Турчина Н. І.

ПРО ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ҐРІНА ПІВПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ ТА НЕЙМАНА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ОСОБЛИВОСТЯМИ І ВИРОДЖЕННЯМИ

Розглядаються задачі Діріхле та Неймана в півпросторі за x для двох параболічних рівнянь другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами і виродженнями при $t = 0$. Побудовано та досліджено властивості вектор-функції Ґріна цих задач.

Ключові слова і фрази: параболічне рівняння зі зростаючими коефіцієнтами, виродження на початковій гіперплощині, просторова задача Діріхле, просторова задача Неймана, ядро Пуассона, однорідна функція Ґріна.

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна
e-mail: *nataturchina@gmail.com*

Вступ

У теорії випадкових процесів і статистичній радіотехніці [1, 9, 10] виникають параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просто-ровими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти є сталими. Ці рівняння є рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова нормальних марковських процесів [10] (с. 177–179). Серед таких рівнянь є рівняння

$$(Lu)(t,x) := \partial_t u(t,x) - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l}u(t,x) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j\partial_{x_j}u(t,x) - a_0u(t,x) -$$

$$-b\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}(x_ju(t,x)) = f(t,x), t>0, x:=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

в якому a_{jl}, a_j, a_0 і b – задані дійсні числа, причому $b \neq 0$, а матриця $A_0 := (a_{jl})_{j,l=1}^n$ симетрична та додатно визначена. Зауважимо, що існує обернена мариця $A_0^{-1} := (a^{jl})_{j,l=1}^n$. У

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K20.

праці [3] для рівняння (1) наведено результати дослідження фундаменталь-ного розв'язку задачі Коші (ФРЗК), коректної розв'язності та інтегрального зображен-ня розв'язків задачі Коші. При цьому отримано таку явну формулу для ФРЗК:

$$Z(t,x,\xi) = (4\pi q(t))^{-n/2}(\det A_0)^{-1/2}\exp\{(a_0+nb)t-$$

$$-\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{n} a^{jl}(X_j(t)-\xi_j)(X_l(t)-\xi_l)\}, t>0, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

де $X_j(t) := \bar{x}_j(t) + a_j p(t)$, $j \in \{1,\dots,n-1\}$, $X_n(t) := \bar{x}_n(t)$, $\bar{x}_j(t) := e^{bt}x_j$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $p(t) := \frac{1}{b}(e^{bt}-1)$, $q(t) := \frac{1}{2b}(e^{2bt}-1)$, $t>0$.

У статті [11] для частинного випадку рівняння (1), коли $a_{jl} = a^2\delta_{jl}$, де δ_{jl} – символ Кронекера, побудовано вектор-функції Ґріна (ВФҐ) півпросторових задач Діріхле і Неймана та досліджено властивості елементів ВФҐ. У праці [6] ці результати застосовуються до повного описання деяких класів розв'язків розглянутих в [11] задач у припущенні, що рівняння і крайові умови однорідні.

Дана стаття присвячена узагальненню результатів з [11] на загальне рівняння (1). Крім того, отримуються аналогічні результати для рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині вигляду

$$(L_0u)(t,x) := \partial_t u(t,x) - \alpha(t)\Bigg(\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l}u(t,x) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\partial_{x_j}u(t,x)+$$

$$+b\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}(x_j u(t,x))\Bigg) - a_0\beta(t)u(t,x) = f(t,x), t\in(0,T], x\in\mathbb{R}^n, \qquad (3)$$

де a_{jl}, a_j, a_0 і b – такі самі сталі, що й в рівнянні (1), T – задана додатна стала, α – неперервна на $[0,T]$ функція така, що $\alpha(0)=0, \alpha(t)>0$ для $t>0$, функція $\beta : (0,T] \to \mathbb{R}$ неперервна і $|\beta(t)| \to \infty$ при $t \to 0$.

Особливістю рівнянь (1) і (3) є те, що в них коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними необмежено зростають при $|x| \to \infty$, а рівняння (3), крім того, містить ще виродження при $t=0$.

1 Постановка задач і допоміжні відомості

Користуватимемося такими позначеннями: $\mathbb{Z}_+^n$ – сукупність усіх n-вимірних мультиіндексів $k := (k_1,\dots,k_n)$; $|k| := k_1+\dots+k_n$, якщо $k\in\mathbb{Z}_+^n$; $x := (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, x' := (x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, $x^0 := (x',0)$, де, як звичайно, $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний дійсний евклідовий простір, n – задане натуральне число; $\mathbb{R}_+^n := \{x\in\mathbb{R}^n | x_n>0\}$, $\mathbb{R}_0^n := \{x\in\mathbb{R}^n | x_n=0\}$, $\Pi_H := \{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1} | t\in H, x\in\mathbb{R}^n\}$, $\Pi'_H := \{(t,x')\in\mathbb{R}^n | t\in H, x'\in\mathbb{R}^{n-1}\}$, якщо $H\subset\mathbb{R}^1$; $\partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1}\dots\partial_{x_n}^{k_n}$, $\partial_{x'}^{k'} := \partial_{x_1}^{k_1}\dots\partial_{x_{n-1}}^{k_{n-1}}$, якщо $k\in\mathbb{Z}_+^n, k'\in\mathbb{Z}_+^{n-1}$, $x\in\mathbb{R}^n$ і $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, де $\partial_y^l := \frac{\partial^l}{\partial y^l}$, l – натуральне число, $y\in\mathbb{R}^1$; $A(t,\tau) := \int\limits_\tau^t \alpha(\gamma)d\gamma$, $B(t,\tau) := \int\limits_\tau^t \beta(\gamma)d\gamma$; $\vec{a} := (a_1,\dots,a_{n-1})$; $X(t) := (X_1(t),\dots,X_n(t))$, $\bar{x}(t) := (\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_n(t))$.

Нехай Ω – область в $\mathbb{R}^n$ з межею S, $\vec{\nu}(y)$ – орт зовнішньої стосовно Ω нормалі до S у точці $y \in S$, $\nu_j(y), j \in \{1, \ldots, n\}$, – координати вектора $\vec{\nu}(y)$. Як відомо (див., наприклад, [8] (с. 15–16)), конормаллю для рівняння (1), коефіцієнти групи старших членів якого утворюють матрицю A_0, у точці $y \in S$ називається вектор

$$\vec{\nu}_{A_0}(y) := \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}\nu_j(y), \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{jn}\nu_j(y) \right), \tag{4}$$

а конормальною похідною у точці $y \in S$ від функції $u(t, x), t > 0, x \in \Omega$, називається функція

$$\partial_{\vec{\nu}_{A_0}(y)} u(t, x) := \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\nu_j(y)\partial_{x_l} u(t, x), t > 0, x \in \Omega. \tag{5}$$

Якщо $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, то $S = \mathbb{R}^n_0$ і для будь-якого $y \in \mathbb{R}^n_0$ $\nu_j(y) = 0, j \in \{1, \ldots, n-1\}, \nu_n(y) = -1$. Тоді формули (4) і (5) набудуть відповідно вигляду

$$\vec{\nu}_{A_0}(y) = (-a_{n1}, \ldots, -a_{nn}), y \in \mathbb{R}^n_0, \tag{6}$$

і

$$\partial_{\vec{\nu}_{A_0}(y)} u(t, x) := -\sum_{l=1}^{n} a_{nl}\partial_{x_l} u(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \mathbb{R}^n_0. \tag{7}$$

Нехай L – диференціальний вираз з (1), а L^* – відповідний йому спряжений вираз, тобто вираз

$$(L^*v)(\tau, \xi) := -\partial_\tau v(\tau, \xi) - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l} v(\tau, \xi) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\partial_{\xi_j} v(\tau, \xi) - a_0 v(\tau, \xi) +$$
$$+ b\sum_{j=1}^{n} \xi_j\partial_{\xi_j} v(\tau, \xi). \tag{8}$$

Правильною є така дивергентна рівність:

$$(vLu - uL^*v)(\tau, \xi) = \partial_\tau(uv)(\tau, \xi) - \sum_{j=1}^{n} \partial_{\xi_j} \sum_{l=1}^{n} a_{jl}(v\partial_{\xi_l} u - u\partial_{\xi_j} v)(\tau, \xi) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{\xi_j}(a_j uv)(\tau, \xi) - b\sum_{j=1}^{n} \partial_{\xi_j}(\xi_j uv)(\tau, \xi). \tag{9}$$

Зінтегрувавши рівність (9) за $\tau \in (t_1, t_2), t_1 < t_2$ і за $\xi \in \mathbb{R}^n_+$, для підходящих функцій u і v отримаємо формулу Гріна–Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} (vLu - uL^*v)(\tau, \xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n_+} (uv)|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} d\xi -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{\mathbb{R}^n_0} (v\partial_{\vec{\nu}_{A_0}} u - u\partial_{\vec{\nu}_{A_0}} v)(\tau, \xi^0)d\xi^0, \tag{10}$$

де $\vec{\nu}_{A_0}$ визначається рівністю (6) і не залежить від $\xi^0 := (\xi', 0)$, а $d\xi^0 = d\xi'$.

Для рівнянь (1) і (3) розглядатимемо відповідно такі задачі:

$$\begin{cases}(Lu)(t,x) = f(t,x), (t,x) \in \Pi^+_{(0,T]},\\(B^{(l)}u)(t,x)|_{x_n=0} = g(t,x'), (t,x') \in \Pi'_{(0,T]},\\u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n_+,\end{cases} \tag{11_l}$$

і

$$\begin{cases}(L_0u)(t,x) = f(t,x), (t,x) \in \Pi^+_{(0,T]},\\(B^{(l)}u)(t,x)|_{x_n=0} = g(t,x'), (t,x') \in \Pi'_{(0,T]},\\(u(t,x)\exp\{a_0B(T,t)\})|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n_+,\end{cases} \tag{12_l}$$

де $l \in \{1,2\}, B^{(1)} = 1$ (умова Діріхле), $B^{(2)} = \partial_{\vec{\nu}_{A_0}}$ (умова Неймана), початкова умова в задачах (12_l) зводиться до звичайної умови, якщо інтеграл $B(T,0)$ збігається.

Для побудови ВФҐ цих задач використовується ФРЗК для рівнянь (1) і (3). Як зазначено у вступі, ФРЗК Z для рівняння (1) має вигляд (2). У статті [3] установлено, що функція Z має властивість нормальності, тобто функція $Z(t-\tau,x,\xi)$, в якій τ,ξ – основні, а t,x – параметричні змінні, є ФРЗК для рівняння (8); для похідних від Z справджуються оцінки

$$|\partial^k_x\partial^s_\xi Z(t,x,\xi)| \le C_{ks}(q(t))^{-(n+|k|+|s|)/2}\exp\left\{-c\frac{|\bar{x}(t)-\xi|^2}{q(t)}\right\},$$
$$0 < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \{k,s\} \subset \mathbb{Z}^n_+, \tag{13}$$

в яких C_{ks} і c – додатні сталі, T – фіксоване додатне число; є правильними рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x,\xi)d\xi = e^{(a_0+nb)t}, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

і формула згортки

$$Z(t-\tau,x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t-\gamma,x,y)Z(\gamma-\tau,y,\xi)dy, \tau < \gamma < t, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{15}$$

для довільних гладких і фінітних функцій f і φ розв'язок задачі Коші для рівняння (1) в області $\Pi_{(0,T]}$ з початковою умовою $u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n$, визначається формулою

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{16}$$

Знайдемо формулу, аналогічну формулі (16), для розв'язків рівняння (3) з початковою умовою

$$(u(t,x)\exp\{a_0B(T,t)\})|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

і тим самим отримаємо ФРЗК для рівняння (3). Для цього візьмемо довільно фіксоване число $t_0 \in (0,T)$ і розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases}(L_0 u)(t,x) = f(t,x), (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}, \\ u(t,x)|_{t=t_0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n,\end{cases} \tag{18}$$

в якій f і φ є досить "хороші"функції, зокрема для них існує перетворення Фур'є

$$g(t,\sigma) := F_{x\to\sigma}[f(t,x)], \psi(\sigma) := F_{x\to\sigma}[\varphi(x)], \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{19}$$

де

$$F_{x\to\sigma}[h(x)] := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(x,\sigma)\}h(x)dx.$$

Розв'язок задачі (18) шукаємо у вигляді

$$u(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)] := (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma)\}v(t,\sigma)d\sigma, (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}. \tag{20}$$

Підставивши вираз (20) у (18) і скориставшись властивостями перетворень Фур'є, для функції v отримаємо задачу

$$\partial_t v(t,\sigma) + b\alpha(t)\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\partial_{\sigma_j}v(t,\sigma) = \alpha(t)\Big(- \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\sigma_j\sigma_l + i\sum_{j=1}^{n-1}a_j\sigma_j\Big)v(t,\sigma)+$$
$$+a_0\beta(t)v(t,\sigma) + g(t,\sigma), (t,\sigma) \in \Pi_{(t_0,T]},$$
$$v(t,\sigma)|_{t=t_0} = \psi(\sigma), \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

Розв'язавши цю задачу методом характеристик подібно до того, як у [3] розв'язувалась аналогічна задача для однорідного рівняння (1), отримаємо формулу

$$v(t,\sigma) = \exp\Big\{\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}q_0(t,t_0)\sigma_j\sigma_l - i\sum_{j=1}^{n-1}a_j p_0(t,t_0)\sigma_j + a_0 B(t,t_0)\Big\}\psi(e^{-bA(t,t_0)}\sigma)+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\exp\Big\{\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}q_0(t,\tau)\sigma_j\sigma_l - i\sum_{j=1}^{n-1}a_j p_0(t,\tau)\sigma_j + a_0 B(t,\tau)\Big\}g(\tau, e^{bA(t,\tau)}\sigma)d\tau,$$
$$(t,\sigma) \in \Pi_{(t_0,T]}, \tag{21}$$

де $p_0(t,t_0) := \frac{1}{b}(e^{bA(t,t_0)} - 1)$, $q_0(t,t_0) := \frac{1}{2b}(e^{2bA(t,t_0)} - 1)$. Тоді за допомогою (20) і (21) маємо

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{i(x,\sigma) + \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}q_0(t,t_0)\sigma_j\sigma_l - i\sum_{j=1}^{n-1}a_j p_0(t,t_0)\sigma_j + a_0 B(t,t_0)\Big\}\times$$
$$\times\psi(e^{-bA(t,t_0)}\sigma)d\sigma + (2\pi)^{-n}\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{i(x,\sigma) + \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}q_0(t,\tau)\sigma_j\sigma_l - i\sum_{j=1}^{n-1}a_j p_0(t,\tau)\sigma_j+$$
$$+a_0 B(t,\tau)\Big\}g(\tau, e^{bA(t,\tau)}\sigma)d\sigma, (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}.$$

Зробивши в останніх інтегралах заміну змінної інтегрування σ відповідно за формулами $e^{-bA(t,t_0)}\sigma = \eta$ і $e^{-bA(t,\tau)}\sigma = \eta$, скориставшись рівностями (19) і змінивши порядок інтегрування, прийдемо до формули

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;t_0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi, (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}, \qquad (22)$$

в якій

$$Z_0(t,x;\tau,\xi) := (2\pi)^{-n} e^{a_0 B(t,\tau)+nbA(t,\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Big\{ i(e^{bA(t,\tau)}x + \vec{a}p_0(t,\tau) - \xi, \eta) -$$

$$-(q_0(t,\tau)A_0\eta,\eta)\Big\} d\eta, t_0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де $\vec{a} := (a_1, \dots, a_{n-1})$. Інтеграл з цієї формули обчислюємо за допомогою формули (22) з [3] (див. також [2] (с. 172)) і, врахувавши довільність t_0, отримуємо таку формулу, аналогічну формулі (2):

$$Z_0(t,x;\tau,\xi) = (4\pi q_0(t,\tau))^{-n/2} (\det A_0)^{-1/2} \exp\{a_0 B(t,\tau) + nbA(t,\tau) -$$

$$-\frac{1}{4q_0(t,\tau)} \sum_{j,l=1}^{n} a^{jl} (X_j^{(0)}(t,\tau) - \xi_j)(X_l^{(0)}(t,\tau) - \xi_l)\},$$

$$0 < \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (23)$$

де $X_j^{(0)}(t,\tau) := e^{bA(t,\tau)}x_j + a_j p_0(t,\tau), j \in \{1, \dots, n-1\}$, $X_n^{(0)}(t,\tau) := e^{bA(t,\tau)}x_n$.

Тепер нехай u – розв'язок у $\Pi_{(0,T]}$ задачі (3), (17) з досить гладкими та фінітними функціями f і φ. Функція u є, очевидно, розв'язком задачі (18) при будь-якому $t_0 > 0$ і $\varphi(x) = u(t_0,x), x \in \mathbb{R}^n$. Тому для неї правильне зображення (22). Перейшовши в ньому до границі при $t_0 \to 0$ і скориставшись умовою (17), отримаємо формулу

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi, (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (24)$$

в якій

$$Z_1(t,x;\xi) := \lim_{t_0 \to 0} (Z_0(t,x;t_0,\xi) \exp\{-a_0 B(T,t_0)\}, 0 < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (25)$$

На підставі (23) Z_1 набуває вигляду

$$Z_1(t,x;\xi) = (4\pi q_0(t,0))^{-n/2} (\det A_0)^{-1/2} \exp\{-a_0 B(T,t) + nbA(t,0) -$$

$$-\frac{1}{4q_0(t,0)} \sum_{j,l=1}^{n} a^{jl} (X_j^{(0)}(t,0) - \xi_j)(X_l^{(0)}(t,0) - \xi_l)\},$$

$$0 < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Отже, побудовано вектор-функцію (Z_0, Z_1), яка є ВФҐ задачі Коші (3), (17), при цьому Z_0 є ФРЗК для рівняння (3).

Функція Z_0 має властивості, подібні до наведених вище властивостей ФРЗК Z для рівняння (1), зокрема, для неї справджуються оцінки

$$|\partial_x^k \partial_\xi^s Z_0(t,x;\tau,\xi)| \leq C_{ks}(q_0(t,\tau))^{-(n+|k|+|s|)/2} \exp\left\{a_0 B(t,\tau) + (n+|k|)bA(t,\tau) + \right.$$

$$\left. +\delta_0|\vec{a}|^2 p_0^2(t,\tau)/(4q_0(t,\tau)) - c\frac{|e^{bA(t,\tau)}x-\xi|^2}{q_0(t,\tau)}, 0<\tau<t\leq T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+^n, \quad (26)\right.$$

де δ_0 – найменше власне число матриці A_0, та рівність

$$Z_0(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\gamma,y)Z_0(\gamma,y;\tau,\xi)dy, 0<\tau<\gamma\leq T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (27)$$

2 Означення вектор-функцій Ґріна. Потенціали простого і подвійного шарів

Користуватимемося таким означенням: ВФҐ задач (11_l) і (12_l) називається така ветор-функція $(G_0^{(l)}, G_1^{(l)}, G_2^{(l)})$, що для довільних нескінченно диференційовних і фінітних функцій f, g і φ розв'язок цих задач зображується у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(l)}(t,x;\tau,\xi')g(\tau,\xi')d\xi' +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_2^{(l)}(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi, (t,x)\in\Pi_{(0,T]}.$$

Функція $G_0^{(l)}$ називається однорідною функцією Ґріна, фнкція $G_1^{(l)}$ – ядром Пуассона, а функція $G_2^{(l)}$ – функція впливу початкового миттєвого точкового джерела відповідних задач. Легко переконатись (див., наприклад, [4] (с.60–62)), а також формули (24) і (25) для задачі Коші), що для задач (11_l) справджуються рівності

$$G_2^{(l)}(t,x;\xi) = G_0^{(l)}(t,x;0,\xi), 0<t\leq T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}_+^n, \qquad (28)$$

а для задач (12_l) – рівності

$$G_2^{(l)}(t,x;\xi) = \lim_{t_0\to 0}(G_0^{(l)}(t,x;t_0,\xi)\exp\{-a_0B(T,t_0)\}), 0<t\leq T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}_+^n. \qquad (29)$$

З огляду на це досить побудувати й дослідити функції $G_0^{(l)}$ і $G_1^{(l)}$.

Оскільки для побудови $G_0^{(l)}$ використовуються ядра Пуассона $G_1^{(l)}$, то спочатку треба зайнятися цими ядрами. Вони будуються за допомогою потенціалу подвійного шару для задач Діріхле і потенціалу простого шару для задач Неймана.

Для задач (11_l) потенціал подвійного шару має вигляд

$$u(t,x)=\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\vec{\nu}_{A_0}(\xi^0)} Z(t-\tau,x,\xi)|_{\xi_n=0}\mu(\tau,\xi')d\xi', (t,x)\in \Pi^+_{(0,T]}, \tag{30}$$

потенціал простого шару – вигляд

$$v(t,x)=\int_{t_0}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z(t-\tau,x,\xi)|_{\xi_n=0}\eta(\tau,\xi')d\xi', (t,x)\in \Pi^+_{(0,T]}, \tag{31}$$

а його конормальна похідна – вигляд

$$\partial_{\vec{\nu}_{A_0}(x^0)} v(t,x)=\int_{t_0}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\vec{\nu}_{A_0}(x^0)} Z(t-\tau,x,\xi)|_{\xi_n=0}\eta(\tau,\xi')d\xi', (t,x)\in \Pi^+_{(0,T]}. \tag{32}$$

За допомогою формул (2) і (7) знаходимо, що

$$\begin{aligned}\partial_{\vec{\nu}_{A_0}(x^0)} Z(t,x,\xi)|_{\xi_n=0} &= -\sum_{l=1}^n a_{nl}\partial_{x_l} Z(t,x,\xi)|_{\xi_n=0} = \\ &=: K_1(t,x,\xi') := Z'(t,x,\xi')\bar{x}_n(t)\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\partial_{\vec{\nu}_{A_0}(\xi^0)} Z(t,x,\xi)|_{\xi_n=0} &= -\sum_{l=1}^n a_{nl}\partial_{\xi_l} Z(t,x,\xi)|_{\xi_n=0} = \\ &=: K_2(t,x,\xi') := -Z'(t,x,\xi')x_n,\end{aligned} \tag{34}$$

де

$$Z'(t,x,\xi') := 2^{-n-1}\pi^{-n/2}(\det A_0)^{-1/2}(q(t))^{-n/2-1}\exp\Big\{(a_0+nb+b)t-$$
$$-\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^n a^{jl}(X_j(t)-\xi_j)(X_l(t)-\xi_l)|_{\xi_n=0}\Big\}.$$

Для побудови ядер Пуассона треба знайти границі при $x_n\to 0$ функцій (30) і (32). Почнемо з функції (32). Припустимо, що функція η обмежена в $\Pi'_{(0,T]}$ і задовольняє умову

$$\begin{gathered}\exists C>0\ \exists \alpha\in(0,1]\ \forall\{(t,x'),(\tau,\xi')\}\subset \Pi'_{(0,T]}: \\ |\eta(t,x')-\eta(\tau,\xi')|\le C\big((q(t-\tau))^{\alpha/2}+|\bar{x}'(t-\tau)-\xi'|^{\alpha}\big).\end{gathered} \tag{35}$$

Запишемо (32) у вигляді

$$\begin{aligned}\partial_{\vec{\nu}_{A_0}(x^0)} v(t,x) &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_1(t-\tau,x,\xi')(\eta(\tau,\xi')-\eta(t,x'))d\xi' + \\ &+\eta(t,x')\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_1(t-\tau,x,\xi')d\xi' =: v_1(t,x)+\eta(t,x')v_2(t,x_n).\end{aligned} \tag{36}$$

Щоб дослідити поведінку при $x_n \to 0$ функцій v_1 і v_2, оцінимо спочатку ядро K_1. З додатної визначеності матриці A_0 випливає, що

$$\sum_{j,l=1}^{n} a^{jl} X_j(t) X_l(t)|_{\xi_n=0} \ge \delta_0 |X(t)-\xi|^2|_{\xi_n=0} \ge \frac{\delta_0}{2}|\bar{x}(t)-\xi|^2|_{\xi_n=0} - \delta_0|\vec{a}|^2 p^2(t).$$

Звідси з урахуванням нерівності $p(t)=\frac{2q(t)}{e^{bt}+1} \le 2q(t)$ отримуємо оцінку

$$|K_1(t,x,\xi')| \le C(q(t))^{-n/2-1}\bar{x}_n(t)\exp\big\{-\frac{c}{q(t)}(|\bar{x}'(t)-\xi'|^2+(\bar{x}_n(t))^2)\big\},$$
$$0<t\le T, x\in\mathbb{R}^n_+, \xi'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{37}$$

З нерівностей (35) і (37) випливає оцінка

$$|K_1(t-\tau,x,\xi')(\eta(\tau,\xi')-\eta(t,x'))| \le C_3(q(t-\tau))^{-n/2-1}(\bar{x}_n(t-\tau))^{\varepsilon}\times$$
$$\times\left(\frac{\bar{x}_n(t-\tau)}{\sqrt{q(t-\tau)}}\right)^{1-\varepsilon}\big(q(t-\tau)\big)^{(1-\varepsilon+\alpha)/2}\left(1+\left(\frac{|\bar{x}'(t-\tau)-\xi'|}{\sqrt{q(t-\tau)}}\right)^{\alpha}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-c\left(\left(\frac{|\bar{x}'(t-\tau)-\xi'|}{\sqrt{q(t-\tau)}}\right)^2+\left(\frac{\bar{x}_n(t-\tau)}{\sqrt{q(t-\tau)}}\right)^2\right)\right\}\le$$
$$\le C_4(q(t-\tau))^{-(n-1+\alpha-\varepsilon)/2-1}(\bar{x}_n(t-\tau))^{\varepsilon}\exp\left\{-c_1\frac{|\bar{x}'(t-\tau)-\xi'|^2}{q(t-\tau)}\right\}, \tag{38}$$

де ε – довільно взяте число з проміжку $(0,\alpha)$, а $c_1\in(0,c)$. На підставі (36) і (38) маємо

$$|v_1(t,x)| \le C_4 x_n^{\varepsilon}\int_0^t (q(t-\tau))^{-1+(\alpha-\varepsilon)/2}e^{b\varepsilon(t-\tau)}d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(q(t-\tau))^{-(n-1)/2}\times$$
$$\times\exp\left\{-c_1\frac{|\bar{x}'(t-\tau)-\xi'|^2}{q(t-\tau}\right\}d\xi' \xrightarrow[x_n\to 0]{} 0, \tag{39}$$

бо останній інтеграл збігається.

Залишилось знайти $\lim_{x_n\to 0} v_2(t,x_n)$. Згідно з формулами (19) і (24) з [1] (с.168) та означення функцій K_1 і Z' маємо

$$K_1(t,x,\xi')=(2q(t))^{-1}x_n\exp\{(a_0+nb+2b)t\}F^{-1}_{\eta\to X(t)-\xi}[e^{-(q(t)A_0\eta,\eta)}]|_{\xi_n=0}.$$

Тому

$$v_2(t,x_n)=\frac{x_n}{2}\int_0^t (q(t-\tau))^{-1}\exp\{(a_0+nb+2b)(t-\tau)\}I(t-\tau,x_n)d\tau, \tag{11}$$

де

$$I(t,x_n):=\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F^{-1}_{\eta\to X(t)-\xi}[e^{-(q(t)A_0\eta,\eta)}]|_{\xi_n=0}d\xi'=$$
$$=F_{X'(t)-\xi'\to 0'}[F^{-1}_{\eta'\to X'(t)-\xi'}F^{-1}_{\eta_n\to X_n(t)}[e^{-(q(t)A_0\eta,\eta)}]=$$
$$=F^{-1}_{\eta_n\to X_n(t)}[e^{-(q(t)A_0\eta,\eta)}]|_{\eta'=0'}=F^{-1}_{\eta_n\to X_n(t)}[e^{-a_{nn}(q(t)\eta_n^2}].$$

Скориставшись формулою (27) з [2] (с.168), отримаємо

$$I(t,x_n)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a_{nn}q(t)}}\exp\left\{-\frac{1}{4a_{nn}q(t)}e^{2b(t-\tau)}x_n^2\right\}$$

і, отже,

$$v_2(t,x_n)=\frac{x_n}{4\sqrt{\pi a_{nn}}}\int\limits_0^t(q(t-\tau))^{-3/2}\exp\{(a_0+nb+2b)(t-\tau)-\frac{1}{4a_{nn}q(t-\tau)}e^{2b(t-\tau)}x_n^2\}d\tau.$$

У цьому інтегралі зробимо заміну змінної інтегрування τ за формулою

$$e^{b(t-\tau)}x_n(2\sqrt{a_{nn}q(t-\tau)})^{-1}=\gamma, \tag{40}$$

при цьому $\gamma\to\infty$, якщо $\tau\to t$, і $\gamma=e^{bt}x_n(2\sqrt{a_{nn}q(t)})^{-1}=:c(t,x_n)$ при $\tau=0$. Маємо

$$e^{b(t-\tau)}=\left(\frac{4a_{nn}\gamma^2}{4a_{nn}\gamma^2-2bx_n^2}\right)^{1/2}, d\tau=\frac{2x_n^2}{\gamma(4a_{nn}\gamma^2-2bx_n^2)}d\gamma,$$

$$v_2(t,x_n)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(4a_{nn})^{(a_0/b+n+1)/2}\int\limits_0^\infty\exp\{-\gamma^2\}\frac{\gamma^{a_0/b+n+1}}{(4a_{nn}\gamma^2-2bx_n^2)^{(a_0/b+n+1)/2}}\chi_{[c(t,x_n),\infty)}(\gamma)d\gamma,$$

де χ_Q – характеристична функція множини Q. Використовуючи співвідношення

$$\lim_{x_n\to0}\exp\{-\gamma^2\}\frac{\gamma^{a_0/b+n+1}}{(4a_{nn}\gamma^2-2bx_n^2)^{(a_0/b+n+1)/2}}\chi_{[c(t,x_n),\infty)}(\gamma)=$$
$$=(4a_{nn})^{-(a_0/b+n+1)/2}\exp\{-\gamma^2\},\gamma>0,$$

і рівність $\int\limits_0^\infty\exp\{-\gamma^2\}d\gamma=\frac{\pi}{2}$, за допомогою теореми Лебега про мажорантну збіжність отримуємо

$$\lim_{x_n\to0}v_2(t,x_n)=\frac{1}{2}. \tag{41}$$

З формул (36), (39) і (41) випливає рівність

$$\lim_{x_n\to0}\partial_{\vec{\nu}_{A_0}(x^0)}v(t,x)=\frac{1}{2}\eta(t,x'),(t,x')\in\Pi_{(0,T]}. \tag{42}$$

Для знаходження границі при $x_n\to0$ функції (30) запишемо її у такому вигляді, аналогічному до (36):

$$u(t,x)=u_1(t,x)+\mu(t,x')u_2(t,x_n), \tag{43}$$

де

$$u_1(t,x):=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}K_2(t-\tau,x,\xi')(\mu(\tau,\xi')-\mu(t,x'))d\xi',$$

$$u_2(t,x_n):=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}K_2(t-\tau,x,\xi')d\xi'.$$

Припускаючи, що функція μ обмежена й задовольняє умову (35), так само, як для v_1 і v_2, доводяться співвідношення

$$u_1(t,x) \xrightarrow[x_n\to 0]{} 0, u_2(t,x_n) \xrightarrow[x_n\to 0]{} -\frac{1}{2},$$

а звідси на підставі (43) випливає рівність

$$\lim_{x_n\to 0} u(t,x) = -\frac{1}{2}\mu(t,x'), (t,x') \in \Pi'_{(0,T]}. \tag{44}$$

Для задач (12_l) використовуватимемо потенціал подвійного й простого шарів відповідно в такому вигляді:

$$u_0(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\vec{\nu}_{A_0}(\xi_0)} Z_0(t,x;\tau,\xi)|_{\xi_n=0}\alpha(\tau)\exp\{a_0 B(\tau,t_0)\}\mu_0(\tau,\xi')d\xi', \tag{45}$$

$$v_0(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} Z_0(t,x;\tau,\xi)|_{\xi_n=0}\alpha(\tau)\exp\{a_0 B(\tau,t_0)\}\eta_0(\tau,\xi')d\xi', (t,x) \in \Pi^+_{(t_0,T]}, \tag{46}$$

де Z_0 – функція, означена формулою (23), а t_0 – довільно фіксоване число з проміжку $(0,T)$.

Подібно до того, як доводились рівності (42) і (44), за допомогою формул для Z_0 та оцінок (26) доводяться рівності

$$\lim_{x_n\to 0} \partial_{\vec{\nu}_{A_0}(x_0)} v_0(t,x) = \frac{1}{2}\eta_0(t,x'), \lim_{x_n\to 0} u_0(t,x) = -\frac{1}{2}\mu_0(t,x'), (t,x') \in \Pi'_{(t_0,T]}. \tag{47}$$

3 Ядра Пуассона

Для знаходження ядер Пуассона задач (11_1) і (11_2) розглянемо ці задачі для випадку, коли $f=0$ і $\varphi=0$, та шукатимемо їх розв'язки відповідно у вигляді (30) і (31) з невідомими функціями μ і η. Ці функції треба обрати так, щоб задовольнялися крайові умови. На підставі рівностей (44) і (42) отримаємо, що $\mu=-2g$ і $\eta=2g$. Тому розв'язки $u^{(l)}$ розглядуваних задач (11_l) мають вигляд

$$u^{(l)}(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(l)}(t-\tau,x,\xi')g(\tau,\xi')d\xi', (t,x) \in \Pi^+_{(0,T]}, l \in \{1,2\},$$

де

$$G_1^{(1)}(t,x,\xi') := 2^{-n}\pi^{-n/2}(\det A_0)^{-1/2}(q(t))^{-n/2-1}x_n \exp\Big\{(a_0+nb+b)t-$$

$$-\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{n} a^{jl}(X_j(t)-\xi_j)(X_l(t)-\xi_l)|_{\xi_n=0}\Big\},$$

$$G_1^{(2)}(t,x,\xi') := 2^{-n+1}\pi^{-n/2}(\det A_0)^{-1/2}(q(t))^{-n/2} \exp\Big\{(a_0+nb)t-$$

$$-\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{n} a^{jl}(X_j(t)-\xi_j)(X_l(t)-\xi_l)|_{\xi_n=0}\Big\},$$

$$(t,x)\in(0,T], x\in\mathbb{R}^n_+, \xi'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{48}$$

Аналогічно знаходяться ядра Пуассона задач (12_1) і (12_2) (їх позначатимемо через $G_{10}^{(1)}$ і $G_{10}^{(2)}$), при цьому використовуються потенціали (45) і (46) та рівності (23) і (47). Функції $G_{10}^{(1)}$ і $G_{10}^{(2)}$ визначаються формулами

$$G_{10}^{(1)}(t,x;\tau,\xi') := 2^{-n}\pi^{-n/2}(\det A_0)^{-1/2}(q_0(t,\tau))^{-n/2-1} \exp\Big\{a_0B(t,\tau)+(n+1)bA(t,\tau)-$$

$$-\frac{1}{4q_0(t,\tau)}\sum_{j,l=1}^{n} a^{jl}(X_j^{(0)}(t,\tau)-\xi_j)(X_l^{(0)}(t,\tau)-\xi_l)|_{\xi_n=0}\Big\}\alpha(\tau),$$

$$G_{10}^{(2)}(t,x;\tau,\xi') := 2^{-n+1}\pi^{-n/2}(\det A_0)^{-1/2}(q_0(t,\tau))^{-n/2} \exp\Big\{a_0B(t,\tau)+nbA(t,\tau)-$$

$$\frac{1}{4q_0(t,\tau)}\sum_{j,l=1}^{n} a^{jl}(X_j^{(0)}(t,\tau)-\xi_j)(X_l^{(0)}(t,\tau)-\xi_l)|_{\xi_n=0}\Big\}\alpha(\tau),$$

$$0<\tau<t\le T, x\in\mathbb{R}^n_+, \xi'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{49}$$

Використовуючи формули (48) і (49), додатну визначеність матриці A_0 і, отже, матриці A_0^{-1}, а також твердження

$$\forall r>0\ \exists C_r>0\ \forall z\in\mathbb{R}^n : |z|^r \exp\{-c'|z|^2\} \le C_r \exp\{-c|z|^2\},$$

де c – стала з проміжку $(0,c')$, отримуються такі оцінки для ядер Пуассона задачі (11_l) і $(12_l), l\in\{1,2\}$:

$$|\partial_x^k \partial_{\xi'}^{s'} G_1^{(1)}(t,x,\xi')| \le C_{ks'}(q(t))^{-(n+|k|+|s'|)/2-1} \exp\Big\{-\frac{c}{q(t)}(|e^{bt}x'-\xi'|^2+e^{2bt}x_n^2)\Big\},$$

$$|\partial_x^k \partial_{\xi'}^{s'} G_1^{(2)}(t,x,\xi')| \le C_{ks'}(q(t))^{-(n+|k|+|s'|)/2} \exp\Big\{-\frac{c}{q(t)}(|e^{bt}x'-\xi'|^2+e^{2bt}x_n^2)\Big\},$$

$$0<t\le T, \{x',\xi'\}\subset\mathbb{R}^{n-1}, x_n>0; \tag{50}$$

$$|\partial_x^k \partial_{\xi'}^{s'} G_{10}^{(1)}(t,x;\tau,\xi')| \le C_{ks'}(q_0(t,\tau))^{-(n+|k|+|s'|)/2-1} \exp\{a_0 B(t,\tau)-$$
$$-\frac{c}{q_0(t,\tau)}(|e^{bA(t,\tau)}x'-\xi'|^2 + e^{2bA(t,\tau)}x_n^2)\},$$
$$|\partial_x^k \partial_{\xi'}^{s'} G_{10}^{(2)}(t,x;\tau,\xi')| \le C_{ks'}(q_0(t,\tau))^{-(n+|k|+|s'|)/2} \exp\{a_0 B(t,\tau)-$$
$$-\frac{c}{q_0(t,\tau)}(|e^{bA(t,\tau)}x'-\xi'|^2 + e^{2bA(t,\tau)}x_n^2)\},$$
$$0<\tau<t\le T, \{x',\xi'\}\subset \mathbb{R}^{n-1}, x_n>0. \tag{51}$$

В оцінках (50) і (51) k і s' – довільні мультиіндекси відповідно з $\mathbb{Z}_+^n$ і $\mathbb{Z}_+^{n-1}$, $C_{ks'}$ і c – деякі додатні сталі.

4 Однорідні функції Ґріна

Як і в працях [4, 5], однорідні функції Ґріна $G_0^{(l)}$ і $G_{00}^{(l)}$ задач (11_l) і $(12_l), l \in \{1,2\}$, визначаються формулами

$$G_0^{(l)}(t,x,\xi) = Z(t,x,\xi) - V^{(l)}(t,x,\xi), 0<t\le T, \{x,\xi\}\subset \mathbb{R}_+^n,$$
$$G_{00}^{(l)}(t,x;\tau,\xi) = Z_0(t,x;\tau,\xi) - V_0^{(l)}(t,x;\tau,\xi), 0<\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset \mathbb{R}_+^n, \tag{52}$$

де Z і Z_0 – ФРЗК для відповідно рівнянь (1) і (3), а

$$V^{(l)}(t,x,\xi) := \int_0^t d\gamma \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(l)}(t-\gamma,x,y')B^{(l)}Z(\gamma,(y',0),\xi)dy', 0<t\le T, \{x,\xi\}\subset \mathbb{R}_+^n,$$
$$V_0^{(l)}(t,x;\tau,\xi) := \int_\tau^t d\gamma \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_{10}^{(l)}(t,x;\gamma,y')B^{(l)}Z_0(\gamma,(y',0),\xi)dy',$$
$$0<t<\tau\le T, \{x,\xi\}\subset \mathbb{R}_+^n, \tag{53}$$

Якщо для функцій Z, Z_0, і $G_1^{(l)}, G_{10}^{(l)}$ є відповідно явні вирази (2), (23) і (48), (49),то для функцій $V^{(l)}$ і $V_0^{(l)}$ отримати явні вирази, взагалі кажучи, не можна. Але для окремих частинних випадків це вдається зробити. Так, у праці [11] це зроблено для рівняння (1) у випадку, коли $a_{jl} = a^2\delta_{jl}$, $\{j,l\}\subset\{1,\dots,n\}$, $a_s = 0, s\in\{0,1,\dots,n\}$.

За допомогою оцінок (13), (26), (50) і (51) та формул (53) способом, подібним до використаного в [4, 7], отримуються такі оцінки для $V^{(l)}$ і $V_0^{(l)}$:

$$|\partial_x^k\partial_\xi^s V^{(l)}(t,x,\xi)| \le C_{ks}(q(t))^{-(n+|k|+|s|)/2}\exp\{-\frac{c}{q(t)}(|e^{bt}x-\xi|^2 + e^{2bt}x_n^2+\xi_n^2)\},$$
$$0<t\le T, \{x,\xi\}\subset \mathbb{R}_+^n;$$
$$|\partial_x^k\partial_\xi^s V_0^{(l)}(t,x;\tau,\xi)| \le C_{ks}(q_0(t,\tau))^{-(n+|k|+|s|)/2}\exp\{a_0B(t,\tau)-$$
$$-\frac{c}{q_0(t,\tau)}(|e^{bA(t,\tau)}x-\xi|^2 + e^{2bA(t,\tau)}x_n^2+\xi_n^2)\}, 0<\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset \mathbb{R}_+^n,$$

де k і s – довільні мультиіндекси з $\mathbb{Z}_+^n, l\in\{1,2\}$, C_{ks} і c – деякі додатні сталі.

З рівностей (52) та оцінок (13), (26) і (54) випливають такі оцінки для однорідних функцій Ґріна:

$$|\partial_x^k \partial_\xi^s G_0^{(l)}(t,x,\xi)| \le C_{ks}(q(t))^{-(n+|k|+|s|)/2} \exp\Big\{-\frac{c}{q(t)}(|e^{bt}x-\xi|^2\Big\},$$
$$0<t\le T, \{x,\xi\}\subset \mathbb{R}_+^n;$$
$$|\partial_x^k \partial_\xi^s G_{00}^{(l)}(t,x;\tau,\xi)| \le C_{ks}(q_0(t,\tau))^{-(n+|k|+|s|)/2} \exp\Big\{a_0 B(t,\tau)-$$
$$-\frac{c}{q_0(t,\tau)}(|e^{bA(t,\tau)}x-\xi|^2)\Big\}, 0<\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset \mathbb{R}_+^n.$$

У цих оцінках k і s – довільні мультиіндекси з $\mathbb{Z}_+^n, l\in\{1,2\}$, C_{ks} і c – деякі додатні сталі.

Функції $G_0^{(l)}$ і $G_{00}^{(l)}$ мають властивості, характерні для нормальних параболічних крайових задач, якими є задачі (11_l) і (12_l). Ці властивості (нормальність і формула згортки) є аналогами відповідних властивостей ФРЗК Z і Z_0, наведених вище (див. зокрема, формули (15) і (27)). Вони доводяться аналогічно, при цьому використовується формула Ґріна–Остроградського (10) і подібна формула для рівняння (3).

Зауваження. *Випадок, коли в рівняннях (1) і (3) коефіцієнтом при похідній за* x_n *першого порядку є* $bx_n + a_n$, $a_n \neq 0$, *розглядається аналогічно, тільки в цьому випадку не отримується явних формул для ядер Пуассона.*

5 Висновки

Одержані в статті результати для елементів вектор-функції Ґріна крайових задач для параболічних рівнянь другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині певним чином показують, як впливають на властивості вектор-функцій Ґріна наявність зростаючих коефіцієнтів і вироджень при $t=0$ у рівняннях. Ці результати можуть використовуватися для встановлення коректної розв'язності задач (11_l) і (12_l), інтегрального зображення та властивостей їх розв'язків.

Список літератури

[1] Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. Москва, Наука, 1969, 511 с.

[2] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1988, 512 с.

[3] Заболотько Т. О., Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. *Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування.* Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер. матем. 2012, **2** (2–3), 81–89.

[4] Ивасишен С. Д. Линейные параболические граничные задачи. Киев, Выща школа, 1987, 72 с.

[5] Ивасишен С. Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. Киев, Выща школа, 1990, 200 с.

[6] Івасишен С. Д., Турчина Н. І. *Характеризація розв'язків крайових задач для модельного рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова нормального марковського процесу.* Наук. вісті НТУУ "КПІ"2015, **4** (102), 63–68.

[7] Івасишен С. Д., Турчина Н. І. *Матриця Гріна модельної крайової задачі з векторною параболічною вагою.* Мат. Методи та фіз.-мех. поля 2017, **60** (4), 25–39.

[8] Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Москва, Изд-во иностр. лит., 1957, 256 с.

[9] Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. Москва, Сов. радио, 1975, 704 с.

[10] Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. Москва, Сов. радио, 1977, 488 с.

[11] Турчина Н. І., Івасишен С. Д. *Вектор-функції Ґріна крайових задач для модельного рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова нормального марковського процесу.* Буковинський мат. журн. 2014, **2** (1), 118–124.

Список літератури

[1] Bharucha-Reid A. T. Elements of the theory of Markov processes and their applications. New York, Toronto, London, MC Graw-hill Book Company, INC, 1960.

[2] Vladimirov V. S. Equations of mathematical physics. Moscow, Nauka,

[3] Zabolot'ko T. O., Ivasyshen S. D., Pasichnyk G. S. *On the fundamental solution of the Cauchy problem for some parabolic equations with increasing coefficients and applications.* Scientific Herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University. Series of Math. 2012. **2**, (2–3), 81–89.

[4] Ivasyshen S. D. Linear parabolic boundary value problems. Vyshcha Shkola, Kyiv, 1987, 72 p.

[5] Ivasyshen S. D. Green's matrix of parabolic boundary value problems. Vyshcha Shkola, Kyiv, 1988, 512 p. 1990, 200 p.

[6] Ivasyshen S. D., Turchyna N. I. Characterizition solutions of boudary value problems for the model Fokker–Planck–Kolmogorov equation of a normal Markovian process. Naukovi visti NTUU "KPI"2015, **4** (102), 63–68.

[7] Ivasyshen S. D., Turchyna N. I. Green's matrix for model boundary value problem with vector parabolic weight. Math. Methods and Physicomech. Fields 2017, **60** (4), 25–39.

[8] Miranda K. Elliptic type partial differential equations, Moscow, iz-vo inostr. lit. 1957, 256 p.

[9] Tikhonov V.I., Kulman N.K. Non-linear filtering and quasicoherent signal reception. Moscow, Sov. radio, 1975, 704 p.

[10] Tikhonov V.I., Mironov M.A. Markovian processes. Moscow, Sov. radio 1977, 488 p.

[11] Turchyna N. I., Ivasyshen S. D. *Green's vector function of boundary value problems for the model Fokker–Planck–Kolmogorov equation of a normal Markovian process.* Bukovinian Math. J. 2014, **2** (1), 118–124.

Надійшло 12.11.2019

Turchyna N. I. *About Green's vector functions of Dirichlet and Neumann semi-space problems for second-order parabolic equations with specificities and degenerations*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 2 (2019), 117–132.

In this paper, we consider the Dirichlet and Neumann problems in the domain $\Pi^{+}_{(0,T]} := \{(t,x) \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n_+\}$, $\mathbb{R}^n_+ := \{x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$, for two second-order parabolic equations. In both equations, the coefficients at the second-order derivatives with respect to x are constant, and the coefficients at the first-order derivatives with respect to x_j are functions $bx_j+a_j, j \in \{1, \dots, n\}$ where $\{b, a_j\} \subset \mathbb{R}^1$, moreover $b \neq 0$ and $a_n = 0$. The second equation also contains degeneration at $t = 0$. For such problems, Green's vector functions are constructed, estimates of the components of these functions and their derivatives are obtained. In order to construct the Green's vector functions we use the fundamental solutions of the Cauchy problem for the equations and parabolic potentials of the simple and double layers. The obtained results could be used for establishing the correct solvability of the boundary value problems, integral representation and the properties of their solutions.