Bukovinian Math. Journal. 2019, **7**, 1, 3–13 Буковинський матем. журнал 2019, Т.7, №1, 3–13

Базилевич І. Б., Якимишин Х. М.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ МОМЕНТІВ ТА ТВІРНОЇ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОСТІ ПЕРЕТВОРЕНЬ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ ТА МІГРАЦІЄЮ

Досліджується однорідний гіллястий процес з міграцією та неперервним часом. Отримано диференціальні рівняння для факторіальних моментів процесу. Знайдено вигляд математичного сподівання і другого факторіального моменту. Виведено диференціальне рівняння, знайдено розв'язок та досліджено асимптотичну поведінку при $t \to \infty$ для твірної функції кількості перетворень у системі.

Ключові слова і фрази: гіллястий процес, твірна функція, неперервний час, міграція, моменти, кількість перетворень, асимптотична поведінка.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: *i_bazylevych@yahoo.com, yakymyshyn_hrystyna@ukr.net*

1. Вступ

Перші задачі з теорії гіллястих процесів з'явились у XIX ст. Проте інтенсивний розвиток цього напрямку теорії випадкових процесів розпочався у 40-х роках XX ст.

Вперше міграційні процеси, розглянули С. В. Нагаєв і Л. В. Хан [1] та Н. Янев і К. Мітов [2] у 1980 році.

У переважній більшості гіллясті процеси з міграцією досліджували для випадку дискретного часу. Хоча є і статті для гіллястих процесів з неперервним часом. Зокрема, у [3], [4], [5], [6].

У даній статті досліджується однорідний гіллястий процес з одним типом частинок з неперервним часом та міграцією (імміграцією та еміграцією частинок) [7].

2. Опис моделі гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом

Розглянемо марківський гіллястий процес з одним типом частинок та міграцією $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$. $\mu(t)$ позначає кількість частинок у момент часу $t \in [0, \infty)$.

Вважаємо, що у початковий момент часу в системі існує одна частинка, тобто

$$\mu(0) = 1. \tag{1}$$

УДК 519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60J80.

© Базилевич І. Б., Якимишин Х. М., 2019

Процес $\mu(t)$, $t \in [0,\infty)$ при $\Delta t \to 0$ задається такими перехідними ймовірностями

$$P\{\mu(t+\Delta t)=j|\mu(t)=i\}=$$

$$=\begin{cases} 1+q_0\Delta t+o(\Delta t), & i=j=0;\\ q_j\Delta t+o(\Delta t), & i=0,\ j=1,2,...;\\ (p_0+\sum\limits_{l=1}^{m} r_l)\Delta t+o(\Delta t), & i=1,\ j=0;\\ 1+(q_0+r_0+p_1)\Delta t+o(\Delta t), & i=1,\ j=1;\\ (p_j+q_{j-1})\Delta t+o(\Delta t), & i=1,\ j=2,...;\\ \sum\limits_{l=i}^{m} r_l\Delta t+o(\Delta t) & 1<i\le m,\ j=0;\\ (ip_0+r_1)\Delta t+o(\Delta t), & i=2,3,...,\ j=i-1;\\ r_{i-j}\Delta t+o(\Delta t), & i=3,...,m,\ 1<j<i-1;\\ r_{i-j}\Delta t+o(\Delta t), & i=m+1,...,\ i-m\le j<i-1;\\ 1+(q_0+r_0+ip_1)\Delta t+o(\Delta t), & i=2,3,...,\ i=j;\\ (ip_{j-i+1}+q_{j-i})\Delta t+o(\Delta t), & i=2,3,...,\ i<j;\\ o(\Delta t), & \textit{в інших випадках}, \end{cases} \tag{2}$$

де m – деяке фіксоване натуральне число, а p_k, q_k та r_n задовольняють умови

$$p_k \ge 0,\ k\ne 1,\ p_1<0,\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k=0,$$

$$q_k \ge 0,\ k\ne 0,\ q_0<0,\ \sum_{k=0}^{\infty} q_k=0,$$

$$r_n \ge 0,\ n=\overline{1,m},\ r_0<0,\ \sum_{k=0}^{m} r_k=0.$$

Зазначимо, що p_k $(k=0,1,...)$ – інтенсивність розмноження частинок, q_k $(k=0,1,...)$ – інтенсивність імміграції частинок, а r_n $(n=\overline{0,m})$ – інтенсивність еміграції частинок.

Введемо наступні позначення

$$F_\mu(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu(t)=n\}s^n,$$

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n,\ |s|\le 1,\ s\in\mathbb{C},$$

$$g(s)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n,\ |s|\le 1,\ s\in\mathbb{C},$$

$$r(s)=\sum_{n=0}^{m} r_n s^{-n},\ 0<|s|\le 1.$$

У [7] показано, що для процесу $\mu(t)$ мають місце твердження

Теорема 1. *Твірна функція процесу* $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$, *при* $|s| \leq 1$ *та* $s \neq 0$ *задівольняє диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + g(s)F_\mu(t,s) +$$

$$+\sum_{n=0}^{m} P\{\mu(t)=n\}\left(s^n \sum_{k=0}^{n} r_k s^{-k} + \sum_{k=n+1}^{m} r_k\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{\mu(t)=n\} s^n r(s) \qquad (3)$$

з початковою умовою

$$F_\mu(0,s) = s. \qquad (4)$$

Теорема 2. *Для процесу* $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$ *має місце система рівнянь Колмогорова*

$$\begin{cases} \frac{dP\{\mu(t)=0\}}{dt} = P\{\mu(t)=0\}q_0 + P\{\mu(t)=1\}p_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} P\{\mu(t)=k\} \sum\limits_{j=k}^{m} r_j, \\ \frac{dP\{\mu(t)=n\}}{dt} = \sum\limits_{k=0}^{n} P\{\mu(t)=k\} q_{n-k} + \sum\limits_{k=1}^{n+1} kP\{\mu(t)=k\} p_{n+1-k} + \\ + \sum\limits_{k=n}^{n+m} P\{\mu(t)=k\} r_{k-n}, \ n \geq 1. \end{cases} \qquad (5)$$

3. Рівняння для моментів гіллястого процесу з міграцією

Введемо наступні позначення

$$M(\mu(t)(\mu(t)-1)...(\mu(t)-k+1)) = M_k(t),$$

$$f^{(k)}(1) = m_{0,k}, \ g^{(k)}(1) = m_{1,k},$$

Зокрема,

$$M\mu(t) = A(t), \ f'(1) = a_0, \ g'(1) = a_1, \ r'(1) = a_2,$$

$$M(\mu(t)(\mu(t)-1)) = B(t), \ f''(1) = b_0, \ g''(1) = b_1, \ r''(1) = b_2,$$

$$M(\mu(t)(\mu(t)-1)(\mu(t)-2)) = C(t), \ f^{(3)}(1) = c_0, \ g^{(3)}(1) = c_1, \ r^{(3)}(1) = c_2,$$

$$P_\mu(t,n) = P\{\mu(t)=n\}.$$

Теорема 3. *Факторіальний момент порядку* l $(l > 0)$ *процесу* $\mu(t)$ *задовільняє диференціальне рівняння*

$$\frac{dM_l(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{l-1} C_l^j m_{0,(l-j)} M_{j+1}(t) + \sum_{j=0}^{l-1} C_l^j m_{1,(l-j)} M_j(t) +$$

$$+\sum_{j=0}^{l-1} C_l^j m_{2,(l-j)} M_j(t) - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A_{n-k}^l P_\mu(t,n),$$

де

$$C_l^j = \frac{l!}{j!(l-j)!}, A_{n-k}^l = (n-k)...(n-k-l+1), \quad l = 1, 2, ...$$

Доведення. Розглянемо диференціальне рівняння для твірної функції (3)

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f(s)\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} + g(s)F(t,s) +$$

$$+\sum_{n=0}^{m} P_\mu(t,n)\left(s^n\sum_{k=0}^{n} r_k s^{-k} + \sum_{k=n+1}^{m} r_k\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} P_\mu(t,n)s^n r(s).$$

Перегрупувавши останні два доданки, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{m} P_\mu(t,n)\left(s^n\sum_{k=0}^{n} r_k s^{-k} + \sum_{k=n+1}^{m} r_k\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} P_\mu(t,n)s^n r(s) =$$

$$= F(t,s)r(s) - \sum_{k=1}^{m} r_k s^{-k}\sum_{n=0}^{k-1} P_\mu(t,n)s^n + \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} P_\mu(t,n).$$

Таким чином, рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f(s)\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} + g(s)F(t,s) + F(t,s)r(s) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} r_k s^{-k}\sum_{n=0}^{k-1} P_\mu(t,n)s^n + \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} P_\mu(t,n).$$

Продиференціюємо отримане рівняння по s

$$\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial t\partial s} = f'(s)\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} + f(s)\frac{\partial^2 F(t,s)}{\partial s^2} + g'(s)F(t,s) +$$

$$+g(s)\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} + \frac{\partial F(t,s)}{\partial s}r(s) + F(t,s)r'(s) - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1}(n-k)P_\mu(t,n)s^{n-k-1}. \tag{6}$$

При $s=1$ отримаємо рівняння для першого моменту

$$\frac{A(t)}{\partial t} = a_0 A(t) + a_1 + a_2 - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1}(n-k)P_\mu(t,n).$$

Диференціюючи (6) по s отримаємо

$$\frac{\partial^3 F_\mu(t,s)}{\partial t\partial s^2} = f''(s)\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} + 2f'(s)\frac{\partial^2 F(t,s)}{\partial s^2} + f(s)\frac{\partial^3 F(t,s)}{\partial s^3} + g''(s)F(t,s) +$$

$$+2g'(s)\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} + g(s)\frac{\partial^2 F(t,s)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F(t,s)}{\partial s^2}r(s) + 2\frac{\partial F(t,s)}{\partial s}r'(s) +$$

$$+F(t,s)r''(s) - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A_{n-k}^2 P_\mu(t,n)s^{n-k-2}. \tag{7}$$

Підставляючи $s=1$ отримаємо рівняння для другого моменту

$$\frac{dB(t)}{dt} = 2a_0 B(t) + (b_0 + 2a_1 + 2a_2)A(t) + b_1 + b_2 - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A_{n-k}^2 P_\mu(t,n).$$

При диференціюванні (7) по s отримаємо

$$\frac{\partial^4 F_\mu(t,s)}{\partial t \partial s^3} = f^{(3)}(s)\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} + 3f''(s)\frac{\partial^2 F(t,s)}{\partial s^2} + 3f'(s)\frac{\partial^3 F(t,s)}{\partial s^3} + f(s)\frac{\partial^4 F(t,s)}{\partial s^4} +$$

$$+g^{(3)}(s)F(t,s) + 3g''(s)\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} + +3g'(s)\frac{\partial^2 F(t,s)}{\partial s^2} + g(s)\frac{\partial^3 F(t,s)}{\partial s^3} +$$

$$+r(s)\frac{\partial^3 F(t,s)}{\partial s^3} + 3r'(s)\frac{\partial^2 F(t,s)}{\partial s^2} + 3r''(s)\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} +$$

$$+F(t,s)r^{(3)}(s) - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A^3_{n-k} P_\mu(t,n) s^{n-k-3}.$$

Відповідно, рівняння для третього факторіального моменту набуде вигляду

$$\frac{dC(t)}{dt} = 3a_0 C(t) + (3b_0 + 3a_1 + 3a_2)B(t) + (c_0 + 3b_1 + 3b_2)A(t) +$$

$$+c_1 + c_2 - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A^3_{n-k} P_\mu(t,n).$$

Використавши формулу похідної l-ного порядку від добутку функцій

$$(uv)^{(l)} = \sum_{j=0}^{l} C_l^j u^{(l-j)} v^{(j)},$$

отримаємо

$$\frac{\partial^{l+1} F_\mu(t,s)}{\partial t \partial s^l} = \sum_{j=0}^{l} C_l^j f^{(l-j)}(s)\frac{\partial^{j+1} F(t,s)}{\partial s^{j+1}} + \sum_{j=0}^{l} C_l^j g^{(l-j)}(s)\frac{\partial^{j} F(t,s)}{\partial s^{j}} +$$

$$+\sum_{m=0}^{l} C_l^j r^{(l-m)}(s)\frac{\partial^m F(t,s)}{\partial s^m} - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A^l_{n-k} P_\mu(t,n) s^{n-k-l}.$$

При $s = 1$ отримаємо

$$\frac{dM_l(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{l-1} C_l^j m_{0,(l-j)} M_{j+1}(t) + \sum_{j=0}^{l-1} C_l^j m_{1,(l-j)} M_j(t) +$$

$$+\sum_{j=0}^{l-1} C_l^j m_{2,(l-j)} M_j(t) - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A^l_{n-k} P_\mu(t,n).$$

□

Наслідок 1. *Диференціальні рівняння для перших трьох моментів визначаються наступним чином*

$$\frac{A(t)}{\partial t} = a_0 A(t) + a_1 + a_2 - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n-k) P_\mu(t,n), \tag{8}$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = 2a_0B(t) + (b_0 + 2a_1 + 2a_2)A(t) + b_1 + b_2 - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A_{n-k}^2 P_\mu(t,n), \qquad (9)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = 3a_0C(t) + (3b_0 + 3a_1B + 3a_2)B(t) + (c_0 + 3b_1 + 3b_2)A(t) +$$

$$+ c_1 + c_2 - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A_{n-k}^3 P_\mu(t,n).$$

Наслідок 2. *Математичне сподівання процесу $\mu(t)$ визначається рівністю*

$$A(t) = -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \left(1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n-k) \int_0^t P_\mu(t,n) e^{-a_0 u} du\right) e^{a_0 t}. \qquad (10)$$

Другий момент процесу $\mu(t)$ визначається співвідношенням

$$B(t) = \left(\frac{b_1 + b_2}{2a_0}(1 - e^{-2a_0 t}) + (b_0 + 2a_1 + 2a_2) \int_0^t A(u) e^{-2a_0 u} du - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A_{n-k}^2 \int_0^t P_\mu(t,n) e^{-2a_0 u} du \right) e^{2a_0 t}.$$

Доведення. Розглянемо більш детально рівняння (8). Це лінійне неоднорідне рівняння першого порядку. Відповідне йому однорідне рівняння має розв'язок $A(t) = Ce^{a_0 t}$. Розв'язок відповідного неоднорідного рівняння знайдемо методом варіації сталих, тобто підставивши у (8) заміну $A(t) = C(t)e^{a_0 t}$. Знайдемо невідому функцію $C(t)$ з рівняння

$$C'(t) = \big(a_1 + a_2 - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n-k) P_\mu(t,n)\big) e^{-a_0 t}.$$

Проінтегрувавши яке отримаємо

$$C(t) = \frac{a_1 + a_2}{a_0}(1 - e^{-a_0 t}) - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n-k) \int_0^t P_\mu(t,n) e^{-a_0 t} dt.$$

Оскільки $P_\mu(t,n)$, $n = 0, 1, 2, ...$ однозначно визначаються з системи рівнянь Колмогорова (5)(аналогічно [8]), то інтеграли

$$\int_0^t P_\mu(t,n) e^{-a_0 t} dt, \ \ n = 0, 1, ..., m-1$$

можна вважати відомими.

Таким чином, отримаємо

$$A(t) = Ce^{a_0 t} + e^{a_0 t} \left(\frac{a_1 + a_2}{a_0}(1 - e^{-a_0 t}) - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n-k) \int_0^t P_\mu(t,n) e^{-a_0 t} dt\right).$$

Врахувавши (1) знайдемо невідому сталу C

$$C = 1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n-k) \int_0^t P_\mu(t,n) e^{-a_0 t} dt_{|t=0} = 1.$$

Звідки отримуємо (10).

Знайдемо другий момент. Для цього розглянемо рівняння (9). Це також лінійне неоднорідне рівняння першого порядку. Розв'язок відповідного йому однорідного рівняння $B(t) = Ce^{2a_0 t}$. Використавши метод варіації сталих та заміну $B(t) = C(t)e^{2a_0 t}$ отримаємо

$$C(t) = \frac{b_1 + b_2}{2a_0}(1 - e^{-2a_0 t}) + (b_0 + 2a_1 + 2a_2) \int_0^t A(t) e^{-2a_0 t} dt - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A_{n-k}^2 \int_0^t P_\mu(t,n) e^{-2a_0 t} dt.$$

Таким чином, отримаємо

$$B(t) = Ce^{2a_0 t} + \left(\frac{b_1 + b_2}{2a_0}(1 - e^{-2a_0 t}) + (b_0 + 2a_1 + 2a_2) \int_0^t A(t) e^{-2a_0 t} dt - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A_{n-k}^2 \int_0^t P_\mu(t,n) e^{-2a_0 t} dt \right) e^{2a_0 t}.$$

Врахувавши початкову умову отримаємо $B(0) = 0$, що

$$C = \frac{b_1 + b_2}{2a_0}(e^{-2a_0 t} - 1) - (b_0 + 2a_1 + 2a_2) \int_0^t A(t) e^{-2a_0 t} dt_{|t=0} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A_{n-k}^2 \int_0^t P_\mu(t,n) e^{-2a_0 t} dt_{|t=0},$$

отже, $C = 0$. Що і потрібно було показати. $\square$

4. Твірна функція кількості перетворень для процесу $\mu(t)$

Нехай τ_1, τ_2, τ_3, ... – незалежні однаково розподілені випадкові величини, які визначають інтервали між перетвореннями частинок у системі. Введемо також випадкові величини θ_1, θ_2, θ_3, ..., які визначають моменти перетворень

$$\theta_0 = 0,\ \theta_1 = \tau_1,\ \theta_2 = \tau_1 + \tau_2,\ ...,$$

$$\theta_n = \tau_1 + ... + \tau_n, ...$$

Нехай $\rho(t)$ – визначає кількість перетворень у системі до моменту часу t.

Теорема 4. *Нехай $\rho(t)$ – кількість перетворень у системі до моменту часу t. $F_\rho(t,s)$ – твірна функція процесу $\rho(t)$.*

Тоді $F_\rho(s,t)$

1. Задовільняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial F_\rho(t,s)}{\partial t} = F_\rho(t,s)\big((M\mu(t)p_1 + q_0 + r_0(1 - P\{\mu(t)=0\}))(1-s)\big)$$

з початковою умовою

$$F_\rho(0,s) = 1.$$

2. Визначається рівністю

$$F_\rho(t,s) = \exp\left\{\left(p_1\int\limits_0^t M\mu(u)du + q_0t + r_0\int\limits_0^t(1 - P\{\mu(u)=0\})du\right)(1-s)\right\}.$$

3. При $t\to\infty$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\rho - M\rho}{\sqrt{D\rho}}\right) \to \mathcal{N}(0,1).$$

Доведення. Знайдемо розподіл процесу $\rho(t)$ в момент часу $t+\Delta t$. Відомо, що за час Δt може відбутись не більше одного перетворення, тому розподіл процесу $\rho(t)$ в момент часу $t+\Delta t$ визначається через розподіл процесу $\mu(t)$ в момент часу t, перехідних ймовірностей для процесу $\mu(t)$ (2) та кількості перетворень, що відбулись до моменту часу $t+\Delta t$.

$$P\{\rho(t+\Delta t)=0\} = P\{\rho(t)=0\}\Bigg(P\{\mu(t)=0\}(1+q_0\Delta t+$$

$$+o(\Delta t)) + P\{\mu(t)=1\}(1+(q_0+r_0+p_1)\Delta t + o(\Delta t)) + \sum_{i=2}^{\infty} P\{\mu(t)=i\}(1+$$

$$+(q_0+r_0+ip_1)\Delta t + o(\Delta t))\Bigg) = P\{\rho(t)=0\}\big(1+(q_0+M\mu(t)p_1)\Delta t+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty} P\{\mu(t)=i\}r_0 + o(\Delta t)\big) = P\{\rho(t)=0\}+$$

$$+P\{\rho(t)=0\}(M\mu(t)p_1 + q_0 + r_0(1-P\{\mu(t)=0\}))\Delta t + o(\Delta t).$$

Якщо $n\geq 0$, то

$$P\{\rho(t+\Delta t)=n+1\} = P\{\rho(t)=n+1\}\Bigg(1+\big(q_0+M\mu(t)p_1+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty} P\{\mu(t)=i\}r_0\big)\Delta t + o(\Delta t)\Bigg) + P\{\rho(t)=n\}\Bigg(P\{\mu(t)=0\}\big(\sum_{j=1}^{\infty} q_j\Delta t+$$

$$+o(\Delta t)\big) + P\{\mu(t)=1\}\big((p_0+\sum_{l=1}^{m} r_l)\Delta t + o(\Delta t) + \sum_{j=2}^{\infty}(p_j+q_{j-1})\Delta t + o(\Delta t)\big)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m} P\{\mu(t)=i\}(\sum_{l=i}^{m} r_l\Delta t + o(\Delta t)) + \sum_{i=2}^{\infty} P\{\mu(t)=i\}((ip_0+r_1)\Delta t + o(\Delta t))+$$

$$+\sum_{i=3}^{m} P\{\mu(t)=i\}\big(\sum_{l=2}^{i-1} r_l\Delta t + o(\Delta t)\big) + \sum_{i=m+1}^{\infty} P\{\mu(t)=i\}\big(\sum_{j=i-m}^{i-2} r_{i-j}\Delta t + o(\Delta t)\big)+$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty} P\{\mu(t)=i\}\big(\sum_{j=i+1}^{\infty}(ip_{j-i+1}+q_{j-i})\Delta t + o(\Delta t)\big)\Bigg) = P\{\rho(t)=n+1\}\big(1+$$

$$+(M\mu(t)p_1+q_0+r_0(1-P\{\mu(t)=0\}))\Delta t + o(\Delta t)\big)+$$

$$+P\{\rho(t)=n\}\big(-q_0\Delta t + p_0 M\mu(t)\Delta t + (-p_0-p_1)M\mu(t)\Delta t-$$

$$-r_0(1-P\{\mu(t)=0\})\Delta t + o(\Delta t)\big) = P\{\rho(t)=n+1\}\big(1+(M\mu(t)p_1+q_0+$$

$$+r_0(1-P\{\mu(t)=0\}))\Delta t + o(\Delta t)\big) + P\{\rho(t)=n\}\big(-q_0\Delta t-$$

$$-p_1 M\mu(t)\Delta t - r_0(1-P\{\mu(t)=0\})\Delta t + o(\Delta t)\big).$$

Домножимо на s^n і просумуємо по n від 0 до ∞ та отримаємо

$$F_\rho(t+\Delta t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\rho(t+\Delta t)=n\}s^n = P\{\rho(t+\Delta t)=0\}s^0 + P\{\rho(t+\Delta t)=1\}s^1 + ...+$$

$$+P\{\rho(t+\Delta t)=n\}s^n + ... = P\{\rho(t)=0\}s^0 + P\{\rho(t)=0\}(M\mu(t)p_1+$$

$$+q_0+r_0(1-P\{\mu(t)=0\}))\Delta t + o(\Delta t)s^0 + \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1}\Bigg(P\{\rho(t)=n+1\}\big(1+(M\mu(t)p_1+$$

$$+q_0+r_0(1-P\{\mu(t)=0\}))\Delta t + o(\Delta t)\big) + P\{\rho(t)=n\}\big(-q_0\Delta t - p_1 M\mu(t)\Delta t-$$

$$-r_0(1-P\{\mu(t)=0\})\Delta t + o(\Delta t)\big)\Bigg) = F_\rho(t,s)\big(1+(M\mu(t)p_1+$$

$$+q_0+r_0(1-P\{\mu(t)=0\}))\Delta t\big) + F_\rho(t,s)\big(-q_0 - p_1 M\mu(t)-$$

$$-r_0(1-P\{\mu(t)=0\})\big)s\Delta t + o(\Delta t) = F_\rho(t,s) + F_\rho(t,s)\big((M\mu(t)p_1+$$

$$+q_0+r_0(1-P\{\mu(t)=0\}))(1-s)\big)\Delta t + o(\Delta t).$$

Звідси випливає диференціальне рівняння для $F_\rho(t,s)$

$$\frac{\partial F_\rho(t,s)}{\partial t} = F_\rho(t,s)\big((M\mu(t)p_1+q_0+r_0(1-P\{\mu(t)=0\}))(1-s)\big).$$

Так як у початковий момент часу в системі не можуть відбуватись перетворення, то $F_\rho(0,s)=1$, а, значить, розв'язок даного рівняння набуде вигляду

$$F_\rho(t,s) = \exp\left\{\left(\int_0^t p_1 M\mu(u)du + q_0 t + r_0\int_0^t (1-P\{\mu(u)=0\})du\right)(1-s)\right\}.$$

Зазначимо, що $\int\limits_0^t p_1 M\mu(u)du$ та $\int\limits_0^t (1 - P\{\mu(u) = 0\})du$ можна вважати відомим, оскільки $P\{\mu(t) = 0\}$ однозначно визначається з системи рівнянь Колмогорова (5), а функція $M\mu(t)$ відома і визначається з (10).

Таким чином, перше і друге твердження доведено. Перейдемо до знаходження асимптотики при $t \to \infty$.

Зауважимо, що для довільного фіксованого t $F_\rho(t,s)$ – твірна функція пуассонівського розподілу. Параметр цього розподілу λ залежить від t і дорівнює

$$\lambda = \lambda(t) = -\Bigg(\int\limits_0^t p_1 M\mu(u)du + q_0 t + r_0 \int\limits_0^t (1 - P\{\mu(u) = 0\})du\Bigg).$$

Легко бачити, що $\lambda(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Розглянемо процес

$$\xi(t) = \frac{\rho(t) - M\rho(t)}{\sqrt{D\rho(t)}}.$$

Математичне сподівання пуссонівського розподілу з параметром $\lambda(t)$ дорівнює $\lambda(t)$, дисперсія цього процесу також дорівнює $\lambda(t)$, тому $M\xi(t) = 0$, а $D\xi(t) = 1$.

Характеристична функція процесу $\xi(t)$ $\varphi_\xi(t,u)$ виражається через характеристичну функцію процесу $\rho(t)$ $\varphi_\rho(t,u)$ наступним чином

$$\varphi_\xi(t,u) = exp\Bigg\{\frac{-iuM\rho(t)}{\sqrt{D\rho(t)}}\Bigg\} \cdot \varphi_\rho\Bigg(t, \frac{u}{\sqrt{D\rho(t)}}\Bigg) = exp\{-iu\sqrt{\lambda(t)}\}\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\lambda(t)\big(1 - e^{\frac{iu}{\sqrt{\lambda(t)}}}\big)\right\}.$$

Розглянемо $\ln \varphi_\xi(t,u)$

$$\ln \varphi_\xi(t,u) = -iu\sqrt{\lambda(t)} - \lambda(t)(1 - (1 + \frac{iu}{\sqrt{\lambda(t)}} + \frac{(iu)^2}{2!\sqrt{\lambda^2(t)}} +$$

$$+\frac{(iu)^3}{3!\sqrt{\lambda^3(t)}} + \frac{(iu)^4}{4!\sqrt{\lambda^4(t)}} + ...)) = \frac{-u^2}{2} + o(1).$$

Таким чином,

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_\xi(t,u) = e^{\frac{-u^2}{2}},$$

а значить,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\rho - M\rho}{\sqrt{D\rho}}\right) \to \mathcal{N}(0,1).$$

□

Література

[1] Nagaev S. V., Khan L. V. *Limit theorems for Galton- Watson branching processes with migration.* Theory Probab. Appl. 1980, **25**, 523–534.(in Russian)

[2] N. Yanev, K. Mitov. *Controlled branching processes: the case of random migration.* Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences. 1980, **33**, 473–475.

[3] Alimov D., Reshetnyak V. N. *Branching process with immigration and limited emigration*, Applied problems of probability theory. collection of scientific papers, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev. 1982, 4–14. (in Russian)

[4] O. P. Srivastava and S. C. Gupta, *On a countinuous-time branching process with migration*, Statistica. 1989, **XLIX**, no. 4, 547–552.

[5] A. Y. Chen and E. Renshaw, *Markov branching processes regulated by emigration and large immigration*, Stochastic Processes and their Applications. 1995, **57**, 339–359.

[6] I. Rahimov and W.S. Al-Sabah, *Branching processes with decreasing immigration and tribal emigration*, Arab J. Math. Sci. 2000, **6**, no. 2, 81–97.

[7] Yakymyshyn Kh. *Equation for generation function for branching processes with migration.*Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 2017, **84**, 119–125. (in Ukrainian)

[8] Formanov Sh.K., Kaverin S.V. *Markov branching processes with emigration. I.* Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk. 1986, **5**, 23–28. (in Russian)

Надійшло 25.01.2019

Bazylevych I., Yakymyshyn H. *Differential equations for moments and the generating function of number of transformations for branching process with continuous time and migration*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 1 (2019), 3–13.

A separate section of random processes studies laws of reproduction and transformation of particles and it is the theory of branching processes. The basic mathematical assumption distinguishes branching processes among other random processes is the transformation of particles independently from one another. The laws of reproduction and transformation of particles are subject to regularities, in which randomness plays a major role.

This article investigates a homogeneous branching process with one particle type, migration, and continuous time $\mu(t)$, $t \in [0,\infty)$. It is assume that there is one particle in the system at the beginning. The process is defined by transient probabilities, determined by the intensities of particle reproduction, immigration, and emigration. Two problems are explored. In the first of these, for this process model, a differential equation for the factorial moment of arbitrary order is found. As a consequence, the form of differential equations for the mathematical expectation of the process, the second and third factorial moments of the process, is given. The result is a mathematical expectation of $A(t)$, $t \in [0,\infty)$ branching process, and the appearance of a second factorial moment for the real function of process $B(t)$, $t \in [0,\infty)$, which allows you to explore the process in details depending on the criticality of the process. The second problem investigates the random process $\rho(t)$, which determines the number of transformations of particles in a system of homogeneous branching process with migration and continuous time up to the time t. The differential equation for the generic function of the process $\rho(t)$ is obtained. The form of the real function of the process is found and the boundary behavior at $t \to \infty$ is investigated. It is shown that the centered and normalized process at $t \to \infty$ in the distribution coincides with the standard to normal distribution.