Bukovinian Math. Journal. 2019, **7**, 2, 1–17 Буковинський матем. журнал 2019, Т.7, №2, 1–17

Бондар І.А.

СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. КРИТИЧНИЙ ВИПАДОК ДРУГОГО ПОРЯДКУ.

This research is based on the general theory of effective methods of finding solutions was developed of autors for weakly nonlinear systems of integrodifferential equations and boundary-value problems for them in the critical case of the first order. The previously obtained statements for a weakly nonlinear boundary-value problem define the conditions of solvability at $\operatorname{rank} B_0 = r$, that is, a first-order critical case. In this paper we are interested in the question of what to do when a sufficient condition is not fulfilled? After all, then the weak nonlinear boundary-value problem is not solvable and in the proposed form the solution does not exist. The answer to this question is that $\operatorname{rank} B_0 < r$, hence $P_{B_0} \neq 0$. Then a sufficient condition for the solution of weakly nonlinear boundary-value problem in the critical case of the first order cannot be applied.

In the given research paper by means of Moore-Penrose pseudoinverse matrices and constructive methods nonlinear systems analysis there were investigated conditions for the existence and there were suggested iterative algorithms of constructing solutions of boundary-value problems for weakly nonlinear system of integrodifferential equations. The existence conditions and the structure of solutions of the weakly nonlinear boundary value problem in the critical case of the second order are obtained. It was shown that the existence of a solution depends on the conditions obtained by means of nonlinearities and the second approximation to the desired solution.

We seek the solution of this problem in the class of vector functions $x = x(t, \varepsilon)$ such that $x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b])$, $\dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$.

Key words and phrases: Weakly nonlinear boundary value problem, integrodifferential equations, critical case of the second order, pseudoinverse matrices..

Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: *holovatska.iv@gmail.com*

Вступ

Потреби сучасної науки призводять до необхідності розвитку побудови конструктивних методів дослідження крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь.

УДК 517.929.7, 517.968.74
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39B22, 39B42, 47J25.
За підтримки гранту НАН України дослідницькій групі молодих учених НАН України для проведення досліджень за пріоритетними напрямками розвитку науки і техніки 2019 року; науковий проект №04-02/2019.

Такі задачі моделюють багато фізичних, технічних, економічних, соціальних процесів. Їх розробка для аналізу лінійних та нелінійних крайових задач для широкого класу диференціальних, інтегральних, функціонально-диференціальних, інтегро-диференціальних систем, систем і рівнянь із запізненням та імпульсом займає одне з центральних місць в якісній теорії диференціальних рівнянь. Дана робота присвячена дослідженню, власне, крайовим задачам для інтегро-диференціальних рівнянь. Структура досліджень такого типу задач засобами теорії ортопроекторів та псевдообернених за Муром – Пенроузом матриць, була побудована А.М. Самойленко, О.А. Бойчуком, В.П. Журавльовим, С.А. Кривошеєю та І.А. Бондар [1, 2]. Зокрема, умови існування розв'язків слабконелінійних крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь досліджувалися у роботі [2] (критичний випадок першого порядку) та був запропонований ітераційні алгоритми побудови розв'язків таких задач. Також цікавий випадок розглядався у роботі [3], коли у нерозв'язну слабконелінійну крайову задачу вводили імпульс, щоб звести її до розв'язної (при цьому імпульси задавалися не по всіх копонентах невідомої n-вимірної вектор-функції $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_{k_i}(t), ..., x_n(t))$, а лише по k_i). Логічно при подальших дослідженнях виникає питання розв'язності слабконелінійної крайової задачі у критичному випадку другого порядку. Вирішення даної проблеми дозволить доповнити теорію крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь.

1 Постановка задачі

Розглянемо слабконелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t,s) Z(x(s,\varepsilon), s, \varepsilon) ds, \tag{1}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon), \;\; \alpha \in \mathbb{R}^q, \tag{2}$$

де будемо використовувати припущення і позначення з робіт [1]–[3]: $A(t), B(t), \Phi(t), K(t,s)$ — $(m\times n)$, $(m\times n)$, $(n\times m)$, $(n\times n)$ — вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпчики матриці $\Phi(t)$ — лінійно-незалежні на $[a,b]$, $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція з $L_2[a,b]$; ℓ — обмежений лінійний векторний функціонал визначений в $D_2[a;b]$, $\ell = col(\ell_1, \ell_2, \ell_3, .., \ell_q) : D_2[a;b] \to \mathbb{R}^q$; $Z(x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ — нелінійна по першій компоненті n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційовна по x в околі породжуючого розв'язку, інтегровна з квадратом по t і неперервна по ε: $Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \le \mu]$, $Z(x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon) \in L_2[a,b]$, $Z(x(t,\cdot), t, \cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$; $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійні обмежені, відповідно, q-вимірні вектор-функціонали, неперервно диференційовні по x у розумінні Фреше і неперервні по ε в околі породжуючого розв'язку.

Розв'язок крайової задачі (1), (2) визначений у наступному класі вектор-функцій $x = x(t,\varepsilon)$:

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b]), \; \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \; x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

і який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої крайової задачі

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds = f(t), \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha. \tag{4}$$

Далі, розв'язок породжуючої крайової задачі (3), (4) — $x(t, 0) = x_0(t, c_r^0)$, будемо називати *породжуючим розв'язком* слабконелінійної крайової задачі (1), (2), де $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ — невідомий вектор констант, який буде визначений нижче.

У роботі [2] були встановлені умови існування та запропоновано алгоритм побудови розв'язку $x(t, \varepsilon)$ задачі (1), (2), який записується наступним чином:

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon), \tag{5}$$

де $y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in D_2[a, b]$, $\dot{y}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, $y(t, 0) = 0$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у нульовий розв'язок крайової задачі:

$$\dot{y}(t) - \Phi(t) \int_a^b \Big[A(s)y(s) + B(s)\dot{y}(s)\Big] ds = \varepsilon \int_a^b K(t, s) Z\big(x_0(s, c_r^0) + y(s, \varepsilon), s, \varepsilon\big) ds, \tag{6}$$

$$\ell y(\cdot) = \varepsilon J\big(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big). \tag{7}$$

Використовуючи неперервну диференційовність вектор-функції $Z(x, t, \varepsilon)$ та диференційовність за Фреше векторного функціонала $J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ по перших компонентах в околі точки $\varepsilon = 0$, виділяємо у вектор-функції $Z(x_0 + y, t, \varepsilon)$ і у векторному функціоналі $J\big(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big)$ лінійну частину по y і члени нульового порядку по ε. Тоді має місце розклад

$$Z(x_0 + y, t, \varepsilon) = Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) + A_1(t)y(t, \varepsilon) + R(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \tag{8}$$

$$J\big(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big) = J(x_0(\cdot, c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y(\cdot, \varepsilon) + R_1(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{9}$$

де $Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) \in C[a, b]$, $J(x_0(\cdot, c_r^0)) = J(x_0(\cdot, c_r^0), 0)$, $A_1(t) = A_1(t, c_r^0) = \frac{\partial Z(x,t,0)}{\partial x}\Big|_{x = x_0(t, c_r^0)} \in C[a, b]$, $\mathfrak{L}_1 y(\cdot, \varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціоналу $J\big(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big)$. Лінійний оператор $\mathfrak{L}_1 = J'(x_0)$ є похідною Фреше [1] від векторного функціонала $J\big(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big)$ в точці $x = x_0(t, c_r^0)$. Нелінійна вектор-функція $R(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ належить до класу $C^1(\|y\| \leq q)$, $L_2[a, b]$, $C[0, \varepsilon_0]$. При цьому маємо

$$R(0, t, 0) = 0, \quad \frac{\partial R(0, t, 0)}{\partial y} = 0, \quad R_1(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial R_1(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Наведемо відому [2] необхідну умову розв'язності слабконелінійної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь

Теорема 1 (Необхідна умова.) *Нехай слабконелінійна крайова задача* (1), (2) *має розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$:

$$x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b]),\ \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b],\ x(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0]$$

який перетворюється при $\varepsilon = 0$ *у породжуючий розв'язок* $x_0(t, c_r)$ *з константою* $c_r = c_r^0$ $(r = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q)$.

Тоді, необхідно, щоб вектор констант c_r^0 *був дійсним коренем системи рівнянь*

$$P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Bigg[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \\ + B(s) \int\limits_a^b K(s, \tau) Z(x_0(\tau, c_r^0), \tau, 0) d\tau \Bigg] ds = 0, \quad (10)$$

$$P_{Q^*_{d_2}} \Bigg\{ J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) - \mathfrak{L} \Bigg(\int\limits_a^{\cdot} \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \\ + \Psi_0(\cdot) D^+ \int\limits_a^b \Bigg[A(t) \int\limits_a^t \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \\ + B(t) \int\limits_a^b K(t, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds \Bigg] dt \Bigg) \Bigg\} = 0, \quad (11)$$

$$d_1 = m - \operatorname{rank} D,\ d_2 = q - \operatorname{rank} Q.$$

Достатня умова існування розв'язку слабконелінійної крайової задачі (1), (2) суттєво залежить від побудованої $((d_1 + d_2) \times r)$-вимірної матриці

$$B_0 := \begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s) \tilde{h}_1(s) + B(s) h_1(s) \Big] ds \\ P_{Q^*_{d_2}} \Big\{ \mathfrak{L}_1 X_r(\cdot) - \mathfrak{L} F_0^1(\cdot) \Big\} \end{bmatrix},$$

яка визначає систему, для відшукання невідомого вектора-констант $c = c_r \in \mathbb{R}^r$, а саме

$$B_0 c = g, \quad (12)$$

де $((d_1 + d_2) \times 1)$-вимірна вектор-функція

$$g := \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s) \tilde{h}_2(s, \varepsilon) + B(s) h_2(s, \varepsilon) \Big] ds \\ -P_{Q^*_{d_2}} \Big\{ J(x_0(\cdot, c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y(\cdot, \varepsilon) + R_1(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \mathfrak{L} F_0^2(\cdot, \varepsilon) \Big\} \end{bmatrix},$$

$$h(t,\varepsilon)=\varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)\Big[Z(x_0(s,c_r^0),s,0)+A_1(s)y(s,\varepsilon)+R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds=$$
$$=\varepsilon\Big(h_1(t)+h_2(t,\varepsilon)\Big),$$

$$h_1(t)=\int\limits_a^b K(t,s)A_1(s)X_r(s)ds,\quad h_2(t,\varepsilon)=\int\limits_a^b K(t,s)\Big[A_1(s)y(s,\varepsilon)+R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$F_0(t,\varepsilon)=\tilde h(t,\varepsilon)+\Psi_0(t)D^+\tilde b_0(\varepsilon)=F_0^1(t)+F_0^2(t,\varepsilon),$$

$$F_0^1(t)=\tilde h_1(t)+\Psi_0(t)D^+\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde h_1(s)+B(s)h_1(s)\Big]ds,$$

$$F_0^2(t,\varepsilon)=\tilde h_2(t,\varepsilon)+\Psi_0(t)D^+\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde h_2(s,\varepsilon)+B(s)h_2(s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$\tilde h(t,\varepsilon)=\int\limits_a^t h(s,\varepsilon)ds,\ \tilde h_1(t)=\int\limits_a^t h_1(s)ds,\ \tilde h_2(t,\varepsilon)=\int\limits_a^t h_2(s,\varepsilon)ds,$$

P_D та P_{D^*}, відповідно, $((m+n)\times(m+n))$, $(m\times m)$ - вимірні матриці - ортопроектори на ядро та коядро матриці D; P_{D_r} $(P_{D^*_{d_1}})$- матриця, що складається із повної системи r (d_1) лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці (ортопроектора) P_D (P_{D^*}), матриця D^+ (Q^+) є псевдообернена за Муром-Пенроузом до матриці D (Q). P_Q та P_{Q^*}, відповідно, $(r\times r)$ та $(q\times q)$- вимірні матриці - ортопроектори на ядро та коядро матриці Q. Матриця P_{Q_r} $(P_{Q^*_{d_2}})$ складається з повної системи r (d_2) лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці P_Q (P_{Q^*}); $Q=\ell X_r(\cdot)$ — $(q\times r)$-вимірна матриця, побудована у [1]; $D=\Big[I_m-\int\limits_a^b\Big[A(s)\Psi(s)+B(s)\Phi(s)\Big]ds,-\int\limits_a^b A(s)ds\Big]$ —$(m\times(m+n))$- вимірна матриця, $\tilde f(t)=\int\limits_a^t f(s)ds$, $\tilde b=\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde f(s)+B(s)f(s)\Big]ds$, $F(t)=\tilde f(t)+\Psi_0(t)D^+\tilde b$; I_m та I_n-одиничні матриці відповідних розмірностей; $\Psi_0(t)=[\Psi(t),I_n]$, $\Psi(t)=\int\limits_a^t\Phi(s)ds$, $\Psi_0(t)$, $\Psi(t)$ — $(n\times(m+n))$ та $(n\times m)$- вимірні матриці, відповідно.

Тоді наведемо відому [2] достатню умову існування розв'язку крайової задачі (1), (2).

Теорема 2 (Достатня умова.) *Припустимо, що виконуються всі вище наведені умови, і система рівнянь* (10), (11) *має хоча б один дійсний корінь, породжуюча крайова задача* (3), (4) *має* r*-параметричну* $(r=m+n-\operatorname{rank}D-\operatorname{rank}Q)$ *сім'ю розв'язків. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{B_0^*}N=0,\quad P_{B_0}=0, \tag{13}$$

для всіх дійсних значень вектора $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, *що задовольняє систему рівнянь* (10), (11), *то слабконелінійна крайова задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок* $x = x(t,\varepsilon):$

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b]),\ \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b],\ x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0].$$

При $\varepsilon = 0$ *цей розв'язок перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t, c_r^0)$ *і визначається за допомогою співвідношення*

$$x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y_k(t,\varepsilon)\ (k = 0,1,2,...)$$

та збіжного ітераційного процесу

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + \bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$c_k = B_0^+ \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*} \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_2^k(s,\varepsilon) + B(s)h_2^k(s,\varepsilon)\Big]ds \\ \\ -P_{Q_{d_2}^*} \Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1\bar{y}_k(\cdot,\varepsilon) + \\ +R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \mathfrak{L}F_k^2(\cdot,\varepsilon)\Big\} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y_k(\cdot,\varepsilon) + \\ + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \mathfrak{L}F_k(\cdot,\varepsilon)\Big\} + F_k(t,\varepsilon).$$

У теоремі $((d_1 \times d_2) \times (m+n))$-вимірна матриця $N := \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} & (0)_{d_1 \times m} \\ (0)_{d_2 \times n} & P_{Q_{d_2}^*} \end{bmatrix}$,

$$F_k(t,\varepsilon) = \tilde{h}_k(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+ \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_k(s,\varepsilon) + B(s)h_k(s,\varepsilon)\Big]ds = F_0^1(t) + F_k^2(t),$$

$$F_0^1(t) = \tilde{h}_1(t) + \Psi_0(t)D^+ \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_1(s,c) + B(s)h_1(s,c)\Big]ds,$$

$$F_k^2(t,\varepsilon) = \tilde{h}_2^k(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+ \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_2^k(s,\varepsilon) + B(s)h_2^k(s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$h_k(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big(h_1(t,c) + h_2^k(t,\varepsilon)\Big),\ \tilde{h}_k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t h_k(s,\varepsilon)ds,$$

$$h_2^k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^b K(t,s)\Big[A_1(s)\bar{y}_{k-1}(s,\varepsilon) + R(y_{k-1}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds,\ \tilde{h}_2^k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t h_2^k(s,\varepsilon)ds;$$

$(0)_{d_1\times m}$, $(0)_{d_2\times n}$ — нуль-матриці відповідних розмірностей, $P_{B_0^*}$ — $((d_1+d_2)\times(d_1+d_2))$-вимірна матриця (ортопроектор), що проектує простір $R^{d_1+d_2}$ у нуль-простір $N(B_0^*)$.

Запишемо $((d_1+d_2)\times 1)$-вимірну вектор-функцію g як

$$g := N\bar{g},$$

$((m+n)\times 1)$-вимірна вектор-функція

$$\bar{g} := \begin{bmatrix} -\int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_2(s,\varepsilon)+B(s)h_2(s,\varepsilon)\Big]ds \\ -\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0))+\mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon)+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)-\ell F_0^2(\cdot,\varepsilon)\Big\} \end{bmatrix}.$$

Тоді, якщо виконуються умови (13), то крайова задача (6), (7) має єдиний розв'язок

$$y(t,\varepsilon)=X_r(t)c+y^1(t,\varepsilon),$$

$$c=B_0^+g, \tag{15}$$

$$y^1(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0))+\mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon)+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell F_0(\cdot,\varepsilon)\Big\}+F_0(t,\varepsilon),$$

де $c_r^0\in\mathbb{R}^r$ задовольняє систему рівнянь для породжуючих векторних констант (10), (11).

Вище наведені твердження задають умови розв'язності слабконелінійної крайової задачі (1), (2) при $\operatorname{rank} B_0=r$, тобто має місце критичний випадок першого порядку. У даній роботі нас цікавить питання, що робити, коли достатня умова не виконується?

2 Основний результат

Припустимо, що $\operatorname{rank} B_0<r$, тобто $P_{B_0}\neq 0$. Тоді достатню умову існування розв'язку, слабконелінійної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку першого порядку, не можна застосувати.

Розглянемо задачу (1), (2) у тому випадку, який згідно [1] будемо називати *критичним випадком другого порядку.* Він характерний тим, що відповідь на питання про існування розв'язку вихідної слабконелінійної крайової задачі дає після аналізу крайової задачі відносно $y(t,\varepsilon)$, яка дозволяє знайти друге наближення, а саме

$$\dot{y}(t)-\Phi(t)\int\limits_a^b\Big[A(s)y(s)+B(s)\dot{y}(s)\Big]ds=p(t,\varepsilon), \tag{16}$$

$$\ell y(\cdot)=\varepsilon\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0))+\mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon)+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}, \tag{17}$$

де $p(t,\varepsilon):=\varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)Z\big(x_0(s,c_r^0)+y(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)ds.$

Далі буде показано, що існування розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2) залежить від умов, отриманих за допомогою нелінійності і першого наближення до розв'язку задачі (16), (17).

Нехай, як і у попередньому випадку, $P_Q \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} Q = n_2 < r_1$, але, на відміну від попереднього, $P_{B_0} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} B_0 < r$.

Для спрощення записів припустимо, що у розкладах (8), (9) вектор-функції $R(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[y]$, $R(y, \cdot, \varepsilon) \in C[t]$, $R(y, t, \cdot) \in C[\varepsilon]$, $R_1(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \in C^1[y]$, $R_1(y, \cdot) \in C[\varepsilon]$, такі, що виконуються умови

$$\begin{aligned} R(0,t,0) = 0, &\quad \partial R(0,t,\varepsilon)/\partial y = 0, \\ R_1(0,0) = 0, &\quad \partial R_1(0,\varepsilon)/\partial y = 0. \end{aligned}$$

Друге рівняння системи (15) буде розв'язним тоді та тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*} g = 0 \tag{18}$$

і при цьому матиме розв'язок у вигляді прямої суми

$$c = c^{(0)} + c^{(1)}, \tag{19}$$

де

$$c^{(0)} = B_0^+ g = (I_r - P_{B_0}) c^{(0)} \in \mathbb{R}^r \ominus N(B_0), \tag{20}$$

$c^{(1)}$ — довільна r-вимірна константа із $N(B_0)$:

$$c^{(1)} = P_{B_0} c = P_{B_0} c^{(1)} \in N(B_0). \tag{21}$$

Враховуючи представлення (19) із третього рівняння операторної системи (15) отримаємо наступний вираз:

$$y^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \mathfrak{L}_1 \{X_r(\cdot)\} P_{B_0} c^{(1)} + y^{(2)}(t, \varepsilon), \tag{22}$$

де вектор-функція $y^{(2)}(t, \varepsilon)$ має представлення

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t,\varepsilon) := \varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \Big\{ J(x_0(\cdot, c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 \big(X_r(\cdot)(I_r - P_{B_0}) c^{(0)} + \\ (\varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \mathfrak{L}_1 X_r(\cdot) P_{B_0} c^{(1)} + y^{(2)}(\cdot, \varepsilon)) \big) + \\ R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell F_0(\cdot,\varepsilon) \Big\} + F_0(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{23}$$

Врахувавши запис (22) із умов розв'язності (18) другого рівняння (15) приходимо до алгебраїчної системи для визначення $c^{(1)} \in N(B_0)$:

$$P_{B_0^*} \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \int\limits_a^b \Big[A(s) \tilde{h}_2(s,\varepsilon) + B(s) h_2(s,\varepsilon) \Big] ds \\ P_{Q_{d_2}^*} \Big\{ J(x_0(\cdot, c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell F_0^2(\cdot,\varepsilon) \Big\} \end{bmatrix} = 0,$$

$$P_{B_0^*}\left[\begin{array}{c} P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde{h}_2(s,\varepsilon)+B(s)h_2(s,\varepsilon)\Big]ds \\ \\ P_{Q_{d_2}^*}\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0))+\mathfrak{L}_1[\varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}c^{(1)}+ \\ +y^{(2)}(s,\varepsilon)]+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell F_0^2(\cdot,\varepsilon)\Big\} \end{array}\right]=0,$$

$$h_2(t,\varepsilon)=\int\limits_a^b K(t,s)\Big[A_1(s)y^{(1)}(s,\varepsilon)+R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds=$$

$$=\varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)\Big[A_1(s)\Psi_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}\Big]dsc^{(1)}+$$

$$+\int\limits_a^b K(t,s)\Big[A_1(s)y^{(2)}(s,\varepsilon)+R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$\tilde{h}_2(t,\varepsilon)=\varepsilon\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)\Big[A_1(s)\Psi_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}\Big]dsd\tau c^{(1)}+$$

$$+\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)\Big[A_1(s)y^{(2)}(s,\varepsilon)+R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]dsd\tau$$

$$P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde{h}_2(s,\varepsilon)+B(s)h_2(s,\varepsilon)\Big]ds=$$

$$=\varepsilon B_1c^{(1)}+P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b\Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,t)\Big[A_1(t)y^{(2)}(t,\varepsilon)+R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dtd\tau+$$

$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,t)\Big[A_1(t)y^{(2)}(t,\varepsilon)+R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt\Big]ds,$$

де $(d_1\times r)$-вимірна матриця B_1 має вигляд

$$B_1:=P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b\Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,t)\Big[A_1(t)\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}\Big]dtd\tau+$$

$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,t)\Big[A_1(t)\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}\Big]dt\Big]ds,$$

$$P_{Q^*_{d_2}}\Big\{J(x_0(\cdot,c^0_r))+\mathfrak{L}_1[\varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}c^{(1)}+y^{(2)}(s,\varepsilon)]+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\ell F^2_0(\cdot,\varepsilon)\Big\}=\varepsilon B_2c^{(1)}+P_{Q^*_{d_2}}\Big\{J(x_0(\cdot,c^0_r))+\mathfrak{L}_1(y^{(2)}(\cdot,\varepsilon))+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell F^2_0(\cdot,\varepsilon)\Big\}$$

де $B_2:=P_{Q^*_{d_2}}\mathfrak{L}_1\Big\{\Psi_0(\cdot)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}\Big\}$ — $(d_2\times r)$-вимірна матриця.

Отримаємо алгебраїчну систему відносно невідомого вектора-констант $c^{(1)}$:

$$\varepsilon B_3c^{(1)}=-P_{B^*_0}g_1, \tag{24}$$

тут g_1 — $((d_1+d_2)\times 1)$-вимірний векторний функціонал

$$g_1 := N\left[\begin{array}{c}\int\limits_a^b\Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,t)\Big[A_1(t)y^{(2)}(t,\varepsilon)+R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dtd\tau+\\ +B(s)\int\limits_a^b K(s,t)\Big[A_1(t)y^{(2)}(t,\varepsilon)+R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt\Big]ds\\ \\ \Big\{J(x_0(\cdot,c^0_r))+\mathfrak{L}_1(y^{(2)}(\cdot,\varepsilon))+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell F^2_0(\cdot,\varepsilon)\Big\}\end{array}\right],$$

а B_3 — $((d_1+d_2)\times r)$-вимірна матриця

$$B_3:=P_{B^*_0}\begin{bmatrix}B_1\\ \\ B_2\end{bmatrix}, \tag{25}$$

матриця N побудована вище. Позначимо через P_{B_3} — $(r\times r)$-вимірну матрицю (ортопроектор), що проектує r-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^r$ на нуль-простір $N(B_3)$ $((d_1+d_2)\times r)$-вимірної матриці B_3, а через $P_{B^*_3}$ — $((d_1+d_2)\times(d_1+d_2))$-вимірну матрицю (ортопроектор), що проектує (d_1+d_2)-вимірний простір $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ на нуль-простір $N(B^*_3)$ $(r\times(d_1+d_2))$-вимірної матриці B^*_3. Тоді необхідна та достатня умова розв'язності системи (24) матиме вигляд:

$$P_{B^*_3}P_{B^*_0}g_1=0. \tag{26}$$

При цій умові система (24) розв'язна відносно $\varepsilon c^{(1)}\in N(B_3)$:

$$\varepsilon c^{(1)}=-B^+_3P_{B^*_0}g_1+c^{(2)}, \tag{27}$$

де $c^{(2)}$ —довільний вектор-констант із $N(B_0)\cap N(B_3)$, $c^{(2)}=P_{B_3}c^{(1)}=P_{B_3}P_{B_0}c^{(1)}\in N(B_0)\cap N(B_3)$.

Припустимо, що перетин нуль-просторів $N(B_0)$ та $N(B_3)$ нульовий, тоді (24) має єдиний розв'язок ($c^{(2)}=0$).

Достатньою умовою виконання рівності (26) є вимога

$$P_{B^*_3}P_{B^*_0}N=0. \tag{28}$$

Таким чином, при умовах

$$P_{B_0}\neq 0,\ P_{B_0}P_{B_3}=0,\ P_{B^*_3}P_{B^*_0}N=0, \tag{29}$$

від системи (15) приходимо до наступної операторної системи

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1\{X_r(\cdot)\}P_{B_0}c^{(1)} + y^{(2)}(t,\varepsilon),$$

$$c^{(0)} = B_0^+ g, \quad \varepsilon c^{(1)} = -B_3^+ P_{B_0^*} g_1 + c^{(2)}, \tag{30}$$

$$y^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1\big(X_r(\cdot)(I_r - P_{B_0})c^{(0)}+$$
$$(\varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1 X_r(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + y^{(2)}(\cdot,\varepsilon))\big) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell F_0(\cdot,\varepsilon)\Big\} + F_0(t,\varepsilon).$$

У випадку $P_{B_0} \neq 0$ операторна система (15) не належить класу систем, для розв'язання яких можна застосувати метод простих ітерацій. Виділяючи додаткову змінну, система (15) при умові (18) зводиться (регуляризується) до вигляду (30). При цьому r-вимірна векторна константа розкладається у пряму суму двох величин, які по-різному визначаються, і вимірність операторної системи (15) підвищується на $r = dimN(Q)$. Це дає можливість за умов (29) замість $(2n+r)$-вимірної операторної системи (15) розглядати $2(n+r)$-вимірну операторну систему (30), для розв'язання якої можна застосовувати збіжний медот простих ітерацій.

Ітераційний алгоритм. По аналогії з [3], за допомогою метода простих ітерацій для операторної системи (30) побудуємо ітераційний процес для відшукання розв'язку $y(t,\varepsilon) : y(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b])$, $\dot{y}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b]$, $y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, $y(t,0) = 0$, крайової задачі (16), (17). Перше наближення $y_1^{(2)}(t,\varepsilon)$ до $y^{(2)}(t,\varepsilon)$ покладемо:

$$y_1^{(2)}(t,\varepsilon) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+(\delta_1(\varepsilon) - \mathfrak{L}F_1(\cdot,\varepsilon)) + F_1(t,\varepsilon), \tag{31}$$

де $\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon J\big(x_0(\cdot,c_r^0),0\big)$, $F_1(t,\varepsilon) = \tilde{p}_1(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}_1(\varepsilon)$,
$\tilde{p_1}(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t p_1(s,\varepsilon)ds$, $\tilde{b}_1(\varepsilon) = \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{p}_1(s,\varepsilon) + B(s)p_1(s,\varepsilon)\Big]ds$,
$p_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)Z\big(x_0(s,c_r^0),s,0\big)ds.$

Вектор-функція $y_1^{(2)}(t,\varepsilon)$ це розв'язок крайової задачі

$$\dot{y}_1(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)y_1(s) + B(s)\dot{y}_1(s)\Big]ds = p_1(t,\varepsilon), \tag{32}$$

$$\ell y_1(\cdot) = \delta_1(\varepsilon). \tag{33}$$

Такий розв'язок існує в силу вибору $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ із системи рівнянь для породжуючих констант [2].

Перше наближення $y_1(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку $y(t,\varepsilon)$ крайової задачі (16), (17) рахуємо рівним $y_1^{(2)}(t,\varepsilon) : y_1(t,\varepsilon) = y_1^{(2)}(t,\varepsilon)$.

Друге наближення $y_2^{(2)}(t,\varepsilon)$ до $y^{(2)}(t,\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі

$$\dot{y}_2(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)y_2(s) + B(s)\dot{y}_2(s)\Big]ds = p_2(t,\varepsilon), \tag{34}$$

$$\ell y_2(\cdot) = \delta_2(\varepsilon), \tag{35}$$

де

$$p_2(t,\varepsilon) := \varepsilon \int\limits_a^b K(t,s)\big[Z\big(x_0(s,c_r^*),s,0\big) + A_1\big(X_r(s)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(s,\varepsilon)\big) + $$
$$+ R(y_1^{(2)}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big]ds,$$

$$\delta_2(\varepsilon) := \varepsilon\big\{J(x_0(s,c_r^*),0) + \mathfrak{L}_1\big(X_r(s)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(s,\varepsilon)\big) + R_1(y_1^{(2)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\big\}$$

і яка згідно теореми 1 є розв'язною тоді та тільки тоді, коли виконуються наступні умови

$$P_{D_{d_1}^*}\tilde{b}_2 = 0, \quad P_{Q_{d_2}^*}(\delta_2 - \ell F_2(\cdot)) = 0, \tag{36}$$

де $\tilde{p}_2(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t p_2(s,\varepsilon)ds$, $\tilde{b}_2 = \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{p}_2(s,\varepsilon) + B(s)p_2(s,\varepsilon)\Big]ds$, $F_2(t) = \tilde{p}_2(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}_2$.

Підставивши ці значення в умови (36), отримаємо

$$P_{D_{d_1}^*}\tilde{b}_2 = P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s p_2(\tau,\varepsilon)d\tau + B(s)p_2(s,\varepsilon)\Big]ds =$$
$$= \varepsilon P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big) + $$

$$+A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau dt + B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big) + $$
$$+ A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau\Big]ds = 0,$$

$$
\begin{gathered}
P_{Q^*_{d_2}}(\delta_2 - \ell F_2(\cdot)) = \\
= P_{Q^*_{d_2}}\Big(\varepsilon\big\{J(x_0(s,c^*_r),0) + \mathfrak{L}_1\big(X_r(s)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(s,\varepsilon)\big) + R_1(y_1^{(2)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\big\} - \\
- \ell(\tilde{p}_2(\cdot,\varepsilon) + \Psi_0(\cdot)D^+\tilde{b}_2)\Big) = \\
= \varepsilon P_{Q^*_{d_2}}\Big(\big\{J(x_0(s,c^*_r),0) + \mathfrak{L}_1\big(X_r(s)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(s,\varepsilon)\big) + R_1(y_1^{(2)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\big\} - \\
- \ell(\int\limits_a^s \int\limits_a^b K(t,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c^*_r),\tau,0\big) + A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + \\
+ R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau dt + \Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c^*_r),\tau,0\big) + \\
+ A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau dt + B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c^*_r),\tau,0\big) + \\
+ A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon) + R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau\Big]ds)\Big) = 0
\end{gathered}
$$

отримаємо алгербаїчну систему для визначення $c_1^{(0)} \in \mathbb{R}^r$

$$
B_0 c_1^{(0)} = g_2, \tag{37}
$$

де $((d_1+d_2)\times r)$-вимірна матриця B_0 має вигляд

$$
B_0 := \begin{bmatrix}
\begin{gathered}
P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})d\tau dt + \\
+ B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})d\tau\Big]ds
\end{gathered} \\
\\
\begin{gathered}
P_{Q^*_{d_2}}\Big(\big\{\mathfrak{L}_1\big(X_r(s)(I_r - P_{B_0})\big)\big\} - \ell(\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\big[A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})\big]d\tau dt + \\
+ \Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\big[A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})\big]d\tau dt + \\
+ B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\big[A_1X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})\big]d\tau\Big]ds)\Big)
\end{gathered}
\end{bmatrix},
$$

$((d_1+d_2)\times 1)$-вимірний вектор-стовпчик

$$g_2 := N \left[\begin{array}{c} -\int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon)+R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau dt+ \\ +B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon)+R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau\Big]ds \\ \\ \big\{J(x_0(s,c_r^*),0)+\mathfrak{L}_1\big(y_1^{(2)}(s,\varepsilon)\big)+R_1(y_1^{(2)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\big\}- \\ -\ell(\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon)+ \\ +R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau dt+\Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b\Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+ \\ +A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon)+R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau dt+ \\ +B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c_r^*),\tau,0\big)+A_1y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon)+R(y_1^{(2)}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau\Big]ds) \end{array}\right]$$

Існування розв'язку $y_2^{(2)}(t,\varepsilon)=y^{(2)}(t,\varepsilon)$ крайової задачі (34), (35) забезпечується вибором векторної константи $c_1^{(0)}\in\mathbb{R}^r$ із умови розв'язності даної задачі

$$P_{B_0^*}g_2=0, \tag{38}$$

але враховуючи вигляд вектор-функції $g_2\in R^{d_1+d_2}$, умову (38) досить складно перевірити, тому для існування розв'язку $c_1^{(0)}$ системи (37) достатньо, щоб виконувалася умова

$$P_{B_0^*}N=0. \tag{39}$$

Тоді система (37) буде мати розв'язок $c_1^{(0)}=B_0^+g_2$, що є першим наближенням до $c^{(0)}\in\mathbb{R}^r$. Розв'язок $y_2^{(2)}(t,\varepsilon)$ крайової задачі (34), (35) визначається наступним чином $y_2^{(2)}(t,\varepsilon)=\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_1^{(0)}+\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+(\delta_2(\cdot)-\ell F_2(\cdot))+F_2(t)$. Тоді друге наближення $y^{(2)}(t,\varepsilon)$ до розв'язку крайової задачі (16), (17) матиме вигляд

$$y^{(2)}(t,\varepsilon)=X_r(t)\big(I_r-P_{B_0}\big)c_1^{(0)}+y_2^{(2)}(t,\varepsilon). \tag{40}$$

З операторної системи (30) для визначення розв'язку $y(t,\varepsilon)$ крайової задачі (6), (7) отримаємо наступний ітераційний процес:

$$\varepsilon c_{k-1}^{(1)}=-B_3^+P_{B_0^*}g_{k+1}, \tag{41}$$

$$c_k^{(0)}=B_0^+g_{k+1},$$

$$
\begin{aligned}
y^{(2)}_{k+1}(t,\varepsilon) = {} & \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Bigg(J(x_0(s,c^*_r),0) + \mathfrak{L}_1\big(X_r(s)(I_r-P_{B_0})c^{(0)}_k + \\
& + \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1X_r(\cdot)P_{B_0}c^{(1)}_{k-1} + y^{(2)}_k(s,\varepsilon)\big) + R_1(y^{(2)}_k(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg) + \\
& + \varepsilon\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)\Big[Z\big(x_0(s,c^*_r),s,0\big) + A_1\big(X_r(s)(I_r-P_{B_0})c^{(0)}_k + \\
& + \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1X_r(\cdot)P_{B_0}c^{(1)}_{k-1} + y^{(2)}_k(s,\varepsilon)\big) + R(y^{(2)}_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]dsd\tau + \\
& + \varepsilon\Psi_0(t)D^+\int\limits_a^b\Bigg[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,t)\Big[Z\big(x_0(t,c^*_r),t,0\big) + A_1\big(X_r(t)(I_r-P_{B_0})c^{(0)}_k + \\
& + \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1X_r(\cdot)P_{B_0}c^{(1)}_{k-1} + y^{(2)}_k(t,\varepsilon)\big) + R(y^{(2)}_k(t,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]dtd\tau + \\
& + B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\big[Z\big(x_0(s,c^*_r),\tau,0\big) + A_1\big(X_r(\tau)(I_r-P_{B_0})c^{(0)}_k + \\
& + \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}_1X_r(\cdot)P_{B_0}c^{(1)}_{k-1} + y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon)\big) + R(y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau\Bigg]ds,
\end{aligned}
$$

$$
y_{k+1}(t,\varepsilon) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c^{(0)}_k + \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c^{(1)}_{k-1} + y^{(2)}_{k+1}(t,\varepsilon),
$$
$$
k=0,1,2,\dots,\ y_0(t,\varepsilon) = y^{(2)}_0(t,\varepsilon) = 0,
$$

$((d_1+d_2)\times 1)$ — вимірний вектор-стовпчик

$$
g_{k+2} := N\begin{bmatrix}
\begin{gathered}
-\int\limits_a^b\Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c^*_r),\tau,0\big) + A_1y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon) + R(y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau dt + \\
+B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c^*_r),\tau,0\big) + A_1y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon) + R(y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau\Big]ds
\end{gathered} \\
\\
\begin{gathered}
\big\{J(x_0(s,c^*_r),0) + \mathfrak{L}_1\big(y^{(2)}_k(s,\varepsilon)\big) + R_1(y^{(2)}_k(s,\varepsilon),\varepsilon)\big\} - \\
-\ell(\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c^*_r),\tau,0\big) + A_1y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon) + \\
+R(y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau dt + \Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b\Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c^*_r),\tau,0\big) + \\
+A_1y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon) + R(y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau dt + \\
+B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\big[Z\big(x_0(\tau,c^*_r),\tau,0\big) + A_1y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon) + R(y^{(2)}_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau\Big]ds)
\end{gathered}
\end{bmatrix}
$$

Збіжність ітераційного процесу (41) доводиться методом мажоруючих рівнянь Ляпунова. Для встановлення факту існування розв'язку слабконелінійної крайової задачі для інтегро-диференціальних систем рівнянь (1), (2) достатньо встановити умови її зведення до операторної (30). Таким чином справедливе наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай слабконелінійна крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь* (1), (2) *задовольняє вказані вище умови так, що має місце критичний випадок* $(\operatorname{rank} Q = n_2 \leq r_1)$ *і відповідна породжуюча крайова задача* (3), (4) при умовах

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}} (\alpha - \ell F(\cdot)) = 0 \ (d_1 = m - \operatorname{rank} D, \ d_2 = q - \operatorname{rank} Q),$$

і лише при них має r*-параметричну сім'ю породжуючих розв'язків*

$$x(t, c_r) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ (\alpha - \ell F(\cdot)) + F(t), \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Нехай також

$$P_{B_0} \neq 0, \ P_{B_0} P_{B_3} = 0. \tag{42}$$

Тоді для кожного значення вектора $c_r = c^*_r \in R^r$, $(r = r_1 - \operatorname{rank} Q,\ r_1 = m + n - \operatorname{rank} D,)$ *що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант, при виконанні умови*

$$P_{B^*_3} P_{B^*_0} N = 0,$$

має єдиний розв'язок $y = y(t, \varepsilon)$:

$$y(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b]), \ \dot{y}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \ y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється в нуль. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на* $[0, \varepsilon_0]$ *ітераційного процесу* (41). *Крайова задача* (1), (2) *має при цьому єдиний розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$:

$$x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b]), \ \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \ x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

який перетворюється у породжуючий $x_0(t, c^0_r)$. *Цей розв'язок визначається за допомогою ітераційного процесу* (41) *і формули*

$$x_k(t, \varepsilon) = x_0(t, c^0_r) + y_k(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

References

[1] *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. — 317 p.; 2nd edition, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016. — 314p.

[2] *O. Boichuk, I. Holovats'ka*, Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations, Journal of Mathematical Sciences, 203:3 (2014), p. 306-321 (Translation of Nonlinear Oscillations (Neliniini Kolyvannya), 16:4,(2013), C. 460-474).

[3] *Bondar I., Gromyak M., Kozlova N.* Weakly nonlinear impulsive boundary-value problems for systems of integrodifferential equations // Miskolc Mathematical Notes, Vol. 17 (2016), No. 1, pp. 69–84.

Received 01.11.2019

Бондар І.А. *Слабконелінійні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь. Критичний випадок другого порядку.* // Буковинський матем. журнал — 2019. — Т.7, №2. — С. 1–17.

Встановлено умови існування та структуру розв'язків слабконелінійної крайової задачі у критичному випадку другого порядку. За допомогою теорії ортопроекторів та псевдообернених за Муром – Пенроузом матриць досліджено достатню умову існування розв'язків таких задач, запропоновано ітераційний алгоритм їх побудови. Показано, що існування розв'язку вихідної крайової задачі залежить від умов, отриманих за допомогою нелінійності і другого наближення до шуканого розв'язку.