Олена Карлова, Михайло Лукань

СЛАБКІ R-ПРОСТОРИ І РІВНОМІРНА ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ПЕРШОГО КЛАСУ БЕРА

Вводиться клас слабких R-просторів, який включає в себе опуклі підмножини нормованих просторів, і доводиться, що рівномірна границя f послідовності $f_n : X \to Y$ функцій першого класу Бера між топологічним простором X і слабким R-простором Y, також належить до першого класу Бера.

Ключові слова і фрази: слабкий R-простір, рівномірна границя функцій першого класу Бера, функція першого класу Бера.

Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine; Jan Kochanowski University, Kielce, Poland (Olena Karlova)
Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine (Mykhaylo Lukan)
e-mail: *maslenizza.ua@gmail.com (Olena Karlova)*

1 Вступ

Нехай X та Y – топологічні простори. Функція $f : X \to Y$ називається B_1-*функцією*, або *функцією першого класу Бера*, якщо існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n : X \to Y$, така, що

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

для кожного $x \in X$. Сукупність всіх функцій першого класу Бера між просторами X та Y позначатимемо через $\mathrm{B}_1(X, Y)$.

Добре відомо, що рівномірна границя послідовності дійснозначних неперервних функцій, визначених на довільному топологічному просторі, також є неперервною функцією, а рівномірна границя $f : X \to \mathbb{R}$ послідовності функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ першого класу Бера залишається функцією першого класу Бера [4]. Втім, не завжди рівномірна збіжність гарантує збереження тих чи інших властивостей дограничних функцій. Так, в [3] був наведений приклад множини $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ і послідовності функцій $f_n : [0, 1] \to Y$ першого класу Бера, яка рівномірно збігається на відрізку [0,1] до функції $f : [0, 1] \to Y$, що не належить до першого класу Бера.

Отже, актуальним є наступне питання.

УДК 515.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A21, 54C50.
Перший автор частково підтримується грантом Міністерства освіти і науки України (реєстраційний номер 0112U002340)

Питання 1. *Нехай X – топологічний простір. Для яких метричних просторів Y клас $B_1(X,Y)$ замкнений відносно рівномірних границь?*

Виявилося, що сприятливими в дослідженні цього питання є так звані R-простори, введені в [2]. Наведемо означення R-простору.

Означення 1. Метричний простір (X,d) називається *R-простором*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує неперервна функція $R_\varepsilon : X \times X \to X$, така, що

1) якщо $d(x,y) \le \varepsilon$, то $R_\varepsilon(x,y) = x$,

2) $d(R_\varepsilon(x,y),y) \le \varepsilon$,

для довільних елементів $x, y \in X$.

Нескладно переконатися в тому, що довільна опукла підмножина Y нормованого простору $(X, \|\cdot\|)$ є R-простором, де відображення r_ε визначається так:

$$r_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} y + (\varepsilon/\|x-y\|)\cdot(x-y), & \|x-y\| > \varepsilon, \\ x, & \text{інакше.} \end{cases}$$

При дослідженні питання 1 були отримані такі два результати (див. [2] та [3]).

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір, Y – метричний простір. Якщо*

а) Y – R-простір, або

б) Y – лінійно зв'язний і локально зв'язний простір,

то клас $B_1(X,Y)$ замкнений відносно рівномірних границь.

Отже, в світлі вищезгаданої теореми природно поставити задачу про вивчення зв'язків між R-просторами та лінійно зв'язними і локально зв'язними просторами.

Результати цієї статті доповідалися другим співавтором на Міжнародній Літній Школі "Analysis, Topology and Applications" [1].

2 Одиничне коло є R-простором

В цьому пункті ми доведемо, що одиничне коло на площині є R-простором.

Позначимо
$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Лема 1. *Функція $f : \mathbb{S}\times\mathbb{S} \to \mathbb{S}$, яка задається формулою*

$$f(z,w) = \begin{cases} z, & \text{якщо } Re\,\frac{w}{z} \ge 0, \\ -w^2\overline{z}, & \text{якщо } Re\,\frac{w}{z} < 0, \end{cases}$$

неперервна за сукупністю змінних.

Доведення. Покладемо

$$g(z,w)=z, h(z,w)=-w^2\overline{z}.$$

Оскільки $g(z,w)$ неперервна на відкритій множині

$$G_1=\{(z,w)\in\mathbb{S}\times\mathbb{S}: Re\frac{w}{z}>0\},$$

а функція $h(z,w)$ неперервна на відкритій множині

$$G_2=\{(z,w)\in\mathbb{S}\times\mathbb{S}: Re\frac{w}{z}<0\},$$

то для неперервності функції $f(z,w)$ потрібно перевірити рівність $g(z,w)=h(z,w)$, якщо $\mathrm{Re}\frac{w}{z}=0$.

Отже, нехай числа z і w такі, що $z,w\in\mathbb{S}$ і $\mathrm{Re}\frac{w}{z}=0$. Тоді $Arg\frac{w}{z}=\pm\frac{\pi}{2}=Arg(\pm i)$. Врахувавши, що $|\frac{w}{z}|=1$ та $|\pm i|=1$, ми отримаємо, що $\frac{w}{z}=\pm i$. Звідси випливає, що $w=iz$ або $w=-iz$. Тоді

$$\begin{gathered}h(z,w)=-w^2\overline{z}=-(\pm iz)^2\overline{z}=-i^2z^2\overline{z}=\\ =z^2\overline{z}=|z|z=z=g(z,w).\end{gathered}$$

Таким чином, функція $f(z,w)$ неперервна на $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$. □

Позначимо

$$A(z,w)=\arg z-\arg w.$$

Лема 2. *Функція $g_\varepsilon(z,w):\mathbb{S}\to\mathbb{S}$, яка задається формулою:*

$$g_\varepsilon(z,w)=\begin{cases}z, & \text{якщо } |A(z,w)|\le\varepsilon,\\ \cos(\arg w+\frac{\varepsilon}{|A(z,w)|}(A(z,w)))+ & \\ +i\sin(\arg w+\frac{\varepsilon}{|A(z,w)|}(A(z,w))), & \text{якщо } |A(z,w)|>\varepsilon,\end{cases}$$

неперервна за сукупністю змінних.

Доведення. Позначимо

$$h_1(z,w)=z,$$
$$h_2(z,w)=\cos(\arg w+\frac{\varepsilon}{|A(z,w)|}(A(z,w)))+i\sin(\arg w+\frac{\varepsilon}{|A(z,w)|}(A(z,w))).$$

Ці функції є неперервними на множинах

$$G_1=(z,w)\in\mathbb{S}\times\mathbb{S}:|A(z,w)|\le\varepsilon,$$

$$G_2=(z,w)\in\mathbb{S}\times\mathbb{S}:|A(z,w)|>\varepsilon$$

відповідно. Тому для неперервності функції $g_\varepsilon(z,w)$ досить перевірити чи $h_1(z,w)=h_2(z,w)$ при $|A(z,w)|=\varepsilon$.

При $|A(z,w)|=\varepsilon$ функція $h_2(z,w)$ набуває вигляду $h_2(z,w)=\cos(\arg z)+\sin(\arg z)=z=h_1(z,w)$, що і доводить лему. □

Теорема 2. *Коло $\mathbb{S}$ є R-простором, на якому для $\varepsilon > 0$ функція $R_\varepsilon(z,w)$ задається наступним чином:*

$$R_\varepsilon(z,w) = g_\varepsilon(f(z,w),w).$$

Доведення. Функція $R_\varepsilon(z,w)$ є неперервною як композиція неперервних функцій $g_\varepsilon(z,w)$ і $f(z,w)$, що доведено у попередніх двох лемах.

Перевіримо умови на функцію $R_\varepsilon(z,w)$ з означення R-простору.

Зафіксуємо $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$.

Крок. Якщо $|A(z,w)| \leq \varepsilon$, то $R_\varepsilon(z,w) = z$.

Доведення. Справді, з того, що $|A(z,w)| \leq \varepsilon$ випливає, що $d(z,w) \leq \varepsilon$, тоді $Re\frac{w}{z} \geq 0$, тоді $f(z,w) = z$, а з того, що $|A(z,w)| \leq \varepsilon$ випливає, що $g_\varepsilon(z,w) = z$, тобто $R_\varepsilon(z,w) = z$.

Якщо $|A(z,w)| > \varepsilon$, то отримаємо два випадки.

I) $\varepsilon < d(z,w) < \frac{\pi}{2}$. Тоді з того, що $d(z,w) < \frac{\pi}{2}$ випливає $f(z,w) = z$, а з того, що $d(z,w) > \varepsilon$ випливає, що

$$d(R_\varepsilon(z,w) = g_\varepsilon(f(z,w),w) = g_\varepsilon(z,w) = \cos(\arg w + \frac{\varepsilon}{|A(z,w)|}A(z,w))+$$

$$+i\sin(argw + \frac{\varepsilon}{|A(z,w)|}A(z,w)).$$

Покажемо, що $d(R_\varepsilon(z,w),w) < \varepsilon$. Зауважимо, що

$$d(R_\varepsilon(z,w),w) = \sqrt{(Re(g_\varepsilon(z,w)) - Re(w))^2 + (Im(g_\varepsilon(z,w)) - Im(w))^2}$$

і позначимо

$$A = Re(g_\varepsilon(z,w)) - Re(w), B = Im(g_\varepsilon(z,w)) - Im(w).$$

$$|A| = |\cos(\arg w + \frac{\varepsilon}{|A(z,w)|}A(z,w)) - \cos(\arg w)| =$$

$$= |2\sin(\frac{\varepsilon A(z,w)}{2|A(z,w)|})\sin(\arg w + \frac{\varepsilon A(z,w)}{2|A(z,w)|})|.$$

Крім того, покладемо

$$\alpha = \frac{\varepsilon A(z,w)}{2|A(z,w)|},$$

$$\beta = \arg w + \frac{\varepsilon A(z,w)}{2|A(z,w)|}.$$

Тоді $A^2 = (-2\sin\alpha\sin\beta)^2$, $B^2 = (2\sin\alpha\cos\beta)^2$,

$$d(R_\varepsilon(z,w),w) = \sqrt{A^2+B^2} =$$

$$= \sqrt{(-2\sin\alpha\sin\beta)^2 + (2\sin\alpha\cos\beta)^2} = \sqrt{4\sin^2\alpha\sin^2\beta + 4\sin^2\alpha\cos^2\beta} =$$

$$= \sqrt{4\sin^2\alpha} < \sqrt{4\frac{\varepsilon^2(A(z,w))^2}{4|A(z,w)|^2}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Отже, $d(R_\varepsilon(z,w),w) < \varepsilon$.

II) $d(z,w) > \frac{\pi}{2}$. Тоді $Re\frac{z}{w} < 0$, а функція $f(z,w)$ набуває вигляду

$$f(z,w) = -w^2\overline{z}.$$

З означення функції $f(z,w) = -w^2\overline{z}$ знаємо, що вона відображає точку z симетрично відносно діаметра спряженого до точки w, тобто $Re\frac{-w^2\overline{z}}{w} \geq \varepsilon$ і ми отримуємо знову два випадки аналогічні до 1) і 2I), де під аргументом z у функції $R_\varepsilon(z,w)$ розуміємо $-w^2\overline{z}$. □

3 Слабкі R-простори

Якщо ми захочемо перевірити, чи є інші замкнені криві на площині R-просторами, то одразу виявляється, що ні, навіть, якщо вони гомеоморфні до одиничного кола. Візьмемо, до прикладу, еліпс

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \tfrac{y^2}{4} = 1\}$$

з метрикою d, індукованою з $\mathbb{R}^2$. Припустимо, що E є R-простором. Тоді для $\varepsilon = 2$ існує така неперервна функція $R : E \times E \to E$, така, що

1) якщо $d(u,v) \leq 2$, то $R(u,v) = u$,

2) $d(R(u,v),v) \leq 2$,

для довільних елементів $u, v \in E$. Зафіксуємо точку $v_0 = (1,0) \in E$ і розглянемо неперервну функцію однієї змінної $r : E \to E$,

$$r(u) = R(u, v_0)$$

для всіх $u \in E$. Позначимо

$$B = \{u \in E : d(u, v_0) \leq 2\}$$

і зауважимо, що множина B не зв'язна, бо містить ізольовану точку $\{(-1,0)\}$. З властивості 1) випливає, що $r(u) = u$ для всіх $u \in B$. А з другої властивості маємо, що $d(r(u), v_0) = d(R(u,v_0), v_0) \leq 2$ для всіх $u \in E$, звідки маємо, що $r(E) = B$. Таким чином, незв'язна множина B є неперервним образом зв'язної множини E, що призводить до суперечності [5, c.518].

Щоб уникнути такої неузгодженості, ми ввели послаблене поняття R-простору і довели для нього теорему про рівномірну границю B_1-функцій.

Означення 2. Метричний простір (X,d) називається *слабким R-простором*, якщо існують послідовність $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ додатних чисел та послідовність $(R_n)_{n=1}^\infty$ функцій $R_n : X \times X \to X$, такі, що

1) якщо $d(x,y) \leq \varepsilon_n$, то $R_n(x,y) = x$,

2) $d(R_n(x,y), y) \leq \varepsilon_n$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$

для довільних $x, y \in X$.

Теорема 3. *Якщо (Y, d) – слабкий R-простір, то рівномірна границя f послідовності функцій $f_n \in B_1(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, також належить до $B_1(X, Y)$.*

Доведення. Нехай $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність додатних чисел, а $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність відображень $R_n : Y^2 \to Y$ з означення слабкого R-простору.

З того, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ збіжний випливає, що $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Позначимо $n_1 = 1$ і виберемо номер $n_2 > n_1$, такий, що $\varepsilon_{n_2} < \frac{\varepsilon_{n_1}}{3}$. Далі, виберемо натуральне число $n_3 > n_2$, таке, що $\varepsilon_{n_3} < \frac{\varepsilon_{n_2}}{3}$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми отримаємо строго зростаючу послідовність номерів $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$, таку, що

$$\varepsilon_{n_{k+1}} < \frac{\varepsilon_{n_k}}{3} \tag{1}$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$. Покладемо

$$\delta_k = \varepsilon_{n_k} \quad \text{і} \quad T_k = R_{n_k}$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки $f_k \rightrightarrows f$ на просторі X, то, виділяючи при необхідності підпослідовність, будемо вважати, що

$$d(f_k(x), f_{k+1}(x)) \le \delta_{k+1}$$

для всіх $x \in X$ та $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки кожна функція $f_k : X \to Y$ належить до першого класу Бера, то виберемо для кожного $k \in \mathbb{N}$ таку послідовність $(g_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ неперервних функцій $g_{k,m} : X \to Y$, що

$$\lim_{m\to\infty} g_{k,m}(x) = f_k(x)$$

для всіх $x \in X$.

Покладемо для всіх $x \in X$ і $m \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{1,m}(x) = g_{1,m}(x),$$

$$\varphi_{k,m}(x) = T_{k-1}(g_{k,m}(x), \varphi_{k-1,m}(x)), k > 1$$

Тоді кожне відображення $\varphi_{k,m} : X \to Y$ неперервне як композиція неперервних відображень. З умови 2) означення слабкого R-простору маємо, що

$$d(\varphi_{k+1,m}(x), \varphi_{k,m}(x)) \le \delta_k \tag{2}$$

для всіх $k, m \in \mathbb{N}$ та $x \in X$.

Покажемо, що кожного $x \in X$ і для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує таке натуральне число m_k, що

$$\varphi_{k,m}(x) = g_{k,m}(x)$$

для всіх $m \ge m_k$.

Зафіксуємо $x \in X$. При $k = 1$ твердження, очевидно, вірне для $m_1 = 1$. Припустимо, що для деякого $k > 1$ існують такі номери $m_1, \dots, m_{k-1}$, що $\varphi_{i,m}(x) = g_{i,m}(x)$ при $m \geq m_i$ для всіх $1 \leq i < k$. Зокрема,

$$\varphi_{k-1,m}(x) = g_{k-1,m}(x)$$

для кожного $m \geq m_{k-1}$.

Оскільки $\lim_{m\to\infty} g_{k,m}(x) = f_k(x)$, а $\lim_{m\to\infty} g_{k-1,m}(x) = f_{k-1}(x)$, то існує натуральне число m_0, таке, що

$$d(g_{k,m}(x), f_k(x)) \leq \delta_{k+1} \quad \text{i} \quad d(g_{k-1,m}(x), f_{k-1}(x)) \leq \delta_{k+1}$$

для кожного $m \geq m_0$. Покладемо $m_k = \max\{m_0, m_{k-1}\}$. Тоді для всіх $m \geq m_k$ будемо мати, що

$$\begin{gathered} d(g_{k,m}(x), \varphi_{k-1,m}(x)) = d(g_{k,m}(x), g_{k-1,m}(x)) \leq \\ \leq d(g_{k,m}(x), f_k(x)) + d(f_k(x), f_{k-1}(x)) + d(f_{k-1}(x), g_{k-1,m}(x)) \leq \\ \leq \delta_{k+1} + \delta_k + \delta_{k+1} = 2\delta_{k+1} + \delta_k. \end{gathered}$$

З нерівності (1) та визначення чисел δ_k випливає, що

$$2\delta_{k+1} + \delta_k < 3\delta_k < \delta_{k-1}.$$

Таким чином,

$$d(g_{k,m}(x), \varphi_{k-1,m}(x)) < \delta_{k-1}$$

для всіх $m \geq m_k$. Тоді з умови 1) означення слабкого R-простору випливає, що

$$\varphi_{k,m}(x) = T_{k-1}(g_{k,m}(x), \varphi_{k-1,m}(x)) = g_{k,m}(x)$$

для всіх $m \geq m_k$.

Звідси негайно отримуємо, що

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{k,m}(x) = f_k(x)$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Тепер доведемо, що

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{m,m}(x) = f(x)$$

для кожного $x \in X$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $x \in X$. Користуючись збіжністю ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$ та рівністю $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, виберемо такий номер k_0, що

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \delta_k < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{i} \quad d(f_{k_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_{k_0,m}(x) = f_{k_0}(x)$, то існує $m_0 > k_0$, таке, що для всіх $m \geq m_0$ виконується нерівність

$$d(\varphi_{k_0,m}(x), f_{k_0}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Тоді при $m \geq m_0$ маємо

$$d(\varphi_{m,m}(x), f(x)) \leq d(\varphi_{m,m}(x), \varphi_{m-1,m}(x)) + d(\varphi_{m-1,m}(x), \varphi_{m-2,m}(x)) + \cdots + \\ + d(\varphi_{k_0+1,m}(x), \varphi_{k_0,m}(x)) + d(\varphi_{k_0,m}(x), f_{k_0}(x)) + d(f_{k_0}(x), f(x)).$$

Використаємо нерівності (2), (3), (4) і отримаємо, що

$$d(\varphi_{m,m}(x), f(x)) < \delta_{m-1} + \delta_{m-2} + \cdots + \delta_{k_0} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \\ < \sum_{k=k_0}^{\infty} \delta_k + \frac{2\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

для всіх $m \geq m_0$.

Отже, $f \in B_1(X, Y)$. □

Зауваження 1. Довільний еліпс

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\},$$

наділений метрикою d, індукованою з $\mathbb{R}^2$, є слабким R-простором. Справді, позначимо $\delta = \frac{1}{2}\min\{a, b\}$ і розглянемо послідовність $\varepsilon_n = \frac{\delta}{2^n}$. Тоді побудову відображення $R_n : X^2 \to X$ з потрібними властивостями з означення слабкого R-простору можна здійснити цілком аналогічно до побудови, описаної в теоремі 2.

Список літератури

[1] Lukan M. *R-spaces and uniform limits of sequences of functions*, The 13th International Summer School in Analysis, Topology and Applications (July 29 – August 11, 2018, Vyshnytsya, Chernivtsi Region, Ukraine). Book of Abstracts. P. 24–25.

[2] Karlova O. *Baire classification of mappings with values in subsets of finite-dimensional spaces*, Nauk. Visn. Cherniv. Univ. Mathematics. **239**, (2005), 59–65 (in Ukrainian, English summary).

[3] Karlova O., Mykhaylyuk V. *Functions of the first Baire class with values in metrizable spaces*, Ukr. Math. J. **58** (4) (2006), 567–571 (in Ukrainian, English summary).

[4] Kuratowski K. *Topology. Volume 1*, Moscow, 1966 (in Russian).

[5] Engelking R. *General topology*, Moscow, 1986 (in Russian).

Надійшло 19.12.2019

Olena Karlova, Mykhaylo Lukan *Weak R-spaces and uniform limit of sequences of the first Baire class functions*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 2 (2019), 39–47.

A function $f : X \to Y$ between topological spaces X and Y is called a Baire-one function, if there exists a sequence of continuous functions $f_n : X \to Y$ such that $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for every $x \in X$. We denote the collection of all Baire-one functions between X and Y by $\mathrm{B}_1(X, Y)$. It is know that the class $\mathrm{B}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ is closed under uniform limits. Moreover, Karlova and Mykhaylyuk proved in 2006 that the class $\mathrm{B}_1(X, Y)$ is closed under uniform limits if X is a

topological space and Y is metrizable path-connected and locally path-connected space. From the other hand, it was shown by Karlova and Mykhaylyuk that there exist a path-connected (but not locally path-connected) subset $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ and a sequence of Baire-one functions $f_n : [0,1] \to Y$ which tends uniformly to a function $f : [0,1] \to Y$ such that f does not belong to the first Baire class.

Therefore, it is actual to study spaces Y for which the class $\mathrm{B}_1(X,Y)$ is closed under uniform limits. The notion of an R-space was introduced by Karlova, who proved that if Y is an R-space, then $\mathrm{B}_1(X,Y)$ is closed under uniform limits for an arbitrary topological space X. Unfortunately, the definition of an R-space is rather strong in order to include many curves on the plane. For example, a unit circle is an R-space, but an ellipse is not. Consequently, we need to find a weaker condition on the space Y under which Y remains favorable for the question on uniform limits of Baire-one functions.

We introduce a class of weak R-spaces which includes convex subsets of normed spaces and some other curves than a circle on the plane, and prove that the uniform limit f of a sequence of Baire-one functions $f_n : X \to Y$ between a topological spaces X and a weak R-space Y belongs to the first Baire class.