Bukovinian Math. Journal. 2019, **7**, 1, 82–98 Буковинський матем. журнал 2019, Т.7, №1, 82–98

Пукальський І.Д., Яшан Б.О.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В НЕЛОКАЛЬНІЙ КРАЙОВІЙ ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Досліджується задача оптимального керування системою, що описується задачею з косою похідною та інтегральною умовою за часовою змінною для параболічного рівняння другого порядку. Розглянуто випадки внутрішнього, стартового і межового керування. Критерій якості задається сумою об'ємних та поверхневих інтегралів. За допомогою принципу максимуму і апріорних оцінок встановлено існування і єдиність розв'язку нелокальної параболічної крайової задачі з виродженням. Коефіцієнти параболічного рівняння і крайової умови допускають степеневі особливості довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. Знайдено оцінки розв'язку нелокальної крайової задачі та його похідних в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Встановлено необхідні і достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується нелокальною крайовою задачею для параболічного рівняння з виродженням.

Ключові слова і фрази: інтерполяційні нерівності, оптимальне керування, нелокальна задача, виродження.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна (Пукальський І.Д.)
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна (Яшан Б.О.)
e-mail: *bohdanjaschan94@gmail.com (Yashan B.O.)*

Вступ

Теорія оптимального керування системами, що описуються рівняннями, багата результатами і активно розвивається в наш час. Її основи вперше систематично описано в монографії [1]. Важливі результати цієї теорії у випадку еволюційних рівнянь, що задані на обмеженому часовому проміжку, отримані, зокрема, в працях [2, 3, 4, 5]. У роботах [6, 7] – стан керованої системи описується задачею Діріхле для лінійних параболічних рівнянь. Зокрема, у роботі [3] досліджуються задачі стартового оптимального керування, а у праці [7] розглядається випадок фінального спостереження. У роботі [4] стан системи також описується задачею Діріхле, але досліджується випадок межового

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 49J20, 34B10.

керування. У [8] досліджено задачу оптимального керування для лінійного параболічного рівняння з необмеженими коефіцієнтами в головній частині еліптичного оператора у випадку, коли керування задане на частині межі області визначення рівняння. Робота [5] присвячена вивченню задач оптимального керування системами, стан яких описується рівнянням теплопровідності з динамічною крайовою умовою. У цій роботі шукають оптимальний коефіцієнт теплопередачі, що знаходиться в крайовій умові, і розглядають випадок розподіленого спостереження.

Задачам вибору оптимального керування системами, що описуються параболічними крайовими задачами з обмеженим внутрішнім керуванням, присвячено праці [9, 10]. Функціонал якості визначається об'ємним інтегралом.

У цій статті розглядається задача з косою похідною та інтегральною умовою за часовою змінною для параболічного рівняння із степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайової умови за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і принципу максимуму доведено існування єдиного розв'язку поставленої задачі та встановлено оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою. Одержані результати використовуються для встановлення необхідних та достатніх умов існування оптимального розв'язку систем, що описуються крайовою задачею з внутрішнім, стартовим та межовим обмеженим керуванням і інтегральними критеріями якості.

1 Результати

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай D обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \le n-1$. Позначимо через $Q_{(0)} = \{(t,x) | t \in [0,T]), x \in \Omega\} \cup \{(t,x), t = \eta, x \in D\}$, $\eta \in (0,T)$, $\Gamma = [0,T) \times \partial\Omega$.

Розглянемо в області $Q = [0,T) \times D$ задачу знаходження функцій (u,q), $q = (q_1, q_2, q_3)$, на яких функціонал

$$I(q) = \int_0^T dt \int_D F_1(t,x;u(t,x;q),q_1(t,x))dx + \int_D F_2(x;u(T,x;q),q_2(x))dx +$$

$$+ \int_0^T dt \int_{\partial D} F_3(t,x;u(t,x;q),q_3(t,x))d_xS \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \{q | q_1 \in C^{\alpha}(Q)$, $q_2 \in C^{2+\alpha}(D)$, $q_3 \in C^{1+\alpha}(Q)$, $\nu_{11}(t,x) \le q_1 \le \nu_{12}(t,x)$, $\nu_{21}(t,x) \le q_2 \le \nu_{22}(t,x)$, $\nu_{31}(t,x) \le q_3 \le \nu_{32}(t,x), \}$, із яких $u(t,x;q_1(t,x),q_2(x),q_3(t,x))$ задовольняє при $(t,x) \in Q^{(0)} = Q \backslash Q_{(0)}$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\Big]u = f(t,x;q_1(t,x)), \tag{2}$$

інтегральну умову за часовою змінною

$$(Bu)(x) \equiv u(0,x;q) + \int_0^T R(\tau,x)u(\tau,x;q)d\tau = \varphi(x;q_2(x)), \tag{3}$$

і на бічній поверхні Γ крайову умову

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B_1u-\psi)(t,x)=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}\Big[\sum_{k=1}^{n}b_k(t,x)\partial_{x_k}u(t,x;q)+b_0(t,x)u(t,x;q)-\psi(t,x,q_3(t,x))\Big]=0. \qquad (4)$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціальних виразів L і B_1 у точці $P(t,x)\in Q\backslash Q_{(0)}$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)},t)$, $s_2(\beta_i^{(2)},x)$: $s_1(\beta_i^{(1)},t)=|t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\eta|\le 1$, $s_1(\beta_i^{(1)},t)=1$ при $|t-\eta|\ge 1$; $s_2(\beta_i^{(2)},x)=\rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x)\le 1$, $s_2(\beta_i^{(2)},x)=1$ при $\rho(x)\ge 1$, $\rho(x)=\inf\limits_{z\in\overline{\Omega}}|x-z|$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\nu\in\{1,2\}$, $\beta^{(\nu)}=(\beta_1^{(\nu)},\dots,\beta_n^{(\nu)})$, $\beta=(\beta^{(1)},\beta^{(2)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(4). Позначимо через l, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\mu_j^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$, $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ – дійсні числа, $q^{(\nu)}\ge 0$, $\gamma^{(\nu)}\ge 0$, $l\ge 0$, $\mu_j^{(\nu)}\ge 0$, $j\in\{0,1,\dots,n\}$, $\delta^{(\nu)}\ge 0$, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\}=l-[l]$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $R_i(t^{(1)},x^{(2)})$ – довільні точки із $Q^{(0)}$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$,
$x^{(1)}=(x_1^{(1)},\dots,x_i^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)}=(x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)}\dots,x_n^{(1)})$.

Позначимо через $H^l(\gamma;\beta;q;Q)$ множину функцій u, які мають неперервні похідні в $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_t^s\partial_x^r$, $2s+|r|\le[l]$, для яких скінченна норма

$$||u;\gamma;\beta;0;Q||_0=\{\sup_{\overline{Q}}|u|\}\equiv||u;Q||_0,$$

$$||u;\gamma;\beta;q;Q||_l=\sum_{2s+|r|\le[l]}||u;\gamma;\beta;q;Q||_{2s+|r|}+\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_l,$$

де, наприклад,

$$||u;\gamma;\beta;q;Q||_{2s+|r|}\equiv\sup_{P\in\overline{Q}}[s_1(q^{(1)}+2s\gamma^{(1)},t)s_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},x)|\partial_t^s\partial_x^r u(P)|\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}s_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t)s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x)],$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\rangle_l\equiv\sum_{2s+|r|=[l]}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}[\sup_{(P_2R_\nu)\subset Q}[s_1(q^{(1)}+2s\gamma^{(1)},t^{(2)})s_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},\widetilde{x})\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}s_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(2)})s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\widetilde{x})|\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)-\partial_t^s\partial_x^r u(R_\nu)|\times$$

$$\times|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\{l\}}s_1(\{l\}(\gamma^{(1)}-\beta_\nu^{(1)}),t^{(2)})s_2(\{l\}(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\widetilde{x})]+\sup_{(P_1P_2)\subset\overline{Q}}[s_1(q^{(1)}+l\gamma^{(1)},\widetilde{t})\times$$

$$\times s_2(q^{(2)}+(2s+\{l\})\gamma^{(2)},x^{(1)})\prod_{i=1}^{n}s_1(-r_i\beta_i^{(1)},\widetilde{t})s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(1)})|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2}\}}\times$$

$$\times|\partial_t^s\partial_x^r u(P_1)-\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)|\,]\Big\},$$

$|r| = r_1 + \cdots + r_n$, $s_1(q, \widetilde{t}) = \min(s_1(q, t^{(1)}), s_2(q, t^{(2)}))$, $s_2(q, \widetilde{x}) = \min(s_2(q, x^{(1)}), s_2(q, x^{(2)}))$.

Щодо задачі (1)–(4) вважаємо виконаними умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\forall (t, x) \in Q \backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(t, x) s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_1(\beta_j^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x) s_2(\beta_j^{(2)}, x) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2, \tag{5}$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі та $s_1(\mu_i^{(1)}, t) s_2(\mu_i^{(2)}, x) A_i \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $s_1(\mu_0^{(1)}, t) s_2(\mu_0^{(2)}, x) A_0 \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $A_0 \geq 0$, $s_1(\delta^{(1)}, t) s_2(\delta^{(2)}, x) b_0 \in H^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_1(\beta_j^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x)\ s_2(\beta_j^{(2)}, x) A_{ij} \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x) b_i \in$ $\in H^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, вектори $\overrightarrow{b}^{(s)} = \{b_1^{(s)}, \ldots, b_n^{(s)}\}$, $b_i^{(s)} = s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x) b_i$ і $\overrightarrow{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $e_i = b_i (\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2)^{-\frac{1}{2}}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(t, x) \in \Gamma^{(2)}$ кут менший за $\frac{\pi}{2}$, $b_0(t, x)\Big|_{\Gamma^{(2)}} > 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow z \in \partial D} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(t, x) \frac{\partial R(t,x)}{\partial x_k} = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow z \in \partial D} [\psi(0, x; q_3(0, x)) + \int\limits_0^T R(t, x) \psi(t, x; q_3(t, x)) dt - B_1 \varphi(x, q_2(x))] = 0$; $\sup\limits_{x \in D} \int\limits_0^T |R(t, x)| dt \leq \lambda_0 < 1$, $R(t, x) \in C^{2+\alpha}(D)$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$;

б) $\nu_{11} \in C^{\alpha}(Q)$, $\nu_{12} \in C^{\alpha}(Q)$, $f(t, x; q_1(t, x)) \equiv F(t, x) \in H^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $\nu_{21} \in C^{2+\alpha}(D)$, $\nu_{22} \in C^{2+\alpha}(D)$, $\varphi(x; q_2(x)) \equiv \Phi(x) \in H^{2+\alpha}(\widetilde{\gamma}; \widetilde{\beta}; 0; D)$, $\nu_{31} \in C^{1+\alpha}(Q)$, $\nu_{32} \in C^{1+\alpha}(Q)$, $\psi(t, x; q_3(t, x)) \equiv G(t, x) \in H^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $\gamma^{(\nu)} = \max\{\max\limits_i(\beta_i^{(\nu)}), \max\limits_i(\mu_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}, \delta^{(\nu)}\}$, $\widetilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$, $\widetilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\nu \in \{1, 2\}$;

в) функції $F_1(t, x; u; q_1)$, $f(t, x; q_1(t, x))$, $F_2(x; u; q_2)$, $\varphi(x; q_2(x))$, $F_3(t, x; u; q_3)$, $\psi(t, x; q_3(t, x))$ мають похідні другого порядку за змінними $(u; q_1)$, (u, q_2), (u, q_3), які належать як функції змінних (t, x), x відповідно просторам $C^{\alpha}(Q)$, $C^{2+\alpha}(D)$, $C^{1+\alpha}(\Gamma)$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (2)–(4) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2)–(4) *із простору* $H^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$ *і справджується нерівність*

$$||u; \gamma; \beta; 0; Q||_{2+\alpha} \leq c(||f; \gamma; \beta; 0; Q||_{\alpha} + ||\varphi; \widetilde{\gamma}; \widetilde{\beta}; 0; D||_{2+\alpha} + ||\psi; \gamma; \beta; 0; Q||_{1+\alpha}). \tag{6}$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку коректну розв'язність крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (2)–(4).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами.

Нехай $Q_m = Q \cap \{(t, x) \in Q \mid s_1(1, t) \geq m_1^{-1}, s_2(1, x) \geq m_2^{-1}\}$, $m = (m_1, m_2)$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ – послідовності областей, які при $m_1 \longrightarrow \infty$, $m_2 \longrightarrow \infty$ збігаються до Q.

Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t, x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x) \partial_{x_i} + a_0(t, x)\Big] u_m(t, x) =$$

$$= f_m(t, x; q_1), \tag{7}$$

які задовольняють умови за змінною t

$$(Bu_m)(x) = \varphi_m(x; q_2) \tag{8}$$

і крайову умову

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} (B_2 u_m - \psi_m)(t, x) \equiv \lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} \Big[\sum_{i=1}^{n} h_i(t, x) \partial_{x_i} u_m + h_0(t, x) u_m - \psi_m(t, x; q_3) \Big] = 0. \tag{9}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0, функції f_m, φ_m, ψ_m визначаються наступним чином. Якщо $(t, x) \in Q_m$, то коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0, функції f_m, φ_m, ψ_m співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, f, φ, ψ_λ відповідно, а в областях $Q \backslash Q_m$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, функцій f, φ, ψ_λ із областей Q_m в області $Q \backslash Q_m$ із збереженням гладкості і норми [11, с. 82].

Для розв'язання задачі (7)–(9) правильна теорема.

Теорема 2. *Нехай $u_m(t, x)$ – класичний розв'язок задачі* (7)–(9) *в області Q і виконані умови а), б). Тоді для $u_m(t, x)$ правильна оцінка*

$$\|u_m; Q\|_0 \le c \|\varphi_m; D\|_0 + \|f_m; Q\|_0 + \|\psi_m; Q\|_0). \tag{10}$$

Правильність оцінки (10) встановлюється за методикою доведення теореми 2.2 [14, с. 25], тобто аналізуються всі можливі розміщення додатного максимуму і від'ємного мінімуму функції $u_m(t, x)$.

Позначимо через $(G_m^{(1)}(t, x, \tau, \xi), G_2^{(2)}(t, x, \tau, \xi))$, [12, с. 141], функцію Гріна крайової задачі

$$\begin{gathered} (L_1 u_m)(t, x) = f_m(t, x; q_1), \\ u_m(0, x) = \varphi_m(x; q_2) \\ \lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} (B_2 u_m - \psi_m)(t, x) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Правильна така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконані умови а), б). Тоді існує функція Гріна задачі* (7) – (9) $(E_m^{(1)}, E_m^{(2)})$ *і справедлива формула*

$$\begin{gathered} u_m(t, x) = \int_0^T d\tau \int_D E_m^{(1)}(T, t, x, \tau, \xi) f_m(\tau, \xi; q_1) d\xi + \int_D E_m^{(1)}(T, t, x, 0, \xi) \varphi_m(\xi; q_2) d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{\partial D} E_m^{(2)}(T, t, x, \tau, \xi) \psi_m(\tau, \xi; q_3) d_\xi S + \\ + \int_0^t d\tau \int_D G_m^{(1)}(t, x, \tau, \xi) f_m(\tau, \xi) d\xi + \int_D G_m^{(1)}(t, x, 0, \xi) \varphi_m(\xi) d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{\partial D} G_m^{(2)}(t, x, \tau, \xi) \psi_m(\tau, \xi) d_\xi S. \end{gathered} \tag{12}$$

Доведення. Роз'язок задачі (7) – (9) шукаємо у вигляді

$$u_m(t,x) = v_m(t,x) + \int\limits_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)u_m(0,\xi)d\xi, \tag{13}$$

де $v_m(t,x)$ – розв'язок задачі (11).

Для $v_m(t,x)$ справедливе зображення [12, с. 141]

$$v_m(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi;q_1)d\xi + \int\limits_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi_m(\xi;q_2)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi;q_3)d_\xi S. \tag{14}$$

Задовольняючи нелокальну умову (8), маємо

$$u_m(0,x) + \int\limits_0^T R(t,x)dt \int\limits_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)u_m(0,\xi)d\xi = -\int\limits_0^T R(t,x)v_m(t,x)dt \equiv F_1(x) \tag{15}$$

Оскільки $G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi) \geq 0$ і $\int\limits_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)d\xi \leq 1$, то

$$\int\limits_0^T |R(t,x)|dt \int\limits_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)d\xi \leq \lambda_0 < 1.$$

Роз'язок інтегрального рівняння (15) шукаємо методом послідовних наближень і для нього справедлива оцінка

$$|u_m(0,x)| \leq \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\|F_1;Q\|_0. \tag{16}$$

Запишемо розв'язок інтегрального рівняння (15) у вигляді

$$u_m(0,x) = F_1(x) + \int\limits_D Z_m(x,y)F_1(y)dy, \tag{17}$$

де $Z_m(x,y)$ - резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$Z_m(x,\xi) = \int\limits_0^T R(t,x)G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)dt + \int\limits_0^T R(t,x)dt \int\limits_D G_m^{(1)}(t,x,0,y)Z_m(y,\xi)dy,$$

звідки випливає оцінка

$$|\int\limits_D Z_m(x,\xi)d\xi| \leq \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}.$$

Підставляючи в рівність (17) замість $F_1(y)$ значення

$$F_1(y) = -\int\limits_0^T R(t,y)[\int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_m^{(1)}(t,y,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi;q_1)d\xi +$$

$$+\int\limits_D G_m^{(1)}(t,y,0,\xi)\varphi_m(\xi;q_2)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G_m^{(2)}(t,y,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi;q_3)d_\xi S]dt$$

і змінивши порядок інтегрування, отримаємо

$$u_m(0,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \Gamma_m^{(1)}(T,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi;q_1)d\tau + \int\limits_D \Gamma_m^{(1)}(T,x,0,\xi)\varphi_m(\xi;q_2)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \Gamma_m^{(2)}(T,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi;q_3)d_\xi S, \tag{18}$$

де

$$\Gamma_m^{\nu}(T,x,\tau,\xi) = \int\limits_0^T R(t,x) G_m^{(\nu)}(t,x,\tau,\xi)dt +$$

$$+\int\limits_0^T dt \int\limits_D Z_m(x,y)R(t,y)G_m^{(\nu)}(t,y,\tau,\xi)dy, \;\; \nu \in \{1,2\}.$$

Підставляючи (18) у поверхневий інтеграл рівності (13) і змінивши порядок інтегрування, одержимо зображення (12), де

$$E_m^{(\nu)}(T,t,x,\tau,\xi) = \int\limits_D G_m^{(\nu)}(t,x,0,y)\Gamma_m^{(\nu)}(T,y,\tau,\xi)dy. \tag{19}$$

□

В області Q розглянемо задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x;q_1), \;\; u_m(0,x) = G_m(x),$$

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B_2 u_m - \psi_m)(t,x) = 0, \tag{20}$$

де $G_m(x) = \varphi_m(x;q_2) - \int\limits_0^T R(\tau,x)u_m(\tau,x)d\tau$.

В області Q розв'язок крайової задачі (20) існує і єдиний в просторі $C^{2+\alpha}(Q)$, [3, с. 90].

Знайдемо оцінки похідних розв'язків $u_m(t,x)$. Введемо у просторі $C^l(Q)$ норму $||u_m;\gamma;\beta;q;Q||_l$, еквівалентну при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка виражається так само, як і $||u;\gamma;\beta;q;Q||_l$, тільки замість функцій $s_1(q^{(1)},t)$, $s_2(q^{(2)},x)$ беремо відповідно $d_1(q^{(1)},t)$, $d_2(q^{(2)},x)$, де $d_1(q^{(1)},t) = \max(s_1(q^{(1)},t), m_1^{-q^{(1)}})$ при $q^{(1)} \geq 0$ і

$d_1(q^{(1)},t) = \min(s_1(q^{(1)},t), m_1^{-q^{(1)}})$ при $q^{(1)} < 0$; $d_2(q^{(2)},x) = \max(s_2(q^{(2)},x), m_2^{-q^{(2)}})$ при $q^{(2)} \geq 0$ і $d_2(q^{(2)},x) = \min(s_2(q^{(2)},x), m_2^{-q^{(2)}})$ при $q^{(2)} < 0$.

Правильна така теорема.

Теорема 4. *Якщо виконані умови а), б), то для розв'язку задачі* (8) – (10) *правильна оцінка*

$$||u_m;\gamma;\beta;0;Q||_{2+\alpha} \leq c(\|\varphi;\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \|f;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + \\ + \|\psi;\gamma;\beta;0;Q\|_{1+\alpha}). \tag{21}$$

Стала c не залежить від m.

Доведення. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [11, 13] маємо

$$||u_m;\gamma;\beta;0;Q||_{2+\alpha} \leq (1+\varepsilon^{\alpha})\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha} + (\varepsilon)||u_m;Q||_0,$$

де ε – довільне дійсне число із (0,1). Тому досить оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha}$.

Із визначення півнорми випливає існування в Q точок P_1, P_2, H_i, для яких правильна одна із нерівностей

$$\frac{\lambda_0+1}{2}||u_m;\gamma;\beta;0;Q||_{2+\alpha} \leq E_\mu, \quad \mu \in \{1,2\}, \tag{22}$$

де

$$E_1 \equiv \sum_{2s+|r|=2} \Big\{ \sum_{\nu=1}^{n} d_1(2s\gamma^{(1)},t^{(2)}) d_2(2s\gamma^{(2)},\widetilde{x}) \prod_{i=1}^{n} d_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(2)}) \times \\ \times d_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\widetilde{x}) |\partial_t^s\partial_x^r u_m(P_2) - \partial_t^s\partial_x^r u_m(H_\nu)||x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} \times \\ \times d_1(\alpha(\gamma^{(1)}-\beta_\nu^{(1)}),t^{(1)}) d_2(\alpha(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\widetilde{x}) \Big\},$$

$$E_2 \equiv d_1((2+\alpha)\gamma^{(1)},\widetilde{t}) d_2((2s+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}) \prod_{i=1}^{n} d_1(-r_i\beta_i^{(1)},\widetilde{t}) d_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(1)}) \times \\ \times |t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} |\partial_t^s\partial_x^r u_m(P_1) - \partial_t^s\partial_x^r u_m(P_2)|, \quad 2s+|r|=2.$$

Якщо $|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}| \geq \frac{\varepsilon n^{-1}}{4} d_1(\gamma^{(1)},\widetilde{t}) d_2(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)},\widetilde{x}) \equiv T_1$, ε_1 – довільне дійсне число із (0,1), то

$$E_1 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2. \tag{23}$$

Якщо $|t^{(1)}-t^{(2)}| \geq \frac{\varepsilon_1^2}{16} d_1(2\gamma^{(1)},\widetilde{t}) d_2(2\gamma^{(2)},\widetilde{x}) \equiv T_2$, то

$$E_2 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2. \tag{24}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (23), (24), знаходимо

$$E_\mu \leq \varepsilon^{\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0. \tag{25}$$

Нехай $|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}| \leq T_2$ і $|t^{(1)}-t^{(2)}| \leq T_1$. Будемо вважати, що $d_1(\gamma^{(1)},\widetilde{t}) \equiv d_1(\gamma^{(1)},t^{(1)})$, $d_2(\gamma^{(2)},\widetilde{x}) \equiv d_2(\gamma^{(2)},x^{(1)})$. Нехай $|x_n-\xi_n| \leq 2T_2$, $\xi \in \partial D_m$ або $|x-\xi| \leq 2T_2 n$.

Розглянемо кулю $K(r,P)$ радіуса r, $r\geq 4T_2n$, що містить точки P_1, H_i, P_2 з центром у деякій точці $P\in\Gamma$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D\cap K(r,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\psi(y)$ [11, с. 155], в результаті якого область $\Pi=Q\cap K(r,P)$ переходить у область Π_1, для точок якої $y_n\geq 0$, $t\geq 0$.

Якщо покласти $u_m(t,x)=\omega_m(t,y)$, $P_1\equiv R_1$, $H_k=M_k$, $P_2=R_2$, $d_2(\gamma^{(2)},x^{(1)})=p_2(\gamma^{(2)},y^{(1)})$ і коефіцієнти диференціальних виразів L_1 і B_1 при цьому перетворенні позначити через k_{ij}, k_i, k_0, l_i, l_0, то ω_m буде розв'язком задачі

$$\Big[\partial_t-\sum_{ij=1}^n k_{ij}(R_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Big]\omega_m=\sum_{ij=1}^n[k_{ij}(t,y)-k_{ij}(R_1)]\partial_{y_i}\partial_{y_j}\omega_m+\sum_{i=1}^n(k_i(t,y)\partial_{y_i}\omega_m+$$

$$+k_0(t,y)\omega_m+F_m(t,\psi(y))\equiv F_m^{(0)}(t,y), \tag{26}$$

$$\omega_m(0,y)=G_m(0,\psi(y)), \tag{27}$$

$$B_2\omega_m|_{y_n=0}\equiv\sum_{k=1}^n l_k(t,R_1)\partial_{y_k}\omega_m|_{y_n=0}=$$

$$\sum_{k=1}^n\Big([l_k(t,R_1)-l_k(t,y)]\partial_{y_k}\omega_m-l_0(t,y)\omega_m+\psi_m(t,\psi(y))\Big)\Big|_{y_n=0}\equiv G(t,y)\Big|_{y_n=0}. \tag{28}$$

У задачі (26) – (28) зробимо заміну $\omega_m(t,y)=V_m(t,z)$, де $z_k=d_1(\beta_k^{(1)},t^{(1)})p_2(\beta_k^{(2)},y^{(1)})y_k$, $k\in\{1,\dots,n\}$. Область визначення $V_m(t,z)$ позначимо через Π_2. Тоді V_m буде розв'язком задачі

$$L_3V_m\equiv\Big[\partial_t-\sum_{ij=1}^n d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})p_2(\beta_i^{(2)},y^{(1)})p_2(\beta_j^{(2)},y^{(1)})k_{ij}(R_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\Big]V_m=$$

$$=F_m^0(t,Z),$$

$$V_m(0,z)=G_m(Z)\equiv\Phi_m(Z),$$

$$B_3V_m|_{z_n=0}\equiv\sum_{k=1}^n d_1(\beta_k^{(1)},t^{(1)})p_2(\beta_k^{(2)},y^{(1)})l_k(t,R_1)\partial_{z_k}V_m|_{z_n=0}=G(t,Z)|_{z_n=0},$$

де $Z=(d_1(-\beta_1^{(1)},t^{(1)})p_2(-\beta_1^{(2)},y^{(1)})z_1,\dots,d_1(-\beta_n^{(1)},t^{(1)})p_2(-\beta_n^{(2)},y^{(1)})z_n)$.

Позначимо через $z_i^{(1)}=d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})p_2(\beta_i^{(2)},y_1)y_i^{(1)}$, $\Pi_\mu^{(1)}=\{(t,z)\in\Pi_2||t-t^{(1)}|\leq\mu^2T_2,|z_i-z_i^{(1)}|\leq\mu\sqrt{T_2},\ \ i\in\{1,\dots,n\}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,z)$, яка задовольняє такі умови

$$\eta(\tau,z)=\begin{cases}1, & (t,z)\in\Pi_{1/2}^{(1)}, 0\leq\eta(t,z)\leq 1;\\ 0, & (t,z)\notin\Pi_{3/4}^{(1)}, |\partial_t^k\partial_z^j\eta(t,z)|\leq c_{ki}d_1(-(2k+|j|)\gamma^{(1)},t^{(1)})\times\\ & \times p_2(-(2k+|j|)\gamma^{(2)},y^{(2)})\end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,z)=\eta(t,z)V_m(t,z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$L_3W_m=\sum_{i,j=1}^n d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})p_2(\beta_i^{(2)},y^{(1)})p_2(\beta_j^{(2)},y^{(1)})k_{ij}(R_1)[\partial_{z_i}\eta\partial_{z_j}V_m+$$

$$+\partial_{z_j}\eta\partial_{z_i}V_m]+V_m\Big[\sum_{i,j=1}^{n}d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})p_2(\beta_i^{(2)},y^{(1)})p_2(\beta_j^{(2)},y^{(1)})k_{ij}(R_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta-\partial_t\eta\Big]+$$

$$+F_m^{(0)}\eta\equiv F_m^{(1)}(t,z), \tag{29}$$

$$W_m(0,x)=\Phi_m(Z)\eta(t_k,z)\equiv\Phi_m^{(1)}(z), \tag{30}$$

$$B_3W_m|_{z_n=0}=\Big[\sum_{k=1}^{n}d_1(\beta_k^{(1)},t^{(1)})p_2(\beta_k^{(2)},y^{(1)})V_m l_k(t,R_1)\partial_{z_k}\eta-G(t,Z)\eta\Big]\Big|_{z_n=0}\equiv G_1. \tag{31}$$

Коефіцієнти рівняння (29) і крайової умови (31) згідно з накладеними умовами обмежені сталими, незалежними від точки R_1. Тому, використовуючи теорему 6 [14, с. 368], для довільних точок $\{M_1,M_1\}\subset\Pi_{1/2}^{(1)}$ дістанемо нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)|\partial_t^k\partial_z^jV_m(M_1)-\partial_t^k\partial_z^jV_m(M_2)|\le c(\|F_m^{(1)}\|_{C^{\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)})}+\|\Phi_m^{(1)}\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)}\cap\{t=t_k\})}+$$

$$+\|G_1\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)}\cap\{(t,z)\in\Pi_{3/4}^{(1)}|z_n=0\})}), \tag{32}$$

$2k+|j|=2$, $d(M_1,M_2)$ – параболічна відстань між M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,z)$, маємо

$$\|F_m^{(1)}\|_{C^{\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)})}\le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)})p_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)},y^{(1)})(\|F_m;\gamma;0;2\gamma;\Pi_{3/4}^{(1)}\|_{\alpha}+$$

$$+\|V_m;\Pi_{3/4}^{(1)}\|_0+\|V_m;\gamma;0;0;\Pi_{3/4}^{(1)}\|_2),$$

$$\|\Phi_m^{(1)}\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)}\cap\{t=0\})}\le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)})p_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)},y^{(1)})\times$$

$$\times(\|\Phi_m;\widetilde{\gamma};0;0;\Pi_{3/4}^{(1)}\cap\{t=0\}\|_{2+\alpha} \tag{33}$$

$$\|G_1\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)}\cap\{(t,z)\in\Pi_{3/4}^{(1)}|z_n=0\})}\le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)})p_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)},y^{(1)})$$

$$(\|G;\gamma,0;\gamma;\Pi_{3/4}^{(1)}\|_{1+\alpha}+\|V_m;\gamma,0;0;\Pi_{3/4}^{(1)}\|_2+\|V_m;\Pi_{3/4}^{(1)}\|_0).$$

Підставляючи (33) у (32) і повертаючись до змінних (t,y), знаходимо

$$E_r\le c(\|F_m;\gamma,\beta;2\gamma;\Pi_2\|_{\alpha}+\|\Phi_m;\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta};0;\Pi_2\cap\{t=0\}\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|G_1;\gamma,\beta;\gamma;\Pi_{3/4}^{(1)}\|_{1+\alpha}+c_1\|V_m;\gamma,\beta;0;\Pi_2\|_2+\|V_m;\Pi_2\|_0),\quad r\in\{1,2\}. \tag{34}$$

Враховуючи означення простору $H^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ і умови а), б), маємо

$$E_{\mu}\le c(n^2\rho^{\alpha}+\varepsilon^{\alpha}(n+2))[|u_m;\gamma,\beta;0;Q|]_{2+\alpha}+c_1(\|f_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}+\lambda_0\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|\varphi_m;\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;Q\cap(t=0)\|_{2+\alpha}+\|\psi_m;\gamma,\beta;\gamma;Q\|_{2+\alpha}+\|u_m;Q\|_0), \tag{35}$$

ε, ρ – довільні числа, $\rho\in(0,1)$, $\varepsilon\in(0,1)$, $\mu\in\{1,2\}$.

Нехай $|x-\xi|\ge 2T_2n$. Розглянемо задачу

$$\Big[\partial_t-\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(P)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Big]u_m\equiv\sum_{ij=1}^{n}[a_{ij}(t,x)-a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(a_i(t,x)\partial_{x_i}u_m+a_0(t,x))u_m+f_m\equiv F_m^{(2)}(t,z), \tag{36}$$

$$u_m(0,x)=G_m^{(k)}(0,x). \tag{37}$$

Нехай $\Pi_1^{(2)}\in Q$, $\Pi_1^{(2)}$ – куб з центром в точці P_1, $\Pi_\rho^{(2)}=\{(t,x)\in Q^{(k)}\Big||t-t^{(1)}|\leq 16^{-1}\mu^2T_1, |x_i-x_i^{(1)}|\leq 4\mu^{-1}T_2, i\in\{1,2,\dots,n\}\}$.

Зробимо в задачі (36), (37) заміну $u_m(t,x)=\omega_m(t,y)$, $x_i=d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})y_i$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Область визначення $\omega_m(t,y)$ позначимо через $\Pi^{(3)}$. Тоді $\omega_m(t,y)$ буде розв'язком задачі

$$L_3\omega_m\equiv\Big[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)},x^{(1)})\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Big]\omega_m=$$

$$=F_m^{(2)}(t,Y), \tag{38}$$

$$\omega_m(0,y)=G_m(Y), \tag{39}$$

де $Y=(d_1(-\beta_1^{(1)},t^{(1)})d_2(-\beta_1^{(2)},x^{(1)})y_1,\dots,d_1(-\beta_n^{(1)},t^{(1)})d_2(-\beta_n^{(2)},x^{(1)})y_n)$.

Позначимо через $y_i^{(1)}=d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})x_i^{(1)}$, $\Pi_\mu^{(3)}=\{(t,y)\in\Pi^{(3)}\Big||t-t^{(1)}|\leq 16^{-1}\mu^2T_1, |x_i^{(1)}-x_i|\leq 4^{-1}\mu\sqrt{T_1},\ i\in\{1,\dots,n\}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta_1(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta_1(t,y)=\begin{cases}1, & (t,y)\in\Pi_{1/2}^{(3)}, 0\leq\eta_1(t,y)\leq 1;\\ 0, & (t,y)\notin\Pi_{3/4}^{(3)}, |\partial_t^k\partial_x^j\eta_1(t,y)|\leq c_{kj}d_1(-(2k+|j|)\gamma^{(1)},t^{(1)})\times\\ & \times d_2(-(2k+|j|)\gamma^{(2)},x^{(1)}).\end{cases}$$

Тоді функція $V_m^{(1)}(t,y)=\omega_m(t,y)\eta_1(t,y)$ задовольняє задачу Коші

$$L_3V_m^{(1)}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)},x^{(1)})[\partial_{y_i}\eta_1\partial_{y_j}\omega_m+$$

$$+\partial_{y_j}\eta_1\partial_{y_i}\omega_m]+\omega_m\Big[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)},x^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta_1-$$

$$-\partial_t\eta_1\Big]+F_m^{(2)}\eta_1\equiv F_m^{(3)}, \tag{40}$$

$$V_m^{(1)}(0,y)=G_m\eta_1(0,y)=\varphi_m^{(2)}. \tag{41}$$

Згідно з теоремою 5.1 [14, с. 364] для довільних точок $\{M_1,M_2\}\subset\Pi_{1/2}^{(3)}$ справедлива нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)|\partial_t^k\partial_x^j\omega_m(M_1)-\partial_t^k\partial_x^j\omega_m(M_2)|\leq$$
$$\leq c\Big(\|F_m^{(3)}\|_{C^\alpha(V_{3/4}^{(2)})}+\|\varphi_m^{(2)}\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}^{(1)}\cap\{t=0\})}\Big),$$

$2k+|j|=2$.

Враховуючи властивості функції $\eta_1(t,y)$, означення простору $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, обмеження а), б), одержимо нерівність

$$E_\mu \leq c(n^2\rho^\alpha + \varepsilon^\alpha(n+2))\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + \lambda_0\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}+$$

$$+c_1(\|\varphi_m;\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \|f_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}). \tag{42}$$

Об'єднуючи нерівності (22), (25), (35), (42) і вибираючи ε достатньо малим, одержимо нерівності

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \leq c(\|f_m;\gamma;\beta;0;Q\|_\alpha + \|\varphi_m;\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}+$$

$$\|\psi_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{1+\alpha}). \tag{43}$$

Оскільки

$$\begin{gathered}\|f_m;\gamma;\beta;0;Q\|_\alpha \leq c\|f;\gamma;\beta;0;Q\|_\alpha,\\ \|\varphi_m^{(k)};\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} \leq c\|\varphi_k;\widetilde{\gamma};\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha},\\ \|\psi_m;\gamma;\beta;\delta;Q\|_{1+\alpha} \leq c\|\psi;\gamma;\beta;\delta;Q\|_{1+\alpha},\end{gathered} \tag{44}$$

то підставляючи (37) у (36), одержимо нерівність (21). □

Доведення теореми 1. Права частина нерівності (21) не залежить від m_1, m_2 і послідовності $\{u_m^{(0)}\} \equiv \{u_m(P)\}$, $\{u_m^{(1)}\} \equiv \{d_1(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},x)\partial_{x_i}u_m\}$, $\{u_m^{(2)} \equiv d_1(2\gamma^{(1)},t)d_2(2\gamma^{(2)},x)\partial_t u_m\}$, $\{u_m^{(3)} = d_1(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},t)d_1(\gamma^{(1)}-\beta_j^{(1)},t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},x)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_j^{(2)},x)\partial_{x_ix_j}u_m\}$, $P(t,x)\in Q$, рівномірно обмежені та рівностепенно неперервні в області Q. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{u_{m(l)}^{(\mu)}\}$, рівномірно збіжні в Q до $\{u^{(\mu)}\}$ $\mu\in\{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m(l)\longrightarrow\infty$ в задачі (8) – (10), одержимо, що $u(t,x)=u_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1) – (3), $u\in H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і правильна оцінка (6).

Задача оптимального керування. Для розв'язності задачі (1) – (4) побудуємо послідовність розв'язків задач, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1) – (4).

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій (u_m,q), на яких функціонал

$$I(q) = \int_0^T dt\int_D F_1(t,x;u_m,q_1)dx + \int_D F_2(x;u_m,q_2)dx+$$

$$+\int_0^T dt\int_D F_3(t,x;u_m,q_3)d_xS \tag{45}$$

досягає мінімального значення в класі функцій $q\in V$, де u_m задовольняє рівняння (7), інтегральну умову за часовою змінною (8) і на бічній поверхні Γ крайову умову (9). Позначимо

$$\mu_1(\tau,\xi) = \int_0^T dt\int_D E_m^{(1)}(T,t,x,\tau,\xi)\frac{\partial F_1(t,x;u_m;q_1)}{\partial u_m}dx+$$

$$+\int_{\tau}^{T} dt \int_{D} G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_1(t,x;u_m;q_1)}{\partial u_m} dx+$$

$$+\int_{D} (E_m^{(1)}(T,T,x,0,\xi) + G_m^{(1)}(T,x,0,\xi) \frac{\partial F_2(x;u_m;q_2)}{\partial u_m} dx+$$

$$+\int_{0}^{T} dt \int_{\partial D} E_m^{(1)}(T,t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_3(t,x;u_m;q_3)}{\partial u_m} d_x S + \int_{\tau}^{T} dt \int_{\partial D} G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_3(t,x;u_m;q_3)}{\partial u_m} d_x S,$$

$$\mu_2(\xi) = \int_{0}^{T} dt \int_{D} (E_m^{(1)}(T,t,x,0,\xi) + G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)) \frac{\partial F_1(t,x;u_m;q_1)}{\partial u_m} dx+$$

$$+\int_{D} (E_m^{(1)}(T,T,x,0,\xi) + G_m^{(1)}(T,x,0,\xi)) \frac{\partial F_2(x;u_m,q_2)}{\partial u_m} dx+$$

$$+\int_{0}^{T} dt \int_{\partial D} (E_m^{(1)}(T,t,x,0,\xi) + G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)) \frac{\partial F_3(t,x;u_m;q_3)}{\partial u_m} d_x S,$$

$$\mu_3(\tau,\xi) = \int_{0}^{T} dt \int_{D} E_m^{(2)}(T,t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_3(t,x;u_m,q_3)}{\partial u_m} dx+$$

$$+\int_{\tau}^{T} dt \int_{D} G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_3(t,x;u_m,q_3)}{\partial u_m} dx + \int_{D} (E_m^{(2)}(T,T,x,0,\xi)+$$

$$+G_m^{(2)}(T,x,0,\xi)) \frac{\partial F_2(x;u_m,q_2)}{\partial u_m} dx + + \int_{0}^{T} dt \int_{\partial D} E_m^{(2)}(T,t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_3(t,x;u_m,q_3)}{\partial u_m} dx+$$

$$+\int_{\tau}^{T} dt \int_{\partial D} G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_3(t,x;u_m;q_3)}{\partial u_m} d_x S,$$

$$H_1(u_m,\mu_1,q_1) \equiv F_1(t,x;u_m,q_1) + \mu_1(t,x) f_m(t,x,q_1),$$

$$H_2(u_m,\mu_2,q_2) \equiv F_2(x;u_m,q_2) + \mu_2(x)\varphi_m(x,q_2),$$

$$H_3(u_m,\mu_3,q_3) \equiv F_3(t,x;u_m,q_3) + \mu_3(x)\psi_m(t,x,q_3),$$

$q^{(0)} = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)})$ – оптимальне керування,
$u_m(t,x,q^{(0)})$ – оптимальний розв'язок задачі (7) – (9).

Правильна така теорема.

Теорема 5. *Якщо* $\partial_{q_k} H_k(u_m,\mu_k,q_k) > 0$, *то оптимальне керування* $q_k^{(0)} = V_{k1}$, $k \in \{1,2,3\}$. *Якщо* $\partial_{q_\nu} H_k(u_m,\mu_k,q_k) < 0$, *то оптимальне керування* $q_k^{(0)} = V_{k2}$, $k \in \{1,2,3\}$.

Доведення. Розглянемо випадок, наприклад, $k = 1$. Нехай $\triangle q_1$ – довільний приріст керування $q_1(t,x)$, $\triangle q > 0$, $q_1 + \triangle q_1 \in V$. Позначимо через $\triangle_{q_1} u_m$ – відповідний приріст функції $u_m(t,x;q)$. Тоді $\triangle_{q_1} u_m$ в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L_1 \triangle_{q_1} u_m)(t,x) = f_m(t,x;q_1 + \triangle q_1) - f_m(t,x,q_1) \equiv \triangle_{q_1} f(t,x,q_1), \tag{46}$$

$$(B \triangle_{q_1} u_m)(x) = 0, \quad \lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} (B_2 \triangle_{q_1} u_m)(t,x) = 0.$$

Запишемо приріст функціонала $I(q)$ за формулою Тейлора

$$\triangle_{q_1} I = \int_0^T dt \int_D [\partial_{u_m} F_1(t,x;u_m,q_1) \triangle_{q_1} u_m + \partial_{q_1} F_1(t,x;u_m,q_1) \triangle q_1] dx +$$

$$+ \int_D \partial_{u_m} F_2(x;u_m,q_2) \triangle_{q_1} u_m dx + \int_0^T dt \int_{\partial D} \partial_{u_m} F_3(t,x;u_m,q_3) \triangle_{q_1} u_m d_x S +$$

$$+ \int_0^T dt \int_D (O(|\triangle_{q_1} u_m|^2) + O(|\triangle_{q_1}|^2)) dx + \int_{\partial D} O(|\triangle_{q_1} u_m|^2) dx +$$

$$+ \int_0^T dt \int_{\partial D} O(|\triangle_{q_1} u_m|^2) d_x S. \tag{47}$$

Оскільки $\triangle u_m$ роз'язок задачі (46), то, використовуючи формулу (12), маємо

$$\triangle_{q_1} u_m = \int_0^T d\tau \int_D E_m^{(1)}(T,t,x,\tau,\xi) \triangle_{q_1} f(\tau,\xi;q_1) d\xi +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_{\partial D} G_m^{(1)}(t,\tau,x,\xi) \triangle_{q_1} f(\tau,\xi;q_1) d\xi. \tag{48}$$

Підставляючи (48) у (47) і змінюючи при цьому порядок інтегрування, знаходимо

$$\triangle_{q_1} I = \int_0^T dt \int_D [\partial_{q_1} H_1(u_m,\mu_1,q_1) \triangle q_1 + O(|\triangle_{q_1} u_m|^2) + O(|\triangle q_1|^2) dx. \tag{49}$$

Якщо $q_1 = V_{11}(t,x)$ і $\partial_{q_1} H_1 > 0$, то при досить малому $\triangle q_1$ маємо $\triangle_{q_1} I > 0$. Якщо $q_1 = V_{21}(t,x)$ і $\partial_{q_1} H_1 < 0$, то при досить малому $\triangle q_1$ маємо $\triangle_{q_1} I > 0$. Якщо $H_1(u_m,\mu_1,q_1)$ за аргументом q_1 не монотонна, то $\partial_{q_1} H_1(u_m,\mu_1,q_1) \triangle q_1$ знакозмінна величина, в області $Q^+ \subset Q$ $\partial_{q_1} H_1(u_m,\mu_1,q_1) > 0$ і $\partial_{q_1} H_1(u_m,\mu_1,q_1) < 0$ в $Q^- = Q \backslash Q^+$.

Використовуючи теорему про "середнє"значення, знаходимо

$$\triangle_{q_1} I = \partial_{q_1} H_1(u_m^+,\mu_1^+,q_1^+) \int\int_{Q^+} \triangle q_1 dx dt - |\partial_{q_1} H_1(u_m^-,\mu_1^-,q_1^-)| \int\int_{Q^{-1}} \triangle q_1 dx dt +$$

$$+\int\int\limits_{Q}[O(|\triangle_{q_1}u_m|^2)+O(|\triangle q_1|^2)]dxdt.$$

При досить малому $\triangle q_1$ знак $\triangle_{q_1}I$ визначається першими доданками в залежності від величин $mesQ^+$, $mesQ^-$, $\triangle q_1$. Отже, функціонал

$$I_1(p)\equiv\int\limits_0^T dt\int\limits_D F_1(t,x;u_m(t,x;q),q_1)dx$$

не досягає свого мінімального значення. Аналогічні міркування потрібно провести і у випадку, коли $\triangle q_1<0$. При доведенні теореми у випадках $k\in\{2,3\}$ потрібно використати схему доведення випадка $k=1$. □

Нехай умови теореми 5 не виконані. Тоді правильна така теорема.

Теорема 6. *Для того, щоб $q_k^{(0)}$ – були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:*
1) функції $H_k(u_m,\mu_k,q_k)$ за аргументом q_k мають в точці $q_k^{(0)}$ мінімальне значення;
2) для довільного вектора $(e_k^{(1)},e_k^{(2)})\neq 0$ виконується нерівність

$$\partial^2_{u_m}F_k(t,x;u_m;q_k^{(0)})(e_k^{(1)})^2+2\partial_{q_k}\partial_{u_m}F_k(t,x;u_m;q_k^{(0)})e_k^{(1)}e_k^{(2)}+$$

$$+\partial^2_{q_k}F_k(t,x;u_m;q_k^{(0)})(e_k^{(2)})^2>0,\ \ k\in\{1,3\}$$

$$\partial^2_{u_m}F_2(x;u_m;q_2^{(0)})(e_2^{(1)})^2+2\partial_{q_2}\partial_{u_m}F_2(x;u_m;q_2^{(0)})e_2^{(1)}e_2^{(2)}+$$

$$+\partial^2_{q_2}F_2(x;u_m;q_2^{(0)})(e_2^{(2)})^2>0.$$

Доведення теореми 6 проводиться за допомогою методики праць [10, 15]. Переходячи до границі в задачі (7) – (9), (45) при $m_1\longrightarrow\infty$, $m_2\longrightarrow\infty$ одержимо оптимальний розв'язок задачі (1) – (4).

Список літератури

[1] Lyons J.-L. Optimal control of systems described by partial differential equations. World, Moscow, 1972. (in Russian)

[2] Bermudez A. *Some applications of optimal control theory of distributed systems. Control, optimisation and calculus of variations.* 2002, **8**, 195-218. doi : https://doi.org/10.1051/cocv:2002057

[3] Casas E., Vexler B., Zuazua E. *Sparse initial data identification for parabolic PDE and its finite element approximations. Mathematical Control and Related Fields.* 2015, **5** (3), 377-399. doi: 10.3934/mcrf.2015.5.377

[4] Wei Gong, Michael Hinze, Zhaojie Zhou. *A finite element method for Dirichlet boundary control problems governed by parabolic PDEs.* 2014.

[5] Hömberg D., Krumbiegel K., Rehberg J. *Optimal Control of a Parabolic Equation with Dynamic Boundary Condition.* Applied Mathematics & Optimization 2013, **67** (1), 3-31.

[6] Zuliang Lu. *Optimal control problem for a quasilinear parabolic equation with controls in the coefficients and with state constraints.* Electronic Journal of Differential Equations 2017, **72**, 1-22.

[7] Bushuev I. V. *On a class of optimal control problems for parabolic equations.* Siberian Mathematical Journal 1994, **35** (5), 887-892.

[8] Gorbonos S.O., Kogut P.I. *On pathological solutions to an optimal boundary control problem for linear parabolic equation with continuous coefficients.* Кибернетика и вычислительная техника 2014, **176**, 5-18.

[9] Pukalskyi I. D. *The Green's function of a parabolic boundary value problem and an optimization problem.* Ukrainian Mathematical Journal, Kyiv, 2000, **52** (4), 567-571. (in Ukrainian)

[10] Pukalskyi I. D., Matiychuk M.I. On the applications of Green functions of parabolic boundary value problems to optimal control problems. 1985.

[11] Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1964.

[12] Matiychuk M.I. Parabolic and elliptic problems with singularities. Prut, Chernivtsi, 2003.

[13] Pukalskyi I. D. The boundary value problems for unevenly parabolic and elliptic equations with degeneration and singularities. Chernivtsi, 2008.

[14] Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. Linear and quasilinear equations of parabolic type. 1967.

[15] Pukalskyi I. D. *A parabolic boundary-value problem and a problem of optimal control.* Journal of mathematical sciences 2011, **174** (2), 159–168. doi: 10.1007/s10958-011-0287-9

Надійшло 01.01.2019

Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *Optimal control in a nonlocal boundary value problem with integral condition for parabolic equations with degeneration*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 1 (2019), 82–98.

Studying problems with nonlocal conditions for differential equations is stimulated by various circumstances, in particular solving problems in the theory of plasma physics, inverse problems for parabolic equations. The popularity of research in control systems, described by differential equations with partial derivatives, is associated with their use in solving the problems of natural science, in particular, hydro and gas dynamics, heat physics, filtration, diffusion, plasma, and the theory of biological populations.

In this paper, the problem of optimal control of a system described by the oblique derivative problem and the integral condition for a time variable for a second order parabolic equation with power singularities in the equation and boundary condition coefficients is investigated. The cases of internal, starting and border control are considered. The quality criterion is given by the sum of bulk and surface integrals.

With the help of modified methods developed in the study of boundary value problems for parabolic equations with smooth coefficients, a priori estimates, the existence and uniqueness of the solution of a nonlocal parabolic boundary-value problem with degeneracy was established. The coefficients of the parabolic equation and the boundary condition admit the power singularities of an arbitrary order of any variables on a certain set of points. The estimates of the solution of a nonlocal boundary value problem and its derivatives in Hölder space with a power weight are determined, which is determined by the order of degeneration of the coefficients of the equation and the boundary condition.

Using the integral image of solutions of the sequence of auxiliary nonlocal boundary value problems with smooth coefficients, the problem of optimal control of a system described by a nonlocal parabolic problem is investigated. Using the Arzel theorem and the methods of the variational calculus, necessary and sufficient conditions for the existence of an optimal solution of a system described by a nonlocal boundary-value problem with an integral condition for a time variable for parabolic equations with degenerate coefficients are establish. The values of optimal internal, starting and boundary control and the estimation of the optimal solution are found.