Працьовитий М.В., Василенко Н.А., Маслова Ю.П.

ПОТУЖНІСТЬ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ ЦИФРУ 1 Q_3-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЛА

Робота присвячена дослідженню потужності множини P_c неперервних на відрізку $[0;1]$ функцій, які зберігають цифру 1 у трисимвольному самоподібному Q_3 – зображенні числа, що є узагальненням класичного трійкового зображення: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\alpha_k(x) \equiv \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n(x) \in A_3 \equiv \{0,1,2\}$. Всі функції класу P_c мають наступний вигляд:

$$y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}, \text{ де } \alpha_n \in A_3, \gamma_n \in A_3,$$

$$x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} \equiv \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right]$$

і при цьому $\gamma_n = \gamma_n(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$, причому $\gamma_n = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n(x) = 1$.

Встановлено, що множина P_c є континуальною. Отримано аналітичний вираз функцій класу P_c, вивчено варіаційні та інтегральні їхні властивості.

Ключові слова і фрази: Q_3-зображення дійсних чисел, неперервна функція, потужність множини неперервних функцій, збереження цифри 1 Q_3-зображення числа.

National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine
Institute of mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine
e-mail: *prats444@gmail.com, vasylenkonnn@gmail.com, julia0609mas@gmail.com*

Вступ

Пошук функцій з фрактальними властивостями, адекватних засобів їх опису та дослідження привів до ідеї задавати функції через інваріанти у зображенні аргумента і значення функції у тій чи іншій системі кодування дійсних чисел [1, 2, 3, 7, 8, 9]. На цьому шляху виник інтерес до функцій, що зберігають фіксовані цифри алфавіту у Q_3-зображенні аргумента без їхнього примноження у значенні функції.

У роботі [6] розглядався клас P_c неперервних функцій f, визначених на відрізку $[0;1]$ рівністю: $y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$, де цифра γ_n Q_3 – зображення числа y задовольняє умови:

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A21,26A30.

1) $\gamma_n = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n = 1$;

2) якщо цифра γ_n відмінна від 1, то вона залежить від перших n цифр Q_3-зображення аргумента x, тобто $\gamma_n = \gamma_n(x) = \varphi_n(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)), n \in N$.

Конкретизація залежності φ_n приводить до різних функцій f і отримання нескінченного класу функцій. Так означений клас P_c функцій f називався класом функцій, які зберігають цифру 1 Q_3-зображення чисел (без примноження). У згаданій роботі [6] зазначалося, що клас P_c містить дві неперервні монотонні функції – це:

1) тотожне перетворення: $e(x) = e(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)\dots}) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)\dots}$,

2) інверсор [5]: $I(x) = I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)\dots}) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1(x)]\dots[2-\alpha_k(x)]\dots}$ і зліченну підмножину P_c інших неперервних функцій, аналітичне задання яких є істотно складнішим.

У даній роботі ми покажемо, що нескінченний клас P_c насправді є континуальним. Разом з цим ми встановлюємо нові властивості функцій даного класу.

Нагадаємо [1, 2], що поліосновне трисимвольне Q_3–зображення чисел $x \in [0;1]$ визначається вектором $\bar{q} = (q_0; q_1; q_2)$, $q_1 > 0$, $q_0 + q_1 + q_2 = 1$, через рівність

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots},$$

де $\alpha_k \in A_3 \equiv \{0,1,2\}$, $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0, \beta_2 = q_0 + q_1$.

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$ називається множина

$$\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\dots c_m} = \{x : x \in [0;1], \alpha_i(x) = c_i, i = \overline{1,m}\},$$

що є відрізком $[a;b]$ з кінцями $a = \Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_m(0)}$, $b = \Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_m(2)}$.

1 Допоміжні об'єкти та твердження з ними пов'язані

Лема 1. *Функція ψ_m, означена на циліндрі $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\dots c_m}$ рівністю*

$$\psi_m(x) = \Delta^{Q_3}_{\delta_1\delta_2\dots\delta_m\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\dots}, \tag{1}$$

де $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ – фіксований набір цифр алфавіту $A_3 = \{0,1,2\}$, є лінійною.

Доведення. Оскільки $x \in \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\dots c_m}$, то $x = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\dots c_m\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\dots}$ і

$$\psi_m(x) = B_\delta + G_\delta \omega^m(x), \text{ де}$$

$$B_\delta = \beta_{\delta_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\beta_{\delta_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\delta_j} \right), \tag{2}$$

$$G_\delta = \prod_{j=1}^{m} q_{\delta_j}, \;\; \omega^m(x) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\dots}. \tag{3}$$

Враховуючи, що

$$x = A_m + P_m\,\omega^m(x), \text{ де } \; A_m = \beta_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \beta_{c_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j},$$

$$P_m = \prod_{j=1}^{m} q_{c_j}, \tag{4}$$

отримаємо

$$\omega^m(x) = \frac{1}{P_m}x - \frac{A_m}{P_m}. \tag{5}$$

Тоді

$$\psi_m(x) = B_\delta + G_\delta\left(\frac{1}{P_m}x - \frac{A_m}{P_m}\right) = \frac{G_\delta}{P_m}x + \frac{B_\delta P_m - G_\delta A_m}{P_m}. \tag{6}$$

Враховуючи, що G_δ, P_m, B_δ, A_m є константи, залежні від основи циліндра $c_1, c_2, \ldots, c_m$, то $\psi_m(x)$ є лінійною функцією. □

Наслідок 1. *Функція ψ_m, означена на циліндрі $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}$ рівністю*

$$\psi_m(x) = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\ldots},$$

є тотожним перетворенням цього циліндра, тобто $\psi_m(x) = x$.

Лема 2. *Функція φ_m, означена на циліндрі $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}$ рівністю*

$$\varphi_m(x) = \Delta^{Q_3}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m[2-\alpha_{m+1}(x)][2-\alpha_{m+2}(x)]\ldots}, \tag{7}$$

де $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$ – фіксований набір цифр алфавіту A_3, є сингулярною *(неперервною функцією похідна якої майже скрізь у розумінні міри Лебега дорівнює нулю) спадною функцією, причому*

$$\varphi_m(x) = B_\delta + G_\delta I(\omega^m(x)),$$

де B_δ, G_δ, $\omega^m(x)$ мають вирази (2), (3), (5) *відповідно, а $I(u)$ – інверсор цифр Q_3-зображення числу.*

Доведення. Оскільки $x \in \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}$, то $x = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\ldots}$ і

$$\varphi_m(x) = B_\delta + G_\delta I(\omega^m(x)).$$

Враховуючи, що

$$I(x) = A_m + P_m\, I(\omega^m(x)), \text{ де}$$

$$A_m = \beta_{[2-c_1]} + \left(\sum_{k=2}^{m} \beta_{[2-c_k]} \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-c_j]}\right), \quad P_m = \prod_{j=1}^{m} q_{[2-c_j]},$$

отримаємо

$$I(\omega^m(x)) = \frac{1}{P_m}I(x) - \frac{A_m}{P_m}.$$

Тоді

$$\varphi_m(x) = B_\delta + G_\delta\left(\frac{1}{P_m}I(x) - \frac{A_m}{P_m}\right), \text{ тобто}$$

$$\varphi_m(x) = \frac{G_\delta}{P_m}I(x) + \frac{B_\delta P_m - G_\delta A_m}{P_m}.$$

Оскільки G_δ, P_m, B_δ, A_m – константи, залежні від основи циліндра, а функція I, як відомо, є сингулярно неперервною (тобто має похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега) строго спадною, то такою ж є функція $\varphi_m(x)$ на вказанному циліндрі. □

Наслідок 2. *Функція φ_m, означена на циліндрі $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}$ рівністю*

$$\varphi_m(x)=\Delta^{Q_3}_{[2-c_1][2-c_2]\ldots[2-c_m][2-\alpha_{m+1}(x)][2-\alpha_{m+2}(x)]\ldots},$$

є інверсором *Q_3–зображення чисел цього циліндра, тобто $\varphi_m(x)=I(x)$.*

Лема 3. *Для функції ψ_1, означенної на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{1(0)};\Delta^{Q_3}_{(1)}]$ рівністю (1) виконується:*

$$\psi_1^L \equiv \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}} \psi_1(x)dx = \frac{q_0^2q_1(2-q_1)}{2(1-q_1)^2}.$$

Доведення. Справді,

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(1)}} \psi_1(x)dx = \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}} (q_0+q_1x)d(q_0+q_1x) =$$
$$= \frac{q_0^2q_1}{1-q_1} + \frac{q_1^2q_0^2}{2(1-q_1)^2} = \frac{q_0^2q_1(2-q_1)}{2(1-q_1)^2},$$

що і треба було довести. □

Лема 4. *Для функції ψ_1, означеної на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{(1)};\Delta^{Q_3}_{1(2)}]$ рівністю (7), виконується:*

$$\psi_1^R \equiv \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} \psi_1(x)dx = \frac{q_1q_2}{2(1-q_1)^2}\left(2q_0+q_1q_2\right).$$

Доведення. Нехай $x\in[\Delta^{Q_3}_{(1)};\Delta^{Q_3}_{1(2)}]$. Тоді

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} \psi_1(x)dx = \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{(2)}} (q_0+q_1x)d(q_0+q_1x) = q_0q_1 - \frac{q_0^2q_1}{1-q_1} + \frac{q_1^2}{2} - \frac{q_1^2q_0^2}{2(1-q_1)^2} =$$
$$= q_0q_1\left(1-\frac{q_0}{1-q_1}\right) + \frac{q_1^2}{2}\left(1-\frac{q_0^2}{(1-q_1)^2}\right) = \frac{q_0q_1q_2}{1-q_1} + \frac{q_1^2}{2}\left(1-\frac{q_0^2}{(1-q_1)^2}\right) =$$
$$= \frac{q_0q_1q_2}{1-q_1} + \frac{q_1^2q_2(1-q_1+q_0)}{2(1-q_1)^2} = \frac{q_1q_2}{2(1-q_1)^2}\left(2q_0(1-q_1)+q_1(2q_0+q_2)\right) =$$
$$= \frac{q_1q_2}{2(1-q_1)^2}\left(2q_0+q_1q_2\right),$$

що і треба було довести. □

Лема 5. *Для функції φ_1, означеної на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{1(0)};\Delta^{Q_3}_{(1)}]$ рівністю (7) виконується:*

$$\varphi_1^L \equiv \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}} \varphi_1(x)dx = \frac{q_0q_1}{1-q_1^2}(q_1 + \frac{q_0}{1-q_1} - q_1q_2(1-S)),$$

де $S = \dfrac{2q_1+q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2}$.

Доведення. Легко бачити, що для кожного $x \in [\Delta^{Q_3}_{1(0)};\Delta^{Q_3}_{(1)}]$ виконується: $\varphi_1(x) = I(x)$. Тоді

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}} \varphi_1(x)dx = \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}} I(x)dx.$$

Для подальших міркувань будемо користуватися правою частиною останньої рівності:

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(1)}} I(x)dx = \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}} (q_0 + q_1I(x)d(q_0+q_1x) = q_0q_1x\Big|_{\Delta^{Q_3}_{(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}} + q_1^2\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}} I(x)dx = \frac{q_0^2q_1}{1-q_1} +$$

$$+q_1^2\left(\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{0(2)}} I(x)dx + \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(1)}} I(x)dx\right) = \frac{q_0^2q_1}{1-q_1} + q_1^2\int\limits_0^1 (q_0+q_1+q_2I(x))d(q_0x) + q_1^2\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(1)}} I(x)dx,$$

звідки

$$(1-q_1^2)\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(1)}} I(x)dx = \frac{q_0^2q_1}{1-q_1} + q_1^2q_0(q_0+q_1) + q_1^2q_0q_2\int\limits_0^1 I(x)dx.$$

З роботи [4] відомо, що

$$\int\limits_0^1 I(x)dx = \frac{2q_0q_1+q_0^2}{1-2q_0q_1-q_1^2} \equiv S. \tag{8}$$

Тому

$$(1-q_1^2)\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(1)}} I(x)dx = \frac{q_0^2q_1}{1-q_1} + q_1^2q_0(1-q_2) + q_1^2q_0q_2S,$$

$$(1-q_1^2)\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(1)}} I(x)dx = q_0q_1(\frac{q_0}{1-q_1} + q_1(1-q_2) + q_1q_2S)$$

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(1)}} I(x)dx = \frac{q_0q_1}{1-q_1^2}(q_1 + \frac{q_0}{1-q_1} - q_1q_2(1-S)),$$

що і треба було довести. □

Лема 6. *Для функція φ_1, означеної на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{(1)}; \Delta^{Q_3}_{1(2)}]$ формулою (7) виконується:*

$$\varphi_1^R \equiv \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} \varphi_1(x)dx = \frac{q_1q_2}{1-q_1^2}\left(\frac{q_0}{1-q_1} + q_0q_1S\right), \text{ де } S = \frac{2q_1+q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2}.$$

Доведення. Легко бачити, що на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{1(0)}; \Delta^{Q_3}_{(1)}]$ виконується: $\varphi_1(x) = I(x)$, тоді

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} \varphi_1(x)dx = \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} I(x)dx.$$

Випишемо праву частину останньої рівності:

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} I(x)dx = \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{1} (q_0 + q_1I(x))d(q_0+q_1x) = q_0q_1x|^1_{\Delta^{Q_3}_{(1)}} + q_1^2\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{1} I(x)dx = q_0q_1 - \frac{q_0^2q_1}{1-q_1} +$$

$$+q_1^2\left(\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} I(x)dx + \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{2(0)}}^{1} I(x)dx\right) = q_0q_1 - \frac{q_0^2q_1}{1-q_1} + q_1^2\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} I(x)dx + q_1^2\int\limits_{0}^{1}(q_0I(x))d(q_0+q_1+q_2x) =$$

$$= q_0q_1\frac{1-q_1-q_0}{1-q_1} + q_1^2\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} I(x)dx + q_1^2q_0q_2\int\limits_{0}^{1} I(x)dx = \frac{q_0q_1q_2}{1-q_1} + q_1^2\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} I(x)dx + q_1^2q_0q_2\int\limits_{0}^{1} I(x)dx,$$

звідки

$$(1-q_1^2)\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} I(x)dx = \frac{q_0q_1q_2}{1-q_1} + q_1^2q_0q_2\int\limits_{0}^{1} I(x)dx.$$

Враховуючи рівність (8), отримаємо

$$(1-q_1^2)\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(2)}} I(x)dx = q_0q_1q_2(\frac{1}{1-q_1} + q_1S),$$

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{1(0)}}^{\Delta^{Q_3}_{1(1)}} I(x)dx = \frac{q_1 q_2}{1-q_1^2}\left(\frac{q_0}{1-q_1} + q_0 q_1 S\right),$$

що і треба було довести. □

2 Основний результат

Теорема 1. *Множина неперервних на* $[0;1]$ *функцій, які зберігають цифру 1 (без примноження) у* Q_3*–зображенні чисел, є континуальною.*

Доведення. Для обґрунтування даного твердження досить вказати бієктивне відображення підмножини $\mathfrak{F}$ класу P_c неперервних функцій на множину канторівського типу

$$C \equiv C[Q_3, \{0,2\}] = \{x : x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in \{0,2\}\},$$

оскільки остання, як відомо [1], є континуальною.

А для цього досить показати, що для будь-якого $y_0 \in C$ існує неперервна функція $f \in P_c$, така, що

$$f(1) = f(\Delta^{Q_3}_{(2)}) = y_0 = \Delta^{Q_3}_{r_1\ldots r_k\ldots}, \text{ де } r_k \in \{0,2\}.$$

Враховуючи «симетричність» графіка функції f (згідно з домовленістю) тобто $f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}) = f(\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_k]\ldots})$, то досить функцію f конструктивно означити на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{(1)}; 1]$.

Розглянемо числову послідовність (x_k), де $x_k = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)}$.

Очевидно, що $x_k \to 1 = \Delta^{Q_3}_{(2)}$ $(k \to \infty)$.

Зрозуміло, що

$$[\Delta^{Q_3}_{(1)}; 1) = [\Delta^{Q_3}_{(1)}; \Delta^{Q_3}_{2(1)}] \bigcup_{k=1}^{\infty} [\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k+1}(1)}].$$

Функцію f визначимо на кожному з відрізків, що беруть участь в останньому об'єднанні, в залежності від цифр $r_1, \ldots, r_k, \ldots$ Q_3-зображення числа y_0, за допомогою спеціально введених функцій ψ_m і φ_m.

На відрізку $[\Delta^{Q_3}_{(1)}; \Delta^{Q_3}_{2(1)}]$ функцію f означимо рівністю:

$$f(x) = \begin{cases} e(x), \text{ якщо } r_1(y_0) = 2, \\ I(x), \text{ якщо } r_1(y_0) = 0. \end{cases}$$

Нехай

$$\delta_k(x) = \begin{cases} \alpha_k(x), \text{якщо } r_k(y_0) = 2, \\ [2 - \alpha_k(x)], \text{якщо } r_k(y_0) = 0. \end{cases}$$

Для всіх $x \in [\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{m}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{m+1}(1)}]$ покладемо:

$$f(x) \equiv \begin{cases} \psi_m(x) \text{ при } r_m(y_0) = 2, \\ \varphi_m(x) \text{ при } r_m(y_0) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

З леми 1 та леми 2 слідує, що ψ_m та φ_m на кожному циліндрі рангу m є неперервними функціями, причому перша – лінійною, а друга – сингулярною.

Залишилося довести, що функція f, будучи визначеною в точці $x_m = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots 2}_{m}(1)}$, є в ній неперервною. Для цього покажемо, що

$$\lim_{x\to x_m-0} f(x) = \lim_{x\to x_m+0} f(x).$$

Точка x_m є спільною точкою відрізків $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots 2}_{m-1}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots 2}_{m}(1)}]$ та $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots 2}_{m}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots 2}_{m+1}(1)}]$, на яких функія f визначається за формулами (9).

Для значень r_m та r_{m+1} розглянемо можливі випадки.

1) Якщо $r_m = r_{m+1} = 0$, то

$$\lim_{x\to x_m-0} f(x) = \varphi_m(x_m) = \Delta^{Q_3}_{\delta_1\ldots\delta_m(1)},$$

$$\lim_{x\to x_m+0} f(x) = \varphi_{m+1}(x_m) = \Delta^{Q_3}_{\delta_1\ldots\delta_m\delta_{m+1}(1)}.$$

Враховуючи, що $r_{m+1} = 0$, отримаємо, що $\delta_{m+1} = 2 - \alpha_{m+1}(x_m) = 1$. Звідки слідує, що $\lim\limits_{x\to x_m-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_m+0} f(x)$.

2) Якщо $r_m = r_{m+1} = 2$, то

$$\lim_{x\to x_m-0} f(x) = \psi_m(x_m) = \Delta^{Q_3}_{\delta_1\ldots\delta_m(1)},$$

$$\lim_{x\to x_m+0} f(x) = \psi_{m+1}(x_m) = \Delta^{Q_3}_{\delta_1\ldots\delta_m\delta_{m+1}(1)}.$$

Оскільки $r_{m+1} = 2$, то $\delta_{m+1} = \alpha_{m+1}(x_m) = 1$. Тому $\lim\limits_{x\to x_m-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_m+0} f(x)$.

3) Якщо $r_m = 2$, $r_{m+1} = 0$, то

$$\lim_{x\to x_m-0} f(x) = \psi_m(x_m) = \Delta^{Q_3}_{\delta_1\ldots\delta_m(1)},$$

$$\lim_{x\to x_m+0} f(x) = \varphi_{m+1}(x_m) = \Delta^{Q_3}_{\delta_1\ldots\delta_m\delta_{m+1}(1)}.$$

Враховуючи, що $r_{m+1} = 0$, отримаємо $\delta_{m+1} = 2 - \alpha_{m+1}(x_m) = 1$, звідки слідує, що $\lim\limits_{x\to x_m-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_m+0} f(x)$.

4) Якщо $r_m = 0$, $r_{m+1} = 2$, то

$$\lim_{x\to x_m-0} f(x) = \varphi_m(x_m) = \Delta^{Q_3}_{\delta_1\ldots\delta_m(1)},$$

$$\lim_{x\to x_m+0} f(x) = \psi_{m+1}(x_m) = \Delta^{Q_3}_{\delta_1\ldots\delta_m\delta_{m+1}(1)}.$$

Оскільки $r_{m+1} = 2$, то $\delta_{m+1} = \alpha_{m+1}(x_m) = 1$. Тому $\lim\limits_{x\to x_m-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_m+0} f(x)$.

Таким чином, ми побудували функцію f, яка для наперед заданного $y_0 \in C$ дає $f(1) = y_0$. Цим самим ми довели еквівалентність підмножини P_c з множиною C, що рівносильно континуальності P_c. $\square$

Зауваження 1. *Кожну функцію $f \in P_c$, для якої відомим є значення $y_0 = f(1)$ можна однозначно визначити за формулами* (9).

3 Властивості класу функцій $f \in P_c$

У роботі [6] було встановлено, що множина кожного рівня функції $f \in P_c$, тобто множина $f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}$, є або порожньої, або скінченною, або зліченною.

Маючи ефективний спосіб задання функцій f класу P_c за допомогою формул (9), ми можемо навести нові властивості функцій цього класу.

Лема 7. *Нехай $f \in P_c$ і $f(0) = f(1) = y_0 = \Delta^{Q_3}_{r_1r_2\ldots r_k\ldots}$. Тоді графік функції f має наступну симетрію $f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = f(\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_k]\ldots})$ і на кожному відрізку $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}]$, взятому із системи відрізків $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}]$, функція fє строго монотонною, причому зростаючою (спадною) при умові, що $r_k=2$ $(r_k=0)$.*

Доведення. Нехай $f \in P_c$, $f(0) = f(1) = \Delta^{Q_3}_{r_1r_2\ldots r_k\ldots}$.

Розглянемо відрізки: $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}(1)}]$ і $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}]$. Індукцією по $k \in \mathbb{N}$ легко перевірити, що якщо $f(0) = f(1)$, то $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}(1)}) = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)})$, що і встановлює факт «симетричності» графіка відносно прямої $x = \Delta^{Q_3}_{(1)}$. □

Теорема 2. *Нехай $f \in P_c$, $f(1) = y_0$. Якщо y_0 є Q_3-раціональним числом, тобто $y_0 = \Delta^{Q_3}_{r_1r_2\ldots r_m(0)}$ (або $y_0 = \Delta^{Q_3}_{r_1r_2\ldots r_m(2)}$), то f є функцією обмеженої варіації, причому:*

$$V_0^1[f] = G_m\frac{2q_0}{1-q_1} + 2\sum_{k=1}^{m}\left|G_{k-1}(\beta_{r_k} + \frac{(q_{r_k}-1)q_0}{1-q_1})\right|, \text{ де } G_m = \prod_{j=1}^{m} q_{r_j}.$$

Доведення. Нехай $f \in P_c$, $f(0) = f(1) = \Delta^{Q_3}_{r_1r_2\ldots r_m(0)}$. Оскільки графік функції f є «симетрич- ним» відносно прямої $x = \Delta^{Q_3}_{(1)}$, то $V_{[0;\Delta^{Q_3}_{(1)}]}[f] = V_{[\Delta^{Q_3}_{(1)};1]}[f]$.

Розглянемо наступну систему відрізків

$$[\Delta^{Q_3}_{(1)}; 1] = \bigcup_{k=1}^{m}[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}] \cup [\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{m}(1)}; 1],$$

на кожному з яких функцію f визначимо за формулами (9).

Позначимо $G_m = \prod\limits_{j=1}^{m} q_{r_j}$. Тоді

$$V^1_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}[f] = \sum_{k=1}^{m}|f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}) - f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)})| + |f(1) - f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{m}(1)})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}|\Delta^{Q_3}_{r_1\ldots r_k(1)} - \Delta^{Q_3}_{r_1\ldots r_{k-1}(1)}| + \left|\Delta^{Q_3}_{r_1\ldots r_m(0)} - \Delta^{Q_3}_{r_1\ldots r_m(1)}\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left| G_{k-1}\left(\beta_{r_k} + \frac{q_{r_k} q_0}{1-q_1}\right) - G_{k-1}\frac{q_0}{1-q_1} \right| + G_m \frac{q_0}{1-q_1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left| G_{k-1}\left(\beta_{r_k} + \frac{(q_{r_k}-1) q_0}{1-q_1}\right) \right| + G_m \frac{q_0}{1-q_1}.$$

Таким чином, варіація $V^1_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}[f]$ є обмеженою, а отже є обмеженою і варіація $V^1_0[f]=2V^1_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}[f]$. □

Теорема 3. *Для функції $f \in P_c$ при умові, що $f(0) = f(1) = \Delta^{Q_3}_{r_1 \ldots r_k \ldots}$, виконується:*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}(1-\varepsilon_k)q_0^{k-1}\Big(\psi_1^L q_0^{k-1} + \varphi_1^R q_2^{k-1}\Big) + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k q_2^{k-1}\Big(\psi_1^R q_2^{k-1} + \varphi_1^L q_0^{k-1}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{1-q_1}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big((1-q_0)(1-q_2^{k-1})q_0^k + (1-q_2)(1-q_0^{k-1})q_2^k\Big)\Big),$$

$$\text{де } \varepsilon_k = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } r_k = 0, \\ 1, & \textit{якщо } r_k = 2. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $y_0 = \Delta^{Q_3}_{r_1 \ldots r_k \ldots}$. Тоді

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^{\Delta^{Q_3}_{(1)}} f(x)dx + \int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^1 f(x)dx,$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}(1)}} f(x)dx + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}} f(x)dx,$$

Для визначення функції f на кожному з відрізків вигляду $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}]$ скористаємося формулами (9), а на відрізках $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}(1)}]$ — скористаємося «симетричністю» графіка функції f. Тоді

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}(1)}} \Big(\frac{2-r_k}{2}\psi_k(x) + +\frac{r_k}{2}\varphi_k(x)\Big)dx +$$

$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}}\Big(\frac{r_k}{2}\psi_k(x)+\frac{2-r_k}{2}\,\varphi_k(x)\Big)dx,$$

Позначимо

$$\varepsilon_k=\begin{cases}0, & \text{якщо } r_k=0,\\ 1, & \text{якщо } r_k=2.\end{cases}$$

Тоді

$$\int\limits_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}(1)}}(1-\varepsilon_k)\psi_k(x)dx+\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}(1)}}\varepsilon_k\varphi_k(x)dx\Big)$$

$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}}\varepsilon_k\psi_k(x)dx+\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k-1}(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}}(1-\varepsilon_k)\varphi_k(x)dx\Big),$$

$$\int\limits_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big((1-\varepsilon_k)\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{0(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}}(q_0^{k-1}\psi_1(x)d(q_0^{k-1}x)+\varepsilon_k\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{0(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}}(1-q_2^{k-1}+q_2^{k-1}\varphi_1(x)d(q_0^{k-1}x))\Big)+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big((1-\varepsilon_k)\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{2(1)}}q_0^{k-1}\varphi_1(x)d(q_2^{k-1}x)+\varepsilon_k\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{2(1)}}(1-q_2^{k-1}+q_2^{k-1}\psi_1(x))d(q_2^{k-1}x)\Big),$$

$$\int\limits_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big((1-\varepsilon_k)q_0^{2k-2}\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{0(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}}\psi_1(x)dx+\varepsilon_k\Big((1-q_2^{k-1})q_0^{k-1}x\Big|_{\Delta^{Q_3}_{0(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}}+q_0^{k-1}q_2^{k-1}\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{0(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{(1)}}\varphi_1(x)dx\Big)\Big)+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\varepsilon_k\Big((1-q_2^{k-1})q_2^{k-1}x\Big|_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{2(1)}}+q_2^{2k-2}\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{2(1)}}\psi_1(x)dx\Big)+(1-\varepsilon_k)q_0^{k-1}q_2^{k-1}\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{(1)}}^{\Delta^{Q_3}_{2(1)}}\varphi_1(x)dx\Big),$$

Враховуючи леми 4-6, маємо:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{\psi_1^L}{q_0^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-\varepsilon_k)q_0^{2k} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(1-q_2^{k-1})q_0^{k-1}\Big(\frac{q_0}{1-q_1}-\frac{q_0^2}{1-q_1}\Big)+$$
$$+\frac{\varphi_1^L}{q_0q_2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(q_0q_2)^k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(1-q_2^{k-1})q_2^{k-1}(\beta_2+\frac{q_0q_2}{1-q_1}-\frac{q_0}{1-q_1})+$$
$$+\frac{\psi_1^R}{q_2^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k q_2^{2k} + \frac{\varphi_1^R}{q_0q_2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-\varepsilon_k)(q_0q_2)^k,$$

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{\psi_1^L}{q_0^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-\varepsilon_k)q_0^{2k} + \frac{1-q_0}{1-q_1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(1-q_2^{k-1})q_0^k+$$
$$+\frac{\varphi_1^L}{q_0q_2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(q_0q_2)^k + \frac{1-q_2}{1-q_1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(1-q_2^{k-1})q_2^k+$$
$$+\frac{\psi_1^R}{q_2^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k q_2^{2k} + \frac{\varphi_1^R}{q_0q_2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-\varepsilon_k)(q_0q_2)^k,$$

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}(1-\varepsilon_k)q_0^{k-1}\Big(\psi_1^L q_0^{k-1}+\varphi_1^R q_2^{k-1}\Big) + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k q_2^{k-1}\Big(\psi_1^R q_2^{k-1}+\varphi_1^L q_0^{k-1}\Big)+$$
$$+\frac{1}{1-q_1}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big((1-q_0)(1-q_2^{k-1})q_0^k+(1-q_2)(1-q_0^{k-1})q_2^k\Big)\Big).$$

□

Список літератури

[1] Pratsiovytyi M. Fractal approach to investigations of singular distributions, National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, 1998. (in Ukrainian)

[2] Turbin A.F., Pratsiovytyi M.V. Fractal sets, functions and distributions, Naukova Dumka, Kyiv, 1992. (in Russian)

[3] Pratsiovytyi M., Vasylenko N. *Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation.* Int. J. of Math. Anal. 2013, **7**(64), 3155–3169. doi:10.12988/ijma.2013.311278

[4] Zamriy I.V., Pratsiovytyi M.V. *Singularity of the digit inversor in Q_3-representation of the fractional part of a real number, its fractal and integral properties.* Nonlinear oscil. 2015, **18**(1), 55–70. (in Ukrainian)

[5] Pratsiovytyi M.V., Zamriy I.V. *Inversor of digits of Q_3-representation for fractional part of real number as a solution of the system of three functional equations.* Naukovyi Chasopys NPU im. M.P. Dragomanova. Ser. 1. Phizyko-matematychni Nauky 2013, **15**, 156–167. (in Ukrainian)

[6] Pratsiovytyi M.V., Zamriy I.V. *Continuous functions preserving digit 1 Q_3-representation of a number.* Bukovinian Math. J. 2015, **3**(3-4), 142–159. (in Ukrainian)

[7] Pratsiovytyi M.V., Kalashnikov A.V. *On One Class of Continuous Functions with Complicated Local Structure, Most of which are Singular or Nondifferentiable.* Trudy IPMM NAN Ukrainy 2011, **23**, 178–189. (in Ukrainian)

[8] Pratsiovytyi M.V., Kalashnikov A.V. *Self-Affine Singular and Nowhere Monotone Functions Related to the Q-Representation of Real Numbers.* Ukr. Math. J. 2013, **65**(3), 405–417. (in Ukrainian)

[9] Pratsiovytyi M. *Distributions of random variables with independent Q-symbols*, Asymptotic and applied problems in the theory of random evolutions 1990, 92–101. (in Russian)

Надійшло 01.07.2019

Pratsiovytyi M.V., Vasylenko N.A., Maslova Y.P. *Cardinality of the set of continuous functions preserving digit 1 of Q_3-representation of a number*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 1 (2019), 69–81.

In the paper we study cardinality of the set P_c of continuous on $[0,1]$ functions preserving digit 1 in three-symbol self-similar Q_3-representation of a number. This representation generalizes the classic ternary representation: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\alpha_k(x) \equiv \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, where $\alpha_n(x) \in A_3 \equiv \{0,1,2\}$.

All functions from class P_c are given in the following form:

$$y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}, \text{ where } \alpha_n \in A_3, \gamma_n \in A_3,$$

$$x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} \equiv \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right]$$

and $\gamma_n = \gamma_n(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$ but $\gamma_n = 1$ if and only if $\alpha_n(x) = 1$.
We prove that P_c is a continuum set. Analytical expression for functions from class P_c are obtained. Their variational and integral properties are also studied.