widetilde{p}_\alpha(k)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn})$, — многочлени від $Y_1, \ldots, Y_\nu$ з цілими коефіцієнтами, степінь яких не перевищує $2mn(m-1)$.

Із формули (13) випливає, що функція $H^2(k)$ є симетричним многочленом від коренів $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{mn}(k)$. За основною теоремою теорії симетричних многочленів [25, глава XI] функцію $H^2(k)$ можна подати у вигляді

$$H^2(k) = \sum_{\substack{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{mn}),\\ \beta_1+2\beta_2+\ldots+(mn)\beta_{mn}\le mn(2mn-n-1)}} g_\beta(k)B_1^{\beta_1}(k)\ldots B_{mn}^{\beta_{mn}}(k), \tag{21}$$

де $g_\beta(k)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{mn})$, є цілочисловими лінійними комбінаціями многочленів $\widetilde{p}_\alpha(k)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn})$, тому $g_\beta(k), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{mn})$, є многочленами від $Y_1, \ldots, Y_\nu$ з цілими коефіцієнтами, степінь яких не перевищує $2mn(m-1)$. Із рівностей (3), (7) отримуємо, що $B_j(k)$, $j = 1, \ldots, mn$, є многочленами від $Y_1, \ldots, Y_\nu$ з цілими коефіцієнтами степеня не вищого, ніж m. Тоді з (21) дістаємо, що

$$H^2(k) = \sum_{\substack{r=(r_1,\ldots,r_\nu),\\ |r|\le 2mn(mn-1)+m^2n(2mn-n-1)}} \alpha_r(k)Y_1^{r_1}\ldots Y_\nu^{r_\nu}, \ \ \alpha_r(k) \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Доведемо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ функція $H^2(k)$ як многочлен змінних $Y_1, \ldots, Y_\nu$ є відмінною від тотожного нуля в полікрузі $\Pi_\nu(\rho)$, $\rho > 0$. Для цього розглянемо такий вектор $\vec{Y_0} = \mathrm{col}(a_{q,r}^{j,s}) \in \widetilde{\Pi}_\nu(\rho)$, $\rho > 0$, що:

$a_{1,r}^{j,s} = 0$, $r = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n-1$, $|s| \le N$;
$a_{1,r}^{0,s} = 0$, $r = 1, \ldots, m-1$, $|s| \le N$;
$a_{1,m}^{0,s} = 0$, $s \ne (0)$;
$a_{1,m}^{0,(0)} \ne 0$.

Легко перевірити, що для такого вектора $\vec{Y_0}$

$$l(\lambda, k_0) = \lambda^{mn} + (-\rho)^{m-1}a_{1,m}^{0,(0)}, \quad l_{1,1}(\lambda, k_0) = \lambda^{mn-n}.$$

Оскільки $a_{1,m}^{0,(0)} \ne 0$, $\rho > 0$, то корені $\lambda_1(k_0), \ldots, \lambda_{mn}(k_0)$ многочлена $l(\lambda, k_0)$ є відмінними від нуля. Тоді $l_{1,1}(\lambda_j(k_0), k_0) \ne 0$, $j = 1, \ldots, mn$, а тому вектори $\vec{h}_q(k_0)$, $q = 1, \ldots, mn$, є ненульовими (бо мають відмінну від нуля першу компоненту). Звідси і з того, що корені $\lambda_1(k_0), \ldots, \lambda_{mn}(k_0)$ є попарно різними (бо вони є різними коренями mn-го степеня з ненульового числа $(-\rho)^m a_{1,m}^{0,(0)}$), випливає, що вектори $\vec{H}_q(k_0) \in \mathbb{C}^{mn}$, $q = 1, \ldots, mn$, є лінійно незалежними, і, отже, $H(k_0) \neq 0$.

Таким чином, для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ многочлен $H^2(k)$ є відмінним від тотожного нуля, тобто цілі числа $\alpha_r(k)$ у (22) не можуть одночасно дорівнювати нулеві. При заданому $k \in \mathbb{Z}^p$ виберемо старший член стосовно лексикографічного впорядкування доданків у розвиненні (22), нехай він дорівнює $\alpha_s(k) Y_1^{s_1} \ldots Y_\nu^{s_\nu}$, $s = s(k)$. За лемою 1 для довільних $\varepsilon \in (0; 1)$, $\rho > 0$, виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu} \Big\{ \vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho) : |H^2(k)| \leq \varepsilon \Big\} &= 0, && \text{коли } s = (0), \\ \operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu} \Big\{ \vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho) : |H^2(k)| \leq \varepsilon \Big\} &\leq C_1 \varepsilon^{2/|s|}, && \text{коли } s \neq (0), \end{aligned} \tag{23}$$

де $C_1 = C_1(\rho)$. Зі співвідношень (23) отримуємо, що для довільного $\rho > 0$ множина векторів $\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho)$, для яких рівність $H(k) = 0$ виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$, має нульову міру Лебега в $\mathbb{C}^\nu$. Звідси випливає твердження теореми, бо множина векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, для яких не виконується умова (15), міститься в об'єднанні множин $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p} \bigcup_{\rho=1}^{\infty} \Big\{ \vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho) : H(k) = 0 \Big\}$. □

Теорема 2. *Множина тих векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, що відповідають системам* (1)*, для яких не виконується умова H_δ, є множиною нульової міри Лебега в $\mathbb{C}^\nu$, якщо $\delta > \gamma_1$, де*

$$\gamma_1 = \frac{p}{4} \Big(2mn(mn-1) + m^2 n(2mn - n - 1) \Big).$$

Доведення. Нехай E_δ^H — множина векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, для яких нерівність

$$|H(k)| \leq (1 + |k|)^{-\delta} \tag{24}$$

виконується для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$, $E_\delta^H(\rho) = \Pi_\nu(\rho) \cap E_\delta^H$, $\rho > 0$. Через $E_\delta^H(k, \rho)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, позначимо множину тих векторів $\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho)$, для яких нерівність (24) виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$. Із доведення теореми 1 випливає, що $H^2(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є ненульовим многочленом від $Y_1, \ldots, Y_\nu$ з цілими коефіцієнтами степеня не вищого, ніж $\mu_1 \equiv 2mn(mn-1) + m^2 n(2mn - n - 1)$. Оскільки

$$E_\delta^H(k, \rho) = \Big\{ \vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho) : |H^2(k)| \leq (1 + |k|)^{-2\delta} \Big\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

то, покладаючи у співвідношеннях (23) $\varepsilon = (1 + |k|)^{-2\delta}$, $\delta > \gamma_1$, дістанемо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $\rho > 0$ виконується нерівність

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu} E_\delta^H(k, \rho) \leq C_2 (1 + |k|)^{-4\delta/\mu_1} = C_2 (1 + |k|)^{-p - \varepsilon_1}, \tag{25}$$

де $\varepsilon_1 = 4(\delta - \gamma_1)/\mu_1 > 0$, $C_2 = C_2(\rho)$. З оцінок (25) випливає, що ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu} E_\delta^H(k, \rho)$ є збіжним при $\delta > \gamma_1$, $\rho > 0$. Тоді із леми Бореля–Кантеллі [16] отримуємо, що для довільного $\rho > 0$ $\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu} E_\delta^H(\rho) = 0$, коли $\delta > \gamma_1$. Враховуючи, що $E_\delta^H = \bigcup_{\rho=1}^{\infty} E_\delta^H(\rho)$, дістаємо, що $\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu} E_\delta^H = 0$, коли $\delta > \gamma_1$. □

Теорема 3. *Множина тих векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, що відповідають системам* (1), *для яких не виконується умова S_δ, є множиною нульової міри Лебега в $\mathbb{C}^\nu$, якщо $\delta > \gamma_2$, де $\gamma_2 = \frac{1}{2}pmM$, $M = C_{mn}^{mr}(C_{mn}^{mr} - 1)$.*

Доведення. Із формули (14) видно, що функція $S(k)$ є однорідним симетричним многочленом від коренів $\lambda_1(k), \dots, \lambda_{mn}(k)$ степеня M з цілими коефіцієнтами. З основної теореми теорії симетричних многочленів [25, глава XI] випливає, що $S(k)$ можна подати у вигляді

$$S(k) = \sum_{\substack{r=(r_1,\dots,r_{mn}),\\ r_1+2r_2+\dots+(mn)r_{mn}\le M}} \beta_r(k) B_1^{r_1}(k) \dots B_{mn}^{r_{mn}}(k), \tag{26}$$

де $\beta_r(k)$, $r = (r_1, \dots, r_{mn})$, — цілі числа, що одночасно не дорівнюють нулеві. Тоді із формул (3), (7), (26) випливає, що $S(k)$ є многочленом від $Y_1, \dots, Y_\nu$ степеня, не вищого, ніж mM, з цілими коефіцієнтами такого вигляду:

$$S(k) = \sum_{\substack{r=(r_1,\dots,r_\nu),\\ |r|\le mM}} \alpha_r(k) Y_1^{r_1} \dots Y_\nu^{r_\nu}, \quad \alpha_r(k) \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

Встановимо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ многочлен $S(k)$ є відмінним від тотожного нуля в полікрузі $\Pi_\nu(\rho)$, $\rho > 0$. Для цього покажемо, що $S(k)$ є відмінним від тотожного нуля у $\widetilde{\Pi}_\nu(\rho) \subset \Pi_\nu(\rho)$. Дійсно, якщо $\vec{Z} = \mathrm{col}(a_{q,r}^{j,s}) \in \widetilde{\Pi}_\nu(\rho)$, то коефіцієнти $B_j(k, \vec{Z})$, $j = 1, \dots, mn$, (див. формулу (6)) обчислюються за формулами

$$B_j(k, \vec{Z}) = (-\rho)^{r-1} \sum_{|s|\le N} a_{1,r}^{nr-j,s} k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p},$$

де індекс $r = r(j)$ однозначно визначається з умови $n(r-1) < j \le nr$.

Якщо $\beta_s(k) B_1^{s_1}(k, \vec{Z}) \dots B_{mn}^{s_{mn}}(k, \vec{Z})$, $\beta_s(k) \ne 0$, $s = s(k)$, — старший член стосовно лексикографічного впорядкування доданків у розвиненні (26) для $S(k, \vec{Z})$, $\vec{Z} \in \widetilde{\Pi}_\nu(\rho)$, то

$$\left| (\eta_1^{s_1} \dots \eta_{mn}^{s_{mn}}) S(k, \vec{Z}) \right| = \rho^{mn(m-1)/2} |\beta_s(k)| s_1! \dots s_{mn}! \ne 0, \tag{28}$$

де $\eta_j \equiv (\partial / \partial a_{1,r}^{nr-j,(0)})$, $j = 1, \dots, mn$, а індекс $r = r(j)$ однозначно визначається з умови $n(r-1) < j \le nr$. З нерівності (28) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ функція $S(k, \vec{Z})$, $\vec{Z} \in \widetilde{\Pi}_\nu(\rho)$, не може тотожно дорівнювати нулеві.

Отже, для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ функція $S(k)$, $\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho)$, є ненульовим многочленом змінних $Y_1, \dots, Y_\nu$ з цілими коефіцієнтами. Нехай $\alpha_s(k) Y_1^{s_1} \dots Y_\nu^{s_\nu}$, $\alpha_s(k) \ne 0$, $s = s(k)$, – старший член стосовно лексикографічного впорядкування доданків у (27). Позначимо через E_δ^S множину тих векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (17), виконується для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$, а через $E_\delta^S(k, \rho)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — множину тих векторів $\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho)$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (17), виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$.

Тоді за лемою 1 для довільного $\rho > 0$ при $\delta > \gamma_2$ виконуються співвідношення

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\nu} E_\delta^S(k, \rho) = 0, \quad \text{коли } s = (0), \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu} E_\delta^S(k,\rho) \le C_3(1+|k|)^{-2\delta/|s|} \le \\ \le C_3(1+|k|)^{-2\delta/(mM)} = C_3(1+|k|)^{-p-\varepsilon_2}, \ \text{ коли } s \ne (0). \end{aligned} \tag{30}$$

де $\varepsilon_2 = 2(\delta-\gamma_2)/(mM) > 0$. Із формул (29), (30), леми Бореля–Кантеллі [16] випливає, що $\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu}(E_\delta^S \cap \Pi_\nu(\rho)) = 0$, $\rho > 0$, коли $\delta > \gamma_2$. Отже, $\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu} E_\delta^S = 0$ при $\delta > \gamma_2$.

□

4. Деякі властивості систем з класів H_δ, S_δ

Для систем (1), які справджують умови H_δ, S_δ, $\delta \in \mathbb{R}$, правильними є наступні твердження.

Лема 2. *Якщо система* (1) *справджує умову H_δ, то для кожного r, $1 \le r \le n-1$, існує число K_1, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_1$, знайдуться такі набори $\omega_1 \in C(mn,mr)$, $\omega_2 \in C(mn, mn-mr)$, $\omega_j = \omega_j(k)$, $j=1,2$, що $\operatorname{set}\omega_1 \cap \operatorname{set}\omega_2 = \varnothing$, $\operatorname{set}\omega_1 \cup \operatorname{set}\omega_2 = \{1,\dots,mn\}$, для яких нерівність*

$$|h_{\omega_1}(k) h_{\omega_2}(k)| \ge C_4(1+|k|)^{-\gamma_3(\delta)}, \quad C_4 > 0, \tag{31}$$

виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_1$, при $\gamma_3(\delta) = \delta + \gamma m r(n-r)$.

Доведення. Розкриваючи визначник $H(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, за правилом Лапласа, дістанемо, що

$$H(k) = \sum_{\omega \in C(mn,mr)} \pm\, h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) g^r_{\sigma(\omega)}(k), \ \ k \in \mathbb{Z}^p, \tag{32}$$

де $\sigma(\omega) \in C(mn, mn-mr)$ — набір, що однозначно визначається за набором $\omega \in C(mn,mr)$ умовою $\operatorname{set}\sigma(\omega) \cap \operatorname{set}\omega = \varnothing$; $g_{\sigma(\omega)}(k) = \prod\limits_{j \in \operatorname{set}\sigma(\omega)} \lambda_j(k)$. За умовою леми система (1) справджує умову H_δ, тому існує таке число K_2, що нерівність (16) виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_2$. Тоді з формули (32) випливає, що нерівність

$$\sum_{\omega \in C(mn,mr)} |h_\omega(k)| \cdot |h_{\sigma(\omega)}(k)| \cdot |g_{\sigma(\omega)}(k)|^r > (1+|k|)^{-\delta} \tag{33}$$

є правильною для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_2$. Сума в лівій частині нерівності (33) містить C_{mn}^{mr} доданків, отже, хоча б один з них є більшим від $(1+|k|)^{-\delta}/C_{mn}^{mr}$. Таким чином, для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_2$, знайдуться попарно неперетинні набори $\omega_1 \in C(mn,mr)$, $\omega_2 \in C(mn, mn-mr)$, $\omega_j = \omega_j(k)$, $j=1,2$, для яких справджується нерівність

$$|h_{\omega_1}(k)| \cdot |h_{\omega_2}(k)| \cdot |g_{\omega_2}(k)|^r > \frac{(1+|k|)^{-\delta}}{C_{mn}^{mr}}, \ \ |k| > K_2. \tag{34}$$

З оцінок (11) випливає, що для довільного набору $\omega \in C(mn, mn-mr)$ виконується нерівність $|g_\omega(k)| \le C_5(1+|k|)^{\gamma m(n-r)}$, а тому $|g_{\omega_2}(k)|^r \le C_6(1+|k|)^{\gamma m r(n-r)}$. Враховуючи цю нерівність, з формули (34) дістаємо твердження леми 2. □

Для набору $\omega = (i_1, \ldots, i_{mn-mr}) \in C(mn, mn-mr)$ покладемо:

$$P_\omega(\lambda, k) = \prod_{\sigma \in C(mn, mn-mr), \sigma \neq \omega} (\lambda - \Lambda_\omega(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{35}$$

Зауважимо, що степінь многочлена $P_\omega(\mu, k)$, $\omega \in C(mn, mn-mr)$, за змінною μ дорівнює $d = C_{mn}^{mn-mr} - 1$.

Лема 3. *Нехай система* (1) *справджує умову* S_δ. *Тоді для довільного набору* $\omega \in C(mn, mn-mr)$ *існує таке число* K_3, *що нерівність*

$$|P_\omega(\Lambda_\omega(k), k)| \geq C_7(1 + |k|)^{-\gamma_4(\delta)}, \quad C_7 > 0, \tag{36}$$

виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_3$, *при*

$$\gamma_4(\delta) = \frac{1}{2}(\delta + \gamma M(M-1)) - \gamma d, \quad d = C_{mn}^{mn-mr} - 1, \quad M = C_{mn}^{m}(C_{mn}^{m} - 1).$$

Доведення. Із оцінок (11) випливає, що для довільних наборів $\sigma, \omega \in C(mn, mn-mr)$ виконуються нерівності $|\Lambda_\sigma(k) - \Lambda_\omega(k)| \leq C_8(1 + |k|^\gamma)$. Враховуючи формули (14), (35), дістанемо

$$|S(k)| \leq C_9(1 + |k|)^{2\gamma(M(M-1)/2-d)} |P_\omega(\Lambda_\omega(k), k)|^2. \tag{37}$$

Оскільки система (1) справджує умову S_δ, то існує таке число K_4, що нерівність (17) виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_3$. Тоді з нерівності (37) дістанемо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_4$, виконуються нерівності

$$|P_\omega(\Lambda_\omega(k), k)| > C_9^{-1/2}(1 + |k|)^{-\eta}, \quad \eta = (\delta + \gamma M(M-1))/2 - \gamma d. \tag{38}$$

□

5. Умови розв'язності задачі (1), (2)

Встановимо умови розв'язності задачі (1), (2). Розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^n([0,T]; \overline{W}_{\alpha,\beta}^{m,\gamma})$ шукаємо у вигляді векторного ряду Фур'є

$$\vec{u}(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} \vec{u}_k(t) \exp(ik, x). \tag{39}$$

Кожна вектор-функція $\vec{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком двоточкової задачі

$$L\left(\frac{d}{dt}, k\right) \vec{u}_k(t) = \vec{0}, \tag{40}$$

$$\vec{u}_k^{(j-1)}(0) = \vec{\varphi}_{jk}, \ j = 1, \ldots, r, \quad \vec{u}_k^{(j-1)}(t_1) = \vec{\varphi}_{r+j,k}, \ j = 1, \ldots, n-r, \tag{41}$$

де $\vec{u}_k(t) = \mathrm{col}(u_k^1(t), \ldots, u_k^m(t))$, $\vec{\varphi}_{j,k} = \mathrm{col}(\varphi_{j,k}^1, \ldots, \varphi_{j,k}^m)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є вектор-функцій $\vec{u}(t, x)$, $\vec{\varphi}_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, відповідно. Нехай система (1) справджує умову H. Тоді корені рівняння (8) є простими, а розв'язок задачі (40), (41) зображується формулою

$$\vec{u}_k(t) = \sum_{q=1}^{mn} C_{k,q} \exp(\lambda_q(k)\,t)\vec{h}_q(k), \tag{42}$$

де сталі $C_{k,q}$, $q = 1, \ldots, mn$, є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{mn} C_{k,q}\lambda_q^{j-1}(k)h_q^s(k) = \varphi_{jk}^s,\ s = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,r}, \\ \sum\limits_{q=1}^{mn} C_{k,q}\lambda_q^{j-1}(k)\exp(\lambda_q(k)t_1)h_q^s(k) = \varphi_{r+j,k}^s, s = \overline{1,m}, j = \overline{1,n-r}. \end{cases} \tag{43}$$

Через $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, позначимо визначник системи (43):

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} h_1^1(k) & \ldots & h_{mn}^1(k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^m(k) & \ldots & h_{mn}^m(k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{r-1}(k)h_1^1(k) & \ldots & \lambda_{mn}^{r-1}(k)h_{mn}^1(k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{r-1}(k)h_1^m(k) & \ldots & \lambda_{mn}^{r-1}(k)h_{mn}^m(k) \\ h_1^1(k)e^{\lambda_1(k)t_1} & \ldots & h_{mn}^1(k)e^{\lambda_{mn}(k)t_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^m(k)e^{\lambda_1(k)t_1} & \ldots & h_{mn}^m(k)e^{\lambda_{mn}(k)t_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-r-1}(k)h_1^1(k)e^{\lambda_1(k)t_1} & \ldots & \lambda_{mn}(k)^{n-r-1}h_{mn}^1(k)e^{\lambda_{mn}(k)t_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-r-1}(k)h_1^m(k)e^{\lambda_1(k)t_1} & \ldots & \lambda_{mn}(k)^{n-r-1}h_{mn}^m(k)e^{\lambda_{mn}(k)t_1} \end{vmatrix}. \tag{44}$$

Теорема 4. *Якщо система* (1) *справджує умову* H, *то для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta}^{m,\gamma})$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \neq 0. \tag{45}$$

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 3.1 на с. 39 у [16].

Припустимо, що умова (45) виконується. Застосовуючи для знаходження невідомих $C_{k,q}$, $q = 1, \ldots, mn$, системи (43) правило Крамера, підставляючи знайдені для них вирази у формулу (42), на підставі (39) для розв'язку задачі (1), (2) отримуємо формальне зображення у вигляді ряду

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} \exp(ik,x) \sum_{j,q=1}^{mn} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \exp(\lambda_q(k)\,t)\vec{h}_q(k)\psi_{j,k}, \tag{46}$$

де $\mathrm{col}(\psi_{1,k}, \ldots, \psi_{mn,k}) = \mathrm{col}(\varphi_{1,k}^1, \ldots, \varphi_{1,k}^m; \varphi_{2,k}^1, \ldots, \varphi_{2,k}^m; \ldots; \varphi_{n,k}^1, \ldots, \varphi_{n,k}^m)$, а $\Delta_{j,q}(k)$, $j,q = 1, \ldots, mn$, — алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та q-го стовпця визначника $\Delta(k)$. Збіжність ряду (46) у просторах $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta}^{m,\gamma})$, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Позначимо:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = n\gamma + mn(m-1)(n\gamma + N) + m(C_r^2 + C_{n-r}^2), \\ &\beta_1 = mnM_2T + (mn - mr)M_3T, \end{aligned} \tag{47}$$

де N, γ, M_2, M_3 — сталі з формул (3), (9), (10).

Теорема 5. *Нехай система* (1) *справджує умову* H, *виконується умова* (45), *і нехай існує така стала* $\delta \in \mathbb{R}$, *що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *справджується нерівність*

$$|\Delta(k)| \geq (1 + |k|)^{-\delta} \exp\left(-(mn - mr)M_3T|k|^\gamma\right). \tag{48}$$

Якщо $\vec{\varphi}_j \in \overline{W}^{\,m,\gamma}_{\alpha+\alpha_1+\delta,\beta+\beta_1}$, $j = 1, \ldots, n$, *де сталі* α_1, β_1 *визначені формулою* (47), *то в просторі* $C^n([0,T]; \overline{W}^{\,m,\gamma}_{\alpha,\beta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображується рядом* (46) *і неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Доведення. Із формул (3), (5), (7)–(12), (44) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$\|\vec{h}_j(k)\| \leq C_{10}(1 + |k|)^{(m-1)(n\gamma+N)}, \quad j = 1, \ldots, mn, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &|\Delta_{j,q}(k)| \cdot \|\exp(\lambda_q(k)t); C^n[0,T]\| \cdot \|\vec{h}_q(k)\| \leq \\ &\leq C_{11}(1 + |k|)^{n\gamma + m(C_r^2 + C_{n-r}^2)} \exp(mnM_3T|k|^\gamma) \prod_{j=1}^{mn} \|\vec{h}_j(k)\| \leq \\ &\leq C_{12}(1 + |k|)^{\alpha_1} \exp(mnM_3T|k|^\gamma),\ j, q = 1, \ldots, mn. \end{aligned} \tag{50}$$

З нерівностей (48)–(50) та формули (42) отримаємо

$$\|\vec{u}_k(t)\|_{C^n[0,T]} \leq C_{13}(1 + |k|)^{\alpha_1+\delta} \exp\left(\beta_1|k|^\gamma\right) \sum_{j=1}^{n} \|\vec{\varphi}_{j,k}\|.$$

Таким чином, для ряду (46) одержуємо оцінки

$$\left\|\vec{u}(t,x); C^n([0,T]; \overline{W}^{\,m,\gamma}_{\alpha,\beta})\right\| \leq C_{14} \sum_{j=1}^{n} \left\|\vec{\varphi}_j(x); \overline{W}^{\,m,\gamma}_{\alpha+\alpha_1+\delta,\beta+\beta_1}\right\|. \tag{51}$$

З нерівності (51) випливає твердження теореми. $\square$

Для випадку, коли система (1) є гіперболічною, числа M_2, M_3 дорівнюють нулеві. У цьому випадку із теореми 5 можна отримати твердження про розв'язність задачі (1), (2) у просторах вектор-функцій зі степеневою поведінкою вектор-коефіцієнтів Фур'є.

6. Метричні оцінки знизу малих знаменників

З'ясуємо питання про можливість виконання нерівності (48) для систем (1), які справджують умови H_{δ_1}, S_{δ_2}.

Теорема 6. *Нехай система* (1) *справджує умови* H_{δ_1}, S_{δ_2}. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in (0, T]$ *нерівність* (48) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\delta > (p+\gamma)\,d + \gamma_3(\delta_1) + \gamma_4(\delta_2)$, *де сталі* d, $\gamma_3(\delta_1)$, $\gamma_4(\delta_2)$ *визначені в лемах 2, 3.*

Доведення. Оскільки система (1) справджує умову H_{δ_1}, то за лемою 2 існують такі набори $\omega_1 \in C(mn, mr)$, $\omega_2 \in C(mn, mn-mr)$, $\omega_j = \omega_j(k)$, $j = 1, 2$, для яких виконується нерівність (31) з показником $\gamma_3(\delta_1)$ у ній. Нехай $P_{\omega_2}(\lambda, k)$ — многочлен, визначений за набором ω_2 формулою (35). Із теореми Лапласа про розклад визначника $\Delta(k)$ за мінорами перших mr рядків випливає така рівність:

$$\Delta(k) = \sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_{mr}),\\ \omega\in C(mn,mr)}} (-1)^{\rho_\omega} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) \exp(\Lambda_{\sigma(\omega)}(k) t_1), \tag{52}$$

де $\rho_\omega = 1 + \ldots + mr + i_1 + \ldots + i_{mr}$, а набір $\sigma(\omega) \in C(mn, mn-mr)$ однозначно визначається за набором $\omega \in C(mn, mr)$ умовою $\operatorname{set}\sigma(\omega) \cap \operatorname{set}\omega = \varnothing$. Із формул (52), на основі тверджень леми 2 та леми 3, отримуємо, що

$$\begin{aligned} |P_{\omega_2}(d/dt_1, k)\Delta(k)| &= |h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)||P_{\omega_2}(\Lambda_{\omega_2}(k), k)| \exp(\operatorname{Re}\Lambda_{\omega_2}(k) t_1) \geq \\ &\geq C_{15}(1+|k|)^{-\gamma_3(\delta_1)-\gamma_4(\delta_2)} \exp(-(mn-mr)M_3 T|k|^\gamma),\ k \in \mathbb{Z}^p. \end{aligned} \tag{53}$$

Розглянемо множини $E(k) = \{\, t_1 \in (0, T] : |\Delta(k)| < \nu(k)\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, де

$$\nu(k) = (1+|k|)^{-\gamma_3(\delta_1)-\gamma_4(\delta_2)-(p+\gamma)d-\varepsilon} \exp(-(mn-mr)M_3|k|^\gamma), \quad \varepsilon > 0.$$

Із формул (52), (53) на основі твердження допоміжної леми з [18] одержимо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(k) \leq C_{16}(1+|k|)^\gamma \sqrt[d]{\frac{\nu(k)(1+|k|)^{\gamma_3(\delta_1)+\gamma_4(\delta_2)}}{\exp(-(mn-mr)M_3|k|^\gamma)}} \leq \frac{C_{17}}{(1+|k|)^{p+\varepsilon/d}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{54}$$

З нерівностей (54) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{|k|\geq 0} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(k)$. Тоді за лемою Бореля–Кантеллі [16, с. 13] отримуємо, що міра Лебега в $\mathbb{R}$ множини тих чисел t_1, які належать до нескінченної кількості множин $E(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, дорівнює нулеві. □

У наступних теоремах застосовано поняття фрактальної міри та розмірності Гаусдорфа [6] для опису „масивності" множини тих чисел $t_1 \in (0, T]$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (48), виконується для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\delta > (p+\gamma)\,d + \gamma_3(\delta_1) + \gamma_4(\delta_2)$. Зі зростанням δ множина чисел $t_1 \in (0, T]$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (48), виконується для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, очевидно звужується; однак в термінах міри Лебега це не знаходить відображення, оскільки для різних $\widetilde{\delta}, \widetilde{\widetilde{\delta}}$ таких, що

$$\widetilde{\delta} > (p+\gamma)\,d + \gamma_3(\delta_1) + \gamma_4(\delta_2), \quad \widetilde{\widetilde{\delta}} > (p+\gamma)\,d + \gamma_3(\delta_1) + \gamma_4(\delta_2),$$

відповідні множини мають нульову міру Лебега.

Теорема 7. *Нехай система* (1) *справджує умови* H_{δ_1}, S_{δ_2}. *Тоді для майже всіх (стосовно* ρ*-міри Гаусдорфа,* $0 < \rho \leq 1$*) чисел* $t_1 \in (0, T]$ *нерівність* (48) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\delta > \frac{(p+\gamma)d}{\rho} + \gamma_3(\delta_1) + \gamma_4(\delta_2)$, *де сталі* d, $\gamma_3(\delta_1)$, $\gamma_4(\delta_2)$ *визначені в лемах 2, 3.*

Теорема 8. *Нехай система* (1) *справджує умови* H_{δ_1}, S_{δ_2}. *Якщо* $\delta > \frac{(p+\gamma)d}{\rho} + \gamma_3(\delta_1) + \gamma_4(\delta_2)$, *де сталі* d, $\gamma_3(\delta_1)$, $\gamma_4(\delta_2)$ *визначені в лемах 2, 3, то розмірність Гаусдорфа множини тих чисел* $t_1 \in (0, T]$, *для яких нерівність, протилежна до нерівності* (48), *виконується для нескінченної кількості векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$, *не перевищує* $\frac{(p+\gamma)d}{\delta - \gamma_3(\delta_1) - \gamma_4(\delta_2)}$.

Доведення теорем 7, 8 проводиться із використанням міркувань, наведених при доведенні теореми 6, а також схеми доведення теореми 5.2 у [15].

Список літератури

[1] Abdo S.A., Yurchuk N.I. *Multipoint boundary value problems for certain operator-differential equations. I. A priori estimates.* Differents. Uravneniya (1985), **21**, (3), 417–425. (Russian)

[2] Abdo S.A., Yurchuk N.I. *Multipoint boundary value problems for certain operator-differential equations. II. Solvability and properties of the solutions.* Differents. Uravneniya (1985), **21**, (5), 806–815. (Russian)

[3] Antypko I.I., Perelman M.A. *On an uniqueness classes of solution of a nonlocal multipoint boundary-value problem in an infinite layer.* Teor. funkcij, funkc. analiz i prilozhen. 1972, **16**, 98–109. (Russian)

[4] Arnol'd V.I. *Small denominators. I. Mapping the circle onto itself.* Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1961, **25**, (1), 21–86. (Russian)

[5] Bernik V.I., Beresnevich V.V., Vasylyshyn P.B., Ptashnyk B.Yo. *Multipoint problem with multiple nodes for linear hyperbolic equations.* Ukr. math. journ. 1999, **51** (10), 1311–1316. (Ukrainian)

[6] Bernik V.I., Melnychuk Yu.V. Diophantine approximations and the Hausdorff dimension. Nauka i Tekhnika, Minsk, 1988. (Russian)

[7] Bobyk I.O., Ptashnyk B.Yo. *Boundary value problems for hyperbolic equations with constant coefficients.* Ukr. math. journ. 1994, **46** (7), 795–802. (Ukrainian)

[8] Bobyk I.O., Symotyuk M.M. *A problem with two multiple nodes for factorized linear partial differential equations.* Scientific Bulletin of Lviv Polytechnic National University 2010, **625**, 11–19. (Ukrainian)

[9] Valitskii Yu.N. *Well-posedness of a problem for a differential equation with given values for a function and its derivatives at several points.* Sibirsk. Mat. Zh. 1996, **37** (2), 251–258. (Russian)

[10] Volyans'ka I.I., Il'kiv V.S. *Solvability conditions for a three-point problem for partial differential equation in a two-dimensional cylinder.* Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine 2015, **12** (2), 74–100. (Ukrainian)

[11] Desin A.A. General questions of boundary value theory. Nauka, Moscow, 1980. (Russian)

[12] Kaleniuk P.I., Volyanska I.I., Il'kiv V.S., Nytrebych Z.M. *On the uniquely solvability of the three-point problem for partial derivatives in the two-dimensional region.* Math. Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya 2017, **60** (3), 46–59. (Ukrainian)

[13] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M. Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method. Publishing House of Lviv Polytechnic National University, Lviv, 2002. (Ukrainian)

[14] Klyus I.S., Ptashnyk B.Yo. *Multi-point problem for pseudodifferential equations.* Ukr. math. journ. 2003, **55** (1), 21–29. (Ukrainian)

[15] Medvid O.M., Symotyuk M.M. *Integral problem for linear partial differential equations.* Mathem. Studii 2007, **28** (2), 115–140.

[16] Ptashnik B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. Nauk. Dumka, Kyiv, 1984. (Russian)

[17] Ptashnyk B.Yo., Sylyuga L.P. *Multipoint problem for typeless differential equations with constant coefficients.* Dopovidi NAN Ukrainy 1996, (3), 10–14. (Ukrainian)

[18] Ptashnyk B.Yo., Symotyuk M.M. *Multipoint problem for nonisotropic partial differential equations with constant coefficients.* Ukr. math. journ. 2003, **55** (2), 241–254. (Ukrainian)

[19] Ptashnyk B.Yo., Symotyuk M.M. *Multipoint problem with multiple nodes of interpolation for partial differential equations with constant coefficients.* Ukr. math. journ. 2003. **55**, (3), 400–413. (Ukrainian)

[20] Ptashnyk B.Yo., Tymkiv I.R. *A multipoint problem for a parabolic equation with variable coefficients in a cylindrical domain.* Math. Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya 2011, **54** (1), 15-26. (Ukrainian)

[21] Ptashnik B.I., Shtabalyuk P.I. *A boundary value problem for hyperbolic equations in a class of functions that are almost periodic with respect to space variables.* Differents. Uravneniya 1986, **22** (4), 669–678. (Russian)

[22] Sadovnichiy V.A., Grigorian A.A., Koniagin S.V. Problems of student mathematical olympiads. Moscow State University Publ., Moscow, 1987. (Russian)

[23] Symotyuk M.M. *Multipoint problem for linear systems of partial differential equations.* Math. Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya 2002, **45** (4), 107–118. (Ukrainian)

[24] Symotyuk M.M. *A problem with two multiple nodes for systems of linear partial differential equations homogeneous in order of differentiation.* Mathem. Bulletin of Shevchenko Scientific Society 2004, **1**, 130–148. (Ukrainian)

[25] Faddeev D.K. Lectures on Algebra. Nauka, Moscow, 1984. (Russian)

[26] Faddeev D.K., Sominskiy I.S. Collection of problems in higher algebra. Vyshcha Shkola, Kyiv, 1971. (Ukrainian)

[27] Shidlovsky A.B. Diophantine approximations and transcendental numbers. Moscow State University Publ., Moscow, 1982. (Russian)

[28] Romanko V.K. *Boundary-value problems for one class of differential operators.* Differential. Equations 1974, **10**, (1), 117–131. (Russian)

[29] Saidamatov E.M. *The correctness of inhomogeneous boundary value problems for pseudodifferential equations.* Uzb. math. journ. 1995, (2), 77–88. (Russian)

[30] Malanchuk O.M., Nytrebych Z.M. *Homogeneous two-point froblem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables.* Open Mathematics 2017, **15** (1), 101–110. doi: 10.1515/math-2017-0009.

[31] Nytrebych Z.M., Ilkiv V.S., Pukach P.Ya. *Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics.* Azerb. Journal of Mathematics 2017, **7** (2), 180–196.

[32] Nytrebych Z.M., Malanchuk O.M., Ilkiv V.S., Pukach P.Ya. *On the solvability of two-point in time problem for PDE.* Italian Journal of Pure and Applied Mathematics 2017, (38), 715–726.

[33] Symotyuk M.M., Tymkiv I.R. *Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time.* Carpathian Mathematical Publication 2014, **6** (2), 351–359. doi: 10.15330/cmp.6.2.351–359.

Надійшло 18.12.2019

Symotiuk M. M. *Two-point problem for linear systems of partial differential equations*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 2 (2019), 86–104.

We introduce the classes H, H_δ, S_δ of linear systems of partial differential equations. Some symmetric polynomials in the roots of the characteristic equations of the systems for these classes are nontrivial and its allow power estimates from below. Based on the metric approach and theory of symmetric polynomials we show that almost all systems of partial differential equations with constants coefficients (with respect to the Lebesgue measure in the space spanned by system coefficients) belong to the introduced classes.

The problem with two multiple nodes on the selected variable t and periodicity conditions in other coordinates $x_1, \ldots, x_p$ for linear systems of partial differential equations belonging to the described classes H, H_δ, S_δ is investigated. The conditions of solvability problem in the spaces of smooth vector-functions with exponential behavior of Fourier vector-coefficients are established. It is proved that estimates for small denominators provided the existence of the solution of the problem are performed for almost all (respect to the Lebesgue measure and the Hausdorff fractal measure) of the values of the second interpolation node for linear systems from the classes H, H_δ, S_δ.