Слюсарчук В.Ю.

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЮВАЛЬНИМ АРГУМЕНТОМ ТА ФУНКЦИОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ ЗОРЯНИХ СИСТЕМ

Наводиться закон всесвітнього тяжіння з урахуванням скінченної швидкості гравітації, окремим випадком якого є закон всесвітнього тяжіння ньютонівської механіки, що збігається з наведеним законом у граничному випадку. За допомогою цього закону та другого закону Ньютона будується математична модель руху системи довільного числа матеріальних точок, зокрема, математична модель Сонячної системи зі скінченною швидкістю гравітації, що не збігаються з відповідною математичною моделлю класичної небесної механіки. Математична модель Сонячної системи ньютонівської небесної механіки є окремим випадком побудованої математичної моделі Сонячної системи і збігається з нею в граничному випадку. В основу побудови цих моделей покладено нелінійні диференціальні рівняння із запізнювальним аргументом та нелінійні функціональні рівняння.

Також наведено дослідження руху двох тіл однакової маси зі скінченною швидкістю гравітації. Показано, що рух цих тіл не здійснюється за законами Кеплера. При дослідженні руху тіл суттєвим є використання нелінійних диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом та закону про зростання секторної швидкості відносного руху тіл, спричинене скінченною швидкістю гравітації.

Ключові слова і фрази: Закон всесвітнього тяжіння, закон всесвітнього тяжіння зі скінченною швидкістю гравітації, математична модель Сонячної системи зі скінченною швидкістю гравітації, задача двух тіл зі скінченною швидкістю гравітації.

National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine
e-mail: *V.E.Slyusarchuk@gmail.com*

Вступ

У статті наводиться закон всесвітнього тяжіння з урахуванням скінченної швидкості гравітації. За допомогою цього закону та другого закону Ньютона будується математична модель руху системи довільного числа матеріальних точок, зокрема, математична модель Сонячної системи зі скінченною швидкістю гравітації, що не збігається з відповідною математичною моделлю класичної небесної механіки. В основу побудови цих моделей покладено диференціальні рівняння із запізнювальним аргументом та функціональні рівняння. Також приділено увагу задачі двох тіл однакової маси.

УДК 517.929; 517.958:531–133
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34A37, 34D20, 37C75, 39A11, 83A05, 93D05.

© Слюсарчук В.Ю., 2019

1 Закон всесвітнього тяжіння зі скінченною швидкістю гравітації

Розглянемо дві матеріальні точки M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 відповідно. Згідно із законом всесвітнього тяжіння та другим законом Ньютона ці точки здійснюють рух у просторі. Рух точок будемо розглядати по відношенню до прямокутної системи координат x, y, z з початком координат у деякій точці O. Вважатимемо, що система координат є інерціальною і на кожну точку діє тільки сила тяжіння, породжена іншою точкою. Положення точок M_1 і M_2 в момент часу t визначається їх радіусами-векторами $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$.

Для дослідження руху точок M_1 і M_2 потрібно знати сили, з якими кожна з цих точок притягую іншу.

Якби швидкість гравітації була нескінченною, як у теорії Ньютона, то на підставі закону всесвітнього тяжіння в момент часу t точка M_2 притягувала б точку M_1 із силою

$$\vec{F}_{2,1,\infty}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^2}\ \vec{r}_{2,1}(t), \tag{1}$$

де

$$\vec{r}_{2,1}(t) = \frac{1}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|}\ (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)) -$$

орт вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$, G – гравітаційна стала і $|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|$ – евклідова довжина вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$. Напрямок цієї сили збігається з напрямком вектора $\vec{r}_{2,1}(t)$ [1], [2].

Аналогічно в момент часу t точка M_1 притягувала б точку M_2 із силою

$$\vec{F}_{1,2,\infty}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^2}\ \vec{r}_{1,2}(t),$$

де

$$\vec{r}_{1,2}(t) = \frac{1}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}\ (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)).$$

У реальному світі швидкість гравітації не може бути нескінченною, як у класичній механіці. Це твердження угоджується зі спеціальною теорією відносності Ейнштейна [3, с. 26] та з дослідженнями Копейкіна С. М. і Фомалонта Е. стосовно фундаментальної межі швидкості гравітації [4].

Пояснимо вплив запізнювання гравітаційного поля на сили, з якими притягуються розглянуті точки M_1 і M_2.

Завдяки скінченній швидкості гравітації на точку M_1 діє інша сила

$$\vec{F}_{2,1,c}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|^2}\ \vec{r}_{2,1}(t, \tau_{2,1}(t)), \tag{2}$$

де

$$\vec{r}_{2,1}(t, \tau_{2,1}(t)) = \frac{1}{|\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|}\ (\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)) -$$

орт вектора $\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)$, запізнення гравітації $\tau_{2,1}(t)$ в (2) задовольняє співвідношення

$$c\tau_{2,1}(t) = |\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)| \tag{3}$$

і c – швидкість гравітації.

Справді, нехай точки M_2 і M_1 рухаються по кривим, частини яких зображені на рис. 1, зі швидкостями $\vec{v}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t)$ і $\vec{v}_1(t) = \dot{\vec{r}}_1(t)$ і в момент часу $t - \tau_{2,1}(t)$, де $\tau_{2,1}(t)$ задовольняє (3), знаходяться в точках M_2^* і M_1^* відповідно. Проміжку часу $[t-\tau_{2,1}(t), t]$ відповідають криві $\overset{\smile}{M_2^* M_2}$ і $\overset{\smile}{M_1^* M_1}$, по яким рухаються точки M_2 і M_1. Цього проміжку часу достатньо, щоб згідно з (3) гравітаційне поле зі швидкістю c поширилося з точки M_2^* в точку M_1. Отже, в момент часу t на точку M_1 діє не сила (1), а сила (2).

Зазначимо, що *притягувальною точкою для точки M_1 в момент часу t є не точка M_2, а точка M_2^*.*

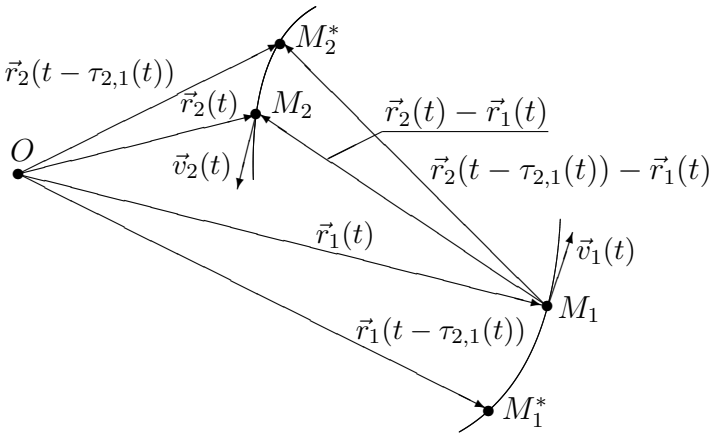

Рис. 1. Розташування точок M_1 і M_2 в моменти часу t і $t - \tau_{2,1}(t)$.

Аналогічно, завдяки скінченній швидкості гравітації на точку M_2 діє сила

$$\vec{F}_{1,2,c}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|^3}\ \vec{r}_{1,2}(t, \tau_{1,2}(t)), \tag{4}$$

де

$$\vec{r}_{1,2}(t, \tau_{1,2}(t)) = \frac{1}{|\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|}\ (\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)),$$

і *притягувальною точкою для точки M_2 в момент часу t є не точка M_1, а точка, що визначається вектором $\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t))$.*

Запізнення гравітації $\tau_{1,2}(t)$ в (4) задовольняє співвідношення

$$c\tau_{1,2}(t) = |\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|. \tag{5}$$

Існування функцій $\tau_{2,1}(t)$ і $\tau_{1,2}(t)$, що задовольняють співвідношення (3) і (5), показано в [5]. Завдяки теоремам про неявну функцію [6, с. 449–453] ці функції є неперервними і диференційовними.

Зазначимо, що сили $\vec{F}_{2,1,c}(t)$ і $\vec{F}_{1,2,c}(t)$ можуть відрізнятися за величиною і не бути колінеарними. Також на підставі (3) і (5) для кожного моменту часу t

$$\lim_{c\to+\infty} \vec{F}_{2,1,c}(t) = \vec{F}_{2,1,\infty}(t) \quad \text{і} \quad \lim_{c\to+\infty} \vec{F}_{1,2,c}(t) = \vec{F}_{1,2,\infty}(t).$$

Отже, *закон всесвітнього тяжіння Ньютона відкриває шлях більш загальному закону* (див. (2)–(5)) *і збігається з ним у граничному випадку* (при $c = +\infty$).

Зазначимо, що для використання формул (2) і (4) потрібна інформація про векторні функції $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$ та скалярні функції $\tau_{2,1}(t)$ і $\tau_{1,2}(t)$. Ці функції можна знаходити, використовуючи другий закон Ньютона (див пп. 2–4).

2 Математична модель руху скінченного числа матеріальних точок

Приділимо увагу руху точок M_i, $i = \overline{0,n}$, з масами m_i, $i = \overline{0,n}$, відповідно, де n – довільне натуральне число. Рух цих точок будемо розглядати відносно прямокутної системи координат x, y, z з початком координат у деякій точці O. Вважатимемо, що ця система є інерціальною.

Рух точок M_i, $i = \overline{0,n}$, можна описати деякими векторними функціями $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{0,n}$, відповідно.

Зафіксуємо довільні точки M_i і M_j, де $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ і $i \neq j$. Згідно з п. 1 точка M_j притягує точку M_i з силою

$$\vec{F}_{j,i,c}(t) = \frac{Gm_jm_i}{|\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|^2}\, \vec{r}_{j,i}(t, \tau_{j,i}(t)), \tag{6}$$

де

$$\vec{r}_{j,i}(t, \tau_{j,i}(t)) = \frac{1}{|\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|}\, (\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)) -$$

орт вектора $\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)$ і запізнення гравітації $\tau_{j,i}(t)$ в (6) задовольняє співвідношення

$$c\tau_{j,i}(t) = |\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|. \tag{7}$$

Уведемо в розгляд множини

$$N_{i,n} = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}, \quad i = \overline{0,n}.$$

Використаємо силу $\sum\limits_{j \in N_{i,n}} \vec{F}_{j,i,c}(t)$, що діє на точку M_i, породжену точками M_j, $j \in N_{i,n}$.

Згідно з другим законом Ньютона для векторних функцій $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{0,n}$, справджуються співвідношення

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j \in N_{i,n}} \vec{F}_{j,i,c}(t), \quad i = \overline{0,n}. \tag{8}$$

Звідси та (6) і (7) випливає, що векторні функції $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{0,n}$, є розв'язками наступної системи диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом та функціональних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \displaystyle\sum_{j \in N_{i,n}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|^2}\, \vec{r}_{j,i}(t, \tau_{j,i}(t)), \quad i = \overline{0,n}, \\ c\tau_{j,i}(t) = |\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|, \quad i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,n},\ i \neq j. \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, що для кожного значення t

$$\lim_{c \to +\infty} \tau_{j,i}(t) = 0, \quad i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,n},\ i \neq j,$$

$$\lim_{c\to+\infty} \vec{F}_{j,i,c}(t) = \vec{F}_{j,i,\infty}(t), \quad i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,n},\ i\neq j.$$

Тому система (9) є узагальненням наступної класичної моделі руху точок M_i, $i=\overline{0,n}$,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \displaystyle\sum_{j\in N_{i,n}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t)-\vec{r}_i(t)|^2}\ \vec{r}_{j,i}(t), \\ i=\overline{0,n}, \end{cases} \tag{10}$$

де

$$\vec{r}_{j,i}(t) = \frac{1}{|\vec{r}_j(t)-\vec{r}_i(t)|}\ (\vec{r}_j(t)-\vec{r}_i(t)),$$

що отримується з (9) при $c=\infty$.

Система (9) є системою $(n+1)^2$ векторних і скалярних рівнянь. Ураховуючи, що кожне векторне рівняння (8) можна подати у вигляді системи трьох скалярних рівнянь, отримуємо, що система (9) рівносильна системі $(n+2)^2-1$ скалярних рівнянь.

Система (10) є системою $n+1$ векторних рівнянь і, отже, є системою $3(n+1)$ скалярних рівнянь.

При знаходженні траєкторій руху точок M_i, $i=\overline{0,n}$, потрібно крім системи рівнянь (9) використовувати також початкові або крайові умови (див. [5], [7], [8]). Система (9) разом із цими умовами є математичною моделлю руху точок M_i, $i=\overline{0,n}$, з урахуванням скінченної швидкості гравітації.

Очевидно, що систему рівнянь (9) з урахуванням початкових умов можна використовувати в якості математичної моделі зоряної системи з n планетами з масами m_i, $i=\overline{1,n}$, що рухаються в силовому полі, породженому зіркою з масою m_0.

3 Математична модель Сонячної системи

При $n=9$ система (9) має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \displaystyle\sum_{j\in N_{i,9}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t-\tau_{j,i}(t))-\vec{r}_i(t)|^2}\ \vec{r}_{j,i}(t,\tau_{j,i}(t)), \quad i=\overline{0,9}, \\ c\tau_{j,i}(t) = |\vec{r}_j(t-\tau_{j,i}(t))-\vec{r}_i(t)|, \quad i=\overline{0,9},\ j=\overline{0,9},\ i\neq j. \end{cases} \tag{11}$$

Ця система описує рух планет Сонячної системи зі скінченною швидкістю гравітації, якщо не враховувати вплив на неї астероїдів, комет, супутників планет та інших складових Сонячної системи. У системі (11) m_0 – маса Сонця і m_i – маса планети, що знаходиться на орбіті з номером i (наприклад, Земля знаходиться на орбіті з номером 3).

Оскільки система (11) враховує скінченність швидкості гравітації, то вона точніше описує рух планет Сонячної системи, ніж наступна система

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \displaystyle\sum_{j\in N_{i,9}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t)-\vec{r}_i(t)|^2}\ \vec{r}_{j,i}(t), \\ i=\overline{0,9}, \end{cases}$$

що розглядається в класичній небесній механіці. Так, похибка ньютонівської теорії руху планет земної групи за 10 років складає близько 1000 км [9, с. 66].

Очевидно, що при використанні системи рівнянь (11) потрібно також враховувати для векторних функцій $\vec{r}_i(t)$, $i=\overline{0,1}$, початкові або крайові умови.

4 Про рух двох тіл однакової маси

Розглянемо задачу двох тіл зі скінченною швидкістю гравітації. У загальному випадку ця задача досліджувалась в [7], [10], де показано нові властивості руху тіл. Наведемо дослідження руху двох тіл, якщо маси їх однакові. У цьому випадку дослідження руху тіл суттєво спрощується. Покажемо, що на підставі скінченної швидкості гравітації *рух цих тіл не може здійснюватися за жодним із законів Кеплера.*

4.1 Закони Кеплера

Рух тіл (зокрема, рух планет) у класичній небесній механіці [11], [12] здійснюється за трьома законами Кеплера (1571–1630):

1. *Всі планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких (спільному для всіх планет) знаходиться Сонце.*

2. *Площі, що описуються радіусами-векторами планет, проведеними із Сонця, зростають пропорційно часу.*

3. *Квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей їх орбіт.*

Цим законам в небесній механіці зі скінченною швидкістю гравітації *властиві неточності.*

4.2 Неможливість руху тіл за другим законом Кеплера при русі їх по еліпсу

Розглянемо рух двох точок M_1 і M_2, маси m_1 і m_2 яких однакові і збігаються з m, з урахуванням скінченної швидкості гравітації.

Припустимо, що *точки M_1 і M_2 рухаються по еліпсу і за другим законом Кеплера.*

Тоді *рух точки M_1 відносно точки M_2 є періодичним.*

Використаємо рівняння руху точки M_1 відносно точки M_2.

Оскільки на точки M_1 і M_2 діють лише сили, породжені самими точками, і ці сили рівні за величиною і протилежні за напрямком, то прискорення $\ddot{\vec{r}}_1(t)$ і $\ddot{\vec{r}}_2(t)$ руху точок мають аналогічні властивості, тобто

$$\ddot{\vec{r}}_1(t) + \ddot{\vec{r}}_2(t) \equiv 0$$

і, отже,

$$\dot{\vec{r}}_1(t) + \dot{\vec{r}}_2(t) \equiv \vec{v}, \tag{12}$$

де $\vec{v}$ – сталий вектор. Співвідношення (12) означає, що центр мас точок M_1 і M_2, що визначається функцією $\dfrac{1}{2}(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t))$, рухається по прямій зі сталою швидкістю.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що початок координат інерціальної системи координат збігається з центром мас точок M_1 і M_2. Тоді (12) подається у вигляді

$$\dot{\vec{r}}_1(t) + \dot{\vec{r}}_2(t) \equiv 0$$

($\vec{v} = 0$) і, отже, швидкості $\vec{v}_1(t) = \dot{\vec{r}}_1(t)$ і $\vec{v}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t)$ руху точок M_1 і M_2 однакові за величиною і протилежні за напрямком.

На підставі наведених міркувань та припущень точки M_1 і M_2 розміщені на еліпсі (з великою віссю A_1A_2) симетрично відносно його центра O (див. рис. 2).

Згідно з п. 1 притягувальні точки M_1^* і M_2^* для точок M_2 і M_1 відповідно в момент часу t також розміщені на еліпсі симетрично відносно його центра O.

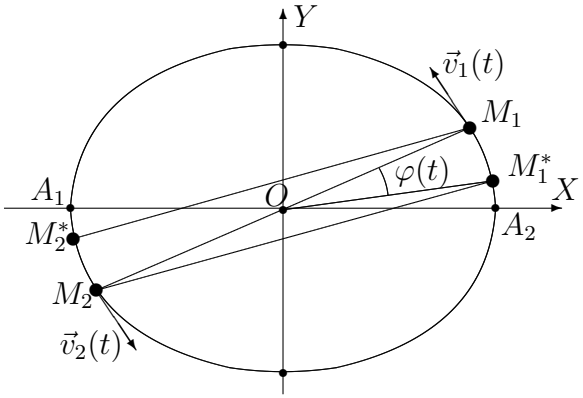

Рис. 2. Розміщення точок M_1, M_2, M_1^* і M_2^*.

Координати точок M_1, M_2, M_1^* і M_2^* в момент часу t визначаються векторами $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\vec{r}_1(t - \tau_1(t))$ і $\vec{r}_2(t - \tau_2(t))$ відповідно, для яких

$$c\tau_1(t) = |\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|, \quad c\tau_2(t) = |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|$$

і згідно з рис. 2 справджуються рівності

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2^*}\right| = \left|\overrightarrow{M_2M_1^*}\right| = |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t - \tau_2(t))| = |\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t - \tau_1(t))|. \tag{13}$$

Тому запізнювання $\tau_1(t)$ і $\tau_2(t)$ є однаковими (їх будемо позначати через $\tau(t)$) і рух точок M_1 і M_2 описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1(t) = \dfrac{Gm}{|\vec{r}_2(t - \tau(t)) - \vec{r}_1(t)|^3}\,(\vec{r}_2(t - \tau(t)) - \vec{r}_1(t)), \\ \ddot{\vec{r}}_2(t) = \dfrac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau(t)) - \vec{r}_2(t)|^3}\,(\vec{r}_1(t - \tau(t)) - \vec{r}_2(t)). \end{cases} \tag{14}$$

Якщо використати функцію $d(t) = \left|\overrightarrow{M_1M_2^*}\right|$ і зображення векторних функцій $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$ за допомогою координат

$$\vec{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t)), \quad \vec{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t)),$$

то систему рівнянь (14) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = \dfrac{Gm}{d^3(t)}\,(x_2(t - \tau(t)) - x_1(t)), \\ \ddot{y}_1(t) = \dfrac{Gm}{d^3(t)}\,(y_2(t - \tau(t)) - y_1(t)), \\ \ddot{x}_2(t) = \dfrac{Gm}{d^3(t)}\,(x_1(t - \tau(t)) - x_2(t)), \\ \ddot{y}_2(t) = \dfrac{Gm}{d^3(t)}\,(y_1(t - \tau(t)) - y_2(t)). \end{cases} \tag{15}$$

Оскільки на підставі обмежень на траєкторії руху точок M_1 і M_2

$$\vec{r}_1(t) \equiv -\vec{r}_2(t), \tag{16}$$

тобто $x_1(t) \equiv -x_2(t)$ і $y_1(t) \equiv -y_2(t)$, то дослідження системи рівнянь (15) зводиться до дослідження системи рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\dfrac{Gm}{d^3(t)}\,(x_1(t-\tau(t)) + x_1(t)), \\ \ddot{y}_1(t) = -\dfrac{Gm}{d^3(t)}\,(y_1(t-\tau(t)) + y_1(t)). \end{cases} \tag{17}$$

Використаємо одну важливу властивість розв'язків цієї системи.

Розглянемо векторні функції

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) = 2(x_1(t), y_1(t)), \tag{18}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = 2(\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t))$$

і скалярну функцію

$$v_\sigma(t) = 2\begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{y}_1(t) \end{vmatrix}.$$

Зазначимо, що $v_\sigma(t) > 0$ для всіх $t \geqslant t_0$, оскільки орієнтації пар векторів $\vec{r}(t)$ і $\vec{v}(t)$, $t \geqslant t_0$, є правими.

Очевидно, що завдяки (17) функція (18) є розв'язком рівняння

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{Gm}{d^3(t)}\,(\vec{r}(t) + \vec{r}(t-\tau(t))),$$

де на підставі (13) і (16)

$$d(t) = |\vec{r}_1(t) + \vec{r}_1(t-\tau(t))| = |\vec{r}_2(t) + \vec{r}_2(t-\tau(t))|.$$

У випадку класичної небесної механіки функція $v_\sigma(t)$ є секторною швидкістю точки M_1 відносно точки M_2 і

$$v_\sigma(t) \equiv c, \tag{19}$$

де c – стала [11, с. 134].

Завдяки скінченній швидкості гравітації секторна швидкість $v_\sigma(t)$ точки M_1 відносно точки M_2 не є сталою.

Справді, з урахуванням (17)

$$\frac{1}{2}\frac{dv_\sigma(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{y}_1(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ \ddot{x}_1(t) & \ddot{y}_1(t) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{Gm}{d^3(t)}\begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_1(t-\tau(t)) + x_1(t) & y_1(t-\tau(t)) + y_1(t) \end{vmatrix} = -\frac{Gm}{d^3(t)}\begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_1(t-\tau(t)) & y_1(t-\tau(t)) \end{vmatrix}.$$

Із цих рівностей, зокрема, отримуємо тотожність (19), коли $\tau(t) \equiv 0$.

Отже, на підставі попередніх рівностей

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{y}_1(t) \end{vmatrix} = \frac{Gm}{d^3(t)}\,\Delta(t) \tag{20}$$

для всіх $t \geqslant t_0$, де t_0 – довільний момент часу з проміжку, протягом якого здійснюється рух точок M_1 і M_2, де

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1(t-\tau(t)) & y_1(t-\tau(t)) \\ x_1(t) & y_1(t) \end{vmatrix}.$$

З'ясуємо геометричний зміст співвідношення (20).

Використаємо рис. 3, на якому зображені вектори $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ і $\vec{r}(t-\tau(t))$ та частина траєкторії руху точки M_1 відносно точки M_2. Точка M_3 на цьому рисунку є кінцем вектора $\vec{v}(t)$.

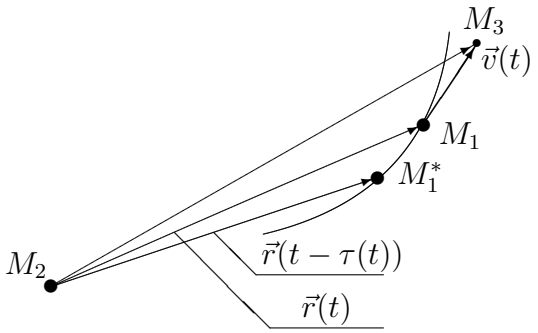

Рис. 3. До зростання секторної швидкості.

Звідси та геометричного змісту визначника другого порядку випливає, що площа $S_{M_1M_2M_3}(t)$ трикутника $M_1M_2M_3$ є строго зростаючою функцією, швидкість зміни цієї площі пропорційна площі $S_{M_1M_2M_1^*}(t)$ трикутника $M_1M_2M_1^*$ і

$$\frac{dS_{M_1M_2M_3}(t)}{dt} = \frac{Gm}{d^3(t)}\,S_{M_1M_2M_1^*}(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Ця властивість розв'язків системи (17) вказує на *зростання секторної швидкості руху точки M_1 відносно точки M_2* (*закон про зростання секторної швидкості*).

Отриманий висновок (завдяки скінченній швидкості гравітації) суперечить періодичності руху точки M_1 відносно точки M_2 (на підставі припущення про виконання для точок M_1 і M_2 другого закону Кеплера і того, що точки M_1 і M_2 рухаються по еліпсу).

Отже, припущення, що точки M_1 і M_2 рухаються по еліпсу і за другим законом Кеплера, є хибним.

Таким чином, рух точки M_1 (згідно з п. 1) здійснюється не навколо точки M_2, а навколо притягувальної точки M_2^* (не виконується перший закон Кеплера стосовно притягувальної точки), і секторна швидкість руху точки M_1 відносно точки M_2 не є сталою, а строго зростає (не виконується другий закон Кеплера).

Щоб показати, що не виконується третій закон Кеплера, достатньо показати, що траєкторія руху точки M_1 відносно точки M_2 не є еліпсом. Тоді для точок M_1 і M_2 не буде виконуватися і перший закон Кеплера не тільки стосовно притягувальних точок, а і стосовно траєкторій їх руху.

4.3 Неможливість руху одного тіла відносно другого тіла по еліпсу

Припустимо, що точки M_1 і M_2 рухаються по еліпсу згідно з рис. 2.

З'ясуємо, як змінюється секторна швидкість $v_\sigma(t)$.

За законом зростання цієї швидкості

$$\lim_{t\to+\infty} v_\sigma(t) < +\infty \tag{21}$$

або

$$\lim_{t\to+\infty} v_\sigma(t) = +\infty. \tag{22}$$

Припустимо, що виконується співвідношення (21). Тоді завдяки (20)

$$\lim_{t\to+\infty} \int_t^{t+1} a_\sigma(s)\, ds = 0, \tag{23}$$

де

$$a_\sigma(t) = \frac{Gm}{d^3(t)}\, \Delta(t). \tag{24}$$

Функція $a_\sigma(t)$ має такі властивості:

1) $a_\sigma(t) > 0$ для всіх $t \geqslant t_0$, оскільки орієнтація векторів $\overline{r}_1(t-\tau(t))$ і $\overline{r}_1(t)$ є правою для кожного $t \geqslant t_0$;

2) функції $a_\sigma(t)$ і $\dfrac{da_\sigma(t)}{dt}$ є обмеженими на $[t_0, +\infty)$ завдяки (24) та того, що точки M_1, M_2, M_1^* і M_2^* знаходяться на еліпсі (рис. 2) для всіх $t \geqslant t_0$ і величини швидкостей руху цих точок не можуть бути більшими швидкості гравітації c.

Із цих властивостей функції $a_\sigma(t)$ та рівності (23) випливає, що $\lim\limits_{t\to+\infty} a_\sigma(t) = 0$.

Оскільки $0 < 2a \leqslant d(t) \leqslant 2b$, $t \geqslant t_0$, де a і b – довжини малої та великої півосей еліпса (рис. 2), то на підставі (24)

$$\lim_{t\to+\infty} \Delta(t) = 0. \tag{25}$$

Ураховуючи, що площа $S(t)$ паралелограма, побудованого на $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_1(t-\tau(t))$, збігається зі значенням визначника $\Delta(t)$ і

$$S(t) = |\vec{r}_1(t)| \cdot |\vec{r}_1(t-\tau(t))| \sin\varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ – кут між векторами $\vec{r}_1(t-\tau(t))$ і $\vec{r}_1(t)$ (див. рис. 2), отримуємо на підставі (25), що

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0.$$

Звідси випливає, що для відстані $d(M_1, M_1^*)$ між точками M_1 і M_1^*

$$\lim_{t\to+\infty} d(M_1, M_1^*) = 0,$$

що неможливо, оскільки завдяки зростанню секторної швидкості точки M_1 відносно точки M_2

$$\inf_{t\geqslant t_0} |\overline{v}(t)| > 0.$$

Отже, припущення, що виконується співвідношення (21), хибне.

Співвідношення (22) також не може виконуватися, оскільки в протилежному випадку на підставі руху точок M_1 і M_2 по еліпсу

$$\lim_{t\to+\infty} |\overline{v}(t)| = +\infty,$$

що неможливо.

Таким чином, припущення, що можливий рух точок M_1 і M_2 по еліпсу, є хибним.

Отже, рух двох тіл однакової маси в реальному просторі не задовольняє законам Кеплера.

5 Додаткові зауваження та літературні вказівки

Закон всесвітнього тяжіння зі скінченною швидкістю гравітації уведено в розгляд автором для побудови математичних моделей руху тіл небесної механіки з урахуванням скінченної швидкості гравітації і вивчення їх властивостей (див. [5], [7] і [10]).

Математична модель Сонячної системи зі скінченною швидкістю гравітації, що розглянута в п. 3, детально досліджена в статті [5]. У цій статті, зокрема, показано, що планети Сонячної системи рухаються навколо притягувальних точок, що не збігаються з центром Сонця.

Розглянута в п. 4 задача двох тіл зі скінченною швидкістю гравітації в загальному випадку ($m_1 \neq m_2$) детально досліджена в статті [7]. У [7] показано, що рух двох тіл не здійснюється за законами Кеплера. Показано, що для двох тіл множина обмежених траєкторій без зіткнення є порожньою. Тому або відбувається зіткнення двох тіл або відстань між тілами на нескінченному проміжку часу не може бути обмеженою. Також показано нестійкість необмежених траєкторій руху тіл. Аналогічну властивість для необмежених траєкторій руху довільного числа тіл встановлено в [13].

Дослідження системи двох диференціальних рівнянь із запізнюваннями й обмеженнями на запізнювання та похідні розв'язків, що описує рух двох тіл із довільними масами і скінченною швидкістю гравітації, наведено в [8].

References

[1] Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. N. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. URSS, Moscow, 2002. (in Russian)

[2] Multon F. Introduction to celestial mechanics. ONTI NKTP USSR, Moscow-Leningrad, 1935. (in Russian)

[3] Einstein A. On the special and general theory of relativity. State Publishing House, Moscow, 1922. (in Russian)

[4] Kopeikin, S. V., Fomalont, E. *The fundamental limit of the speed of gravity and its measurement.* Earth and the Universe 2004, (3).

[5] Slyusarchuk, V. Y. *Mathematical model of the Solar system with account of gravitation velocity.* Neliniini Koliv. 2018, **21** (2), 238–261. (in Ukrainian)

[6] Fikhtengolts G. M. Course of Differential and Integral Calculus, T. 1. Nauka, Moscow, 1966. (in Russian)

[7] Slyusarchuk, V. Yu. *Non-Keplerian behavior and instability of motion of two bodies caused by a finite velocity of gravity.* Neliniini Koliv. 2018, **21** (3), 397–419. (in Ukrainian)

[8] Slyusarchuk, V. Yu. *Investigation of systems of differential equations with delays and constraints inposed on the delays and derivatives of the solutions.* Ukr. Math. J. 2019, **71** (5), 677–691. (in Ukrainian)

[9] Surdin V. G. Solar system. Fizmatlit, Moscow, 2008. (in Russian)

[10] Slyusarchuk, V. Yu. *Kepler's laws and the two-body problem with finite speed of gravity.* Bukovinian Math. Journal 2018, **6** (3–4), 134–151. (in Ukrainian)

[11] Golubeva O. V. Theoretical mechanics. Higher School, Moscow, 1968. (in Russian)

[12] Beliy Yu. A. Johann Kepler (1571-1630). Nauka, Moscow, 1971. (in Russian)

[13] Slyusarchuk, V. Yu. *The instability of unbounded solutions of evolution equations with operator coefficients permutable with rotation operators.* Bukovinian Math. Journal 2019, **7** (1), 99–113. (in Ukrainian)

Надійшло 03.12.2019

Slyusarchuk V.Yu. *Instability of unbounded solutions of evolution equations with operator coefficients commuting with rotation operators*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 2 (2019), 105–116.

The law of universal gravitation is given, taking into account the finite speed of gravity, the special case of which is the law of universal gravitation of Newtonian mechanics, which coincides with the law in the limiting case. Using this law and Newton's second law, a mathematical model of the motion of a system of arbitrary numbers of material points is constructed, in particular, a mathematical model of the solar system with a finite speed of gravity, which does not coincide with the corresponding mathematical model of classical celestial mechanics. The mathematical model of the solar system of Newtonian celestial mechanics is a special case of the mathematical model of the solar system constructed and coincides with it in the extreme case. The basis for the construction of these models is based on nonlinear differential equations with a delayed argument and nonlinear functional equations.

Also studies of the motion of two bodies of the same mass with finite speed of gravity are given. It is shown that the movement of these bodies is not carried out by Kepler's laws. In the study of the motion of bodies, it is essential to use nonlinear differential equations with a delayed argument for the law on increasing the sectoral velocity of relative motion of bodies caused by the finite speed of gravity.