Лінчук Ю.С.

ПРО ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ ОПЕРАТОРІВ НА ПРОСТОРІ $\mathcal{H}(G)$

Описано всі набори лінійних операторів, які діють з одного простору функцій, аналітичних в довільній області комплексної площини, в інший аналогічний простір і задовольняють узагальнене мультиплікативне операторне співвідношення для довільної скінченної кількості множників.

Ключові слова і фрази: простір аналітичних функцій, мультиплікативні функціонали, мультиплікативні оператори, операторні рівняння.

Department of Mathematical Analysis, Chernivtsi National University, Kotsjubyns'koho 2, Chernivtsi 58012, UKRAINE
e-mail: *yustlin@gmail.com*

Вступ

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій. Нехай G_1, G_2 – довільні області комплексної площини. Лінійний оператор $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ називається мультиплікативним, якщо

$$A(fg) = A(f)A(g)$$

для всіх функцій f, g з простору $\mathcal{H}(G_1)$.

В [1] Н.Р. Нандакумар описав всі мультиплікативні оператори A у випадку $G_1 = G_2$, а в [2] він розв'язав цю задачу для довільних областей G_1, G_2. В монографії [3] описані мультиплікативні функціонали в різних просторах аналітичних функцій. Узагальнюючи поняття мультиплікативних функціоналів, в [4] описано всі трійки лінійних функціоналів L, M, N на просторі $\mathcal{H}(G)$, для яких виконується рівність

$$L(fg) = M(f)N(g)$$

при $f, g \in \mathcal{H}(G)$. Подальші дослідження різних модифікацій мультиплікативних операторів здійснювалися в роботах [5], [6].

УДК 517.983
2010 *Mathematics Subject Classification:* 47B38, 47A62.

Метою даної роботи є опис усіх наборів лінійних операторів A, B_j, $j = \overline{1,n}$, які діють з простору $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$ і для довільних функцій $f_j \in \mathcal{H}(G_1)$, $j = \overline{1,n}$, задовольняють рівність

$$A\left(\prod_{j=1}^{n} f_j\right) = \prod_{j=1}^{n} B_j(f_j).$$

1 Допоміжні твердження

Нехай G_1 та G_2 – довільні області комплексної площини і φ – довільна фіксована функція з простору $\mathcal{H}(G_2)$. Опишемо спочатку всі лінійні оператори $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$, які задовольняють співвідношення

$$\varphi(z)(A(fg))(z) = (Af)(z)(Ag)(z) \tag{1}$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G_1)$ при $z \in G_2$. Якщо $\varphi(z) \equiv 0$ в G_2, то з (1) випливає, що $A = 0$. Якщо ж $\varphi(z) \equiv 1$, то розв'язки відповідного рівняння (1) є мультиплікативними операторами з простору $\mathcal{H}(G_1)$ у $\mathcal{H}(G_2)$. Всі ненульові мультиплікативні оператори $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ описуються формулою $(Af)(z) = f(\psi(z))$, де ψ – довільна функція з простору $\mathcal{H}(G_2)$, для якої виконується умова: $\psi(G_2) \subseteq G_1$ [2]. Якщо $\varphi(z) \neq 0$ при $z \in G_2$, то поклавши в (1) $(Af)(z) = \varphi(z)(Bf)(z)$, $z \in G_2$, одержимо, що B є мультиплікативним оператором з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$. Таким чином, в цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1) в класі ненульових лінійних операторів $A : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$ дається формулою

$$(Af)(z) = \varphi(z)f(\psi(z)), \tag{2}$$

де $\psi \in \mathcal{H}(G_2)$, причому $\psi(G_2) \subseteq G_1$. Це твердження буде правильним і для довільної функції φ з простору $\mathcal{H}(G_2)$, яка тотожно не дорівнює нулеві.

Лема 1. *Нехай G_1, G_2 – довільні області комплексної площини, $\varphi \in \mathcal{H}(G_2)$, причому $\varphi(z) \not\equiv 0$ в G_2. Для того, щоб ненульовий лінійний оператор $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ задовольняв співвідношення* (1) *для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G_1)$ при $z \in G_2$, необхідно і достатньо, щоб оператор A зображався у вигляді* (2), *де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G_2)$, причому $\psi(G_2) \subseteq G_1$.*

Доведення. Необхідність. Нехай ненульовий лінійний оператор $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ задовольняє співвідношення (1). Позначимо $a_k = Ae_k$, де $e_k(z) = z^k$, $k = 0, 1 \ldots$. Тоді $a_k \in \mathcal{H}(G_2)$, $k = 0, 1, \ldots$. Покладаючи в (1) $f = g = 1$, одержимо, що $a_0(z)(a_0(z) - \varphi(z)) = 0$ при $z \in G_2$. Звідси випливає, що $a_0(z) \equiv 0$ в G_2, або $a_0(z) = \varphi(z)$ при $z \in G_2$. Якщо б $a_0(z) \equiv 0$ в G_2, то з (1) при $g = 1$ ми одержали б, що $A = 0$, а це неможливо. Таким чином, $a_0(z) = \varphi(z)$ при $z \in G_2$. Позначимо $S = \{z \in G_2 : \varphi(z) = 0\}$. Якщо $S = \varnothing$, то, як відзначалося вище, оператор A зображається формулою (2) для деякої функції $\psi \in \mathcal{H}(G_2)$, для якої виконується умова $\psi(G_2) \subseteq G_1$. Тому надалі вважатимемо, що $S \neq \varnothing$. Якщо $z \in S$, то з (1) одержуємо, що $(Af)(z) = 0$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G_1)$. Нехай тепер $z \in G_2 \setminus S$. Позначимо $L_z(f) = (Af)(z)$. Тоді L_z є лінійним функціоналом на просторі $\mathcal{H}(G_1)$, причому $L_z \neq 0$, оскільки $L_z(1) = \varphi(z) \neq$

0. З (1) випливає, що функціонал $\frac{1}{\varphi(z)}L_z$ є мультиплікативним. Використовуючи опис мультиплікативних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G_1)$ [3], одержуємо, що $\frac{1}{\varphi(z)}L_z(f) = f(z_1)$, де z_1 – деяка точка з області G_1. При $f = e_1$ звідси одержуємо, що $z_1 = \frac{a_1(z)}{\varphi(z)}$. Таким чином, при $z \in G_2 \setminus S$ ми маємо, що $\frac{a_1(z)}{\varphi(z)} \in G_1$ і $L_z(f) = \varphi(z)f\left(\frac{a_1(z)}{\varphi(z)}\right)$. Тому одержуємо, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G_1)$

$$(Af)(z) = \begin{cases} 0, \text{ при } z \in S, \\ \varphi(z)f\left(\frac{a_1(z)}{\varphi(z)}\right), z \in G_2 \setminus S. \end{cases} \tag{3}$$

Позначимо $\psi(z) = \frac{a_1(z)}{\varphi(z)}$ при $z \in G_2 \setminus S$. Функція $\psi(z)$ є аналітичною на множині $G_2 \setminus S$, причому $\psi(G_2 \setminus S) \subseteq G_1$. Покажемо, що кожна точка з множини S є усувною особливою точкою для функції $\psi(z)$. При $f = e_1$ з (3) одержуємо, що функція

$$(Ae_1)(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \in S, \\ a_1(z), \text{ якщо } z \in G_2 \setminus S \end{cases}$$

належить до простору $\mathcal{H}(G_2)$. Тому $a_1(z) = 0$ при $z \in S$. Візьмемо довільну точку $z_0 \in S$. Нехай ця точка є n-кратним нулем для функції $a_1(z)$ і m – кратним нулем для функції $\varphi(z)$. Тоді $a_1(z) = (z - z_0)^n \tilde{a}_1(z)$, $\varphi(z) = (z - z_0)^m \tilde{\varphi}(z)$ при $z \in G_2$, де $\tilde{a}_1$ та $\tilde{\varphi}$ належать простору $\mathcal{H}(G_2)$, причому $\tilde{a}_1(z_0) \neq 0$ і $\tilde{\varphi}(z_0) \neq 0$. Покажемо, що $n \geq m$. З (3) для $f = e_k$ одержимо, що

$$(Ae_k)(z) = \begin{cases} 0, \text{ при } z \in S, \\ (z - z_0)^{k(n-m)+m} \frac{(\tilde{a}_1(z))^k}{(\tilde{\varphi}(z))^{k-1}}, z \in G_2 \setminus S. \end{cases}$$

Оскільки функції Ae_k належать простору $\mathcal{H}(G_2)$ при $k = 1, 2, \ldots$, то, зокрема, вони є аналітичними в точці $z = z_0$. Тому для довільного натурального k виконується нерівність $k(n - m) + m \geq 0$. Отже, $n \geq m$. Тоді точка z_0 є усувною особливою точкою для функції $\psi(z) = \frac{a_1(z)}{\varphi(z)}$. Значить всі точки множини S є усувними особливими точками для функції ψ, і, отже, $\psi \in \mathcal{H}(G_2)$, причому $\psi(G_2 \setminus S) \subseteq G_1$. Покажемо тепер, що $\psi(S) \subseteq G_1$. Доведення цього включення проведемо методом від супротивного. Нехай існує точка $z_0 \in S$, для якої точка $w_0 = \psi(z_0) \notin G_1$. Припустимо, що точка z_0 є m-кратним нулем для функції $\varphi(z)$. Візьмемо довільне натуральне l таким, щоб $l > m$. Тоді функція $h(z) = \frac{1}{(z-w_0)^l}$ належить простору $\mathcal{H}(G_1)$. Нехай $\eta = Ah$. Тоді $\eta \in \mathcal{H}(G_2)$ і за формулою (3) маємо, що

$$\eta(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \in S, \\ \varphi(z)\frac{1}{(\psi(z)-w_0)^l}, \text{ якщо } z \in G_2 \setminus S. \end{cases}$$

З цієї рівності за вибором числа l випливає, що функція $\eta(z)$ не є аналітичною в точці $z = z_0$. Одержали суперечність. Таким чином $\psi(S) \subseteq G_1$ і, отже, $\psi(G_2) \subseteq G_1$. Необхідність умов леми доведено.

Достатність умов леми є очевидною.

2 Основні результати

Теорема 1. *Нехай G_1 і G_2 – довільні області комплексної площини, $\varphi, \varphi_1 \in \mathcal{H}(G_2)$, причому кожна з цих функцій відмінна від тотожного нуля. Для того, щоб існував ненульовий лінійний оператор $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$, для якого виконується рівність*

$$\varphi(z)(A(fg))(z) = \varphi_1(z)(Af)(z)(Ag)(z) \tag{4}$$

при $f, g \in \mathcal{H}(G_1)$ та $z \in G_2$ необхідно і достатньо, щоб кожен нуль функції $\varphi_1(z)$ з області G_2 був також нулем для функції $\varphi(z)$, причому кратність будь-якого нуля для $\varphi_1(z)$ в G_2 була не більшою, ніж кратність цього нуля для $\varphi(z)$. При виконанні цієї умови загальний розв'язок операторного співвідношення (4) дається формулою

$$(Af)(z) = \chi(z)f(\psi(z)), \tag{5}$$

де $\psi \in \mathcal{H}(G_2)$, причому $\psi(G_2) \subseteq G_1$, а $\chi(z)$ – аналітичне продовження функції $\frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)}$ на область G_2.

Доведення. Якщо $\varphi_1(z) \neq 0$ при $z \in G_2$, то правильність твердження теореми випливає з леми 1. Нехай тепер $P = \{z \in G_2 : \varphi_1(z) = 0\}$, причому $P \neq \varnothing$ і ненульовий лінійний оператор $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ задовольняє співвідношення (4). Через A_1 позначимо оператор, який діє за правилом $(A_1 f)(z) = \varphi_1(z)(Af)(z)$. Тоді A_1 – ненульовий лінійний оператор, що діє з простору $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$, для якого виконується рівність $\varphi(z)(A_1(fg))(z) = (A_1 f)(z)(A_1 g)(z)$ при $f, g \in \mathcal{H}(G_1)$ та $z \in G_2$. За лемою 1 існує аналітична в G_2 функція ψ, для якої $\psi(G_2) \subseteq G_1$ і $(A_1 f)(z) = \varphi(z)f(\psi(z))$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G_1)$ при $z \in G_2$. Таким чином, $\varphi_1(z)(Af)(z) = \varphi(z)f(\psi(z))$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G_1)$ при $z \in G_2$. При $f = e_0$ звідси отримуємо, що $\varphi_1(z)\chi(z) = \varphi(z)$, де $\chi = Ae_0$. З цієї рівності одержуємо, що кожна точка з множини P є нулем функції $\varphi(z)$, причому кратність будь-якого нуля для $\varphi_1(z)$ в G_2 є не більшою, ніж кратність цього нуля для $\varphi(z)$.

Оскільки $\frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)} = \chi(z)$ при $z \in G_2 \setminus P$, то функція $\frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)}$ аналітично продовжується на G_2. Отже, оператор A зображається формулою (5). Навпаки, при виконанні умов теореми, формулою (5) визначається ненульовий лінійний оператор $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$, який задовольняє рівність (4). Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що в роботах [6], [7] досліджувалися розв'язки різних модифікацій операторного рівняння Рубела, що містять оператори множення на аналітичні функції.

Нехай далі n – довільне фіксоване натуральне число, $n \geq 2$, а G_1 і G_2 – довільні області в $\mathbb{C}$. Опишемо усі лінійні оператори A, B_i, $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$, які діють з простору $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$ і для довільних $f_i \in \mathcal{H}(G_1)$, $i = \overline{1,n}$, задовольняють співвідношення

$$A(f_1 f_2 \dots f_n) = B_1(f_1)B_2(f_2)\dots B_n(f_n). \tag{6}$$

В множині лінійних операторів, що діють з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$ і один з операторів A, B_j, $j = \overline{1,n}$, є нульовим, усі розв'язки рівняння (6) описуються формулою $A = B_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, B_j, $j = \overline{1,n}$, $j \neq k$, – довільні лінійні оператори, що діють з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$. Залишається описати всі ненульові розв'язки рівняння (6).

Теорема 2. *Нехай G_1, G_2 – довільні області комплексної площини і n – фіксоване натуральне число, $n \geq 2$. Для того, щоб ненульові лінійні оператори $A, B_j : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$, $j = \overline{1,n}$, задовольняли рівність (6) для довільних функцій $f_j \in \mathcal{H}(G_1)$, $j = \overline{1,n}$, необхідно і достатньо, щоб ці оператори зображалися формулами*

$$A(f) = b_1 b_2 \dots b_n (f \circ \psi),$$

$$B_j(f) = b_j (f \circ \psi), \ j = \overline{1,n}, \tag{7}$$

де ψ, $b_j, j = \overline{1,n}$, – деякі функції з простору $\mathcal{H}(G_2)$, причому $\psi(G_2) \subseteq G_1$, а функції b_j, $j = \overline{1,n}$ є ненульовими.

Доведення. Необхідність. Нехай ненульові лінійні оператори $A, B_1, B_2, \dots, B_n : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ задовольняють рівність (6). Зафіксуємо довільне j, $j = \overline{1,n}$. Покладаючи в (6) $f_1 = \dots = f_{j-1} = f_{j+1} = \dots = f_n = 1$, одержимо, що

$$A(f_j) = a_j B_j(f_j), \tag{8}$$

де $a_j = B_1(1) \dots B_{j-1}(1) B_{j+1}(1) \dots B_n(1)$, $j = \overline{1,n}$. З (8) випливає, що

$$A(f_1)A(f_2)\dots A(f_n) = a B_1(f_1) B_2(f_2) \dots B_n(f_n),$$

де $a = a_1 a_2 \dots a_n$. Звідси, використовуючи (6), одержимо, що

$$A(f_1)A(f_2)\dots A(f_n) = aA\left(f_1 f_2 \dots f_n\right), \tag{9}$$

$f_j \in \mathcal{H}(G_1)$, $j = \overline{1,n}$. Покладаючи в (9) $f_3 = \dots = f_n = 1$, одержимо

$$\tilde{a} A(f_1) A(f_2) = a A(f_1 f_2), \tag{10}$$

де $\tilde{a} = (A1)^{n-2}$. Оскільки $A \neq 0$ і задовольняє рівність (10), то за теоремою 1 одержуємо, що кожен нуль функції a з області G_2 є також нулем функції $\tilde{a}$, причому кратність цього нуля для функції $\tilde{a}$ більша або рівна його кратності для функції a. За теоремою 1 одержуємо, що

$$Af = \chi(f \circ \psi), \tag{11}$$

де χ – аналітичне продовження функції $\frac{\tilde{a}}{a}$ в область G_2 і $\psi \in \mathcal{H}(G_2)$, причому $\psi(G_2) \subseteq G_1$.

Підставляючи (11) в (8), одержимо, що

$$\chi(f_j \circ \psi) = a_j B_j f_j, \tag{12}$$

$j = \overline{1,n}$. Покладаючи у (12) $f_j = 1$, одержимо, що $\chi = a_j B_j(1)$. Звідси випливає, що всі особливі точки функції $\frac{\chi}{a_j}$ є усувними. Нехай b_j є аналітичним продовженням функції $\frac{\chi}{a_j}$ в область G_2, $j = \overline{1,n}$. Тоді з (12) випливає, що

$$B_j f = b_j (f \circ \psi), j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Покладаючи в (6) $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 1$ з урахуванням (11) і (13) одержуємо, що $\chi = b_1 b_2 \dots b_n$. Таким чином, оператори A та B_j, $j = \overline{1,n}$ зображаються формулами (7). Необхідність умов теореми 2 доведено, а їх достатність є очевидною.

Список літератури

[1] Nandakumar N.R. *Ring homomorphisms on $H(G)$*. Int. J. Math. Math. Sci. 1990, **13** (2), 393-396. doi:10.1155/S016117129000059X

[2] Nandakumar N.R. *Ring homomorphisms on algebras of analytic functions*. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect A. 1990, **44**, 37-43.

[3] Garnett J.B. Bounded analytic functions, Graduate texts in mathematics 236. Springer-Verlag, New York, 2007. doi:10.1007/0-387-49763-3

[4] Linchuk Yu.S. *On a generalization of Rubel's equation*. Int. J. Math. Anal. 2015, **9** (5), 231-236. doi:10.12988/ijma.2015.412405

[5] Linchuk Yu.S., Linchuk S.S. *On generalized Rubel's equation*. Aeq. Math. 2017, **91** (3), 537-545. doi:10.1007/s00010-017-0467-x

[6] Linchuk Yu.S. *On a generalized Rubel's operator equation*. Miskolc. Math. Notes. 2017, **17** (2), 925–930. doi:10.18514/MMN.2017.1526

[7] Linchuk Yu.S. *On Rubel type operator equations on the space of analytic functions*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2). 2017, **66** (3), 383–389. doi:10.1007/s12215-016-0263-9

Надійшло 01.01.2019

Linchuk Yu.S. *On some generalizations of multiplicative operators on the space* $\mathcal{H}(G)$, Bukovinian Math. Journal. **7**, 1 (2019), 56–61.

Let G be an arbitrary domain of the complex plane. Denote by $\mathcal{H}(G)$ the space of all analytic functions in G. Let G_1, G_2 be arbitrary domains of the complex plane. A linear operator $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ is called multiplicative operator if $A(fg) = A(f)A(g)$ for any $f, g \in \mathcal{H}(G_1)$. In this paper we study solutions of operator equations which are modifications of the multiplicative equation and contain operators of multiplication by analytic functions. We investigate conditions for the existence of nonzero linear operators $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ such that $\varphi(z)(A(fg))(z) = \varphi_1(z)(Af)(z)(Ag)(z)$, where $f, g \in \mathcal{H}(G_1)$, $z \in G_2$, φ, φ_1 are arbitrary fixed functions of $\mathcal{H}(G_2)$ that is not identically equal to zero in G_2. In case that there exist nontrivial solutions we describe all solutions the above equation in the class of of linear operators $A : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$. We describe all ordered sets of linear operators which act from one space of analytic functions in an arbitrary domain of the complex plane into other analogous space and satisfy generalized multiplicative operator relation for an arbitrary finite natural number of multipliers. We obtain the description of all linear operators $A, B_j : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ such that $A\left(\prod_{j=1}^{n} f_j\right) = \prod_{j=1}^{n} B_j(f_j)$ for all $f_j \in \mathcal{H}(G_1)$, $j = \overline{1,n}$. To solve the above mentioned operator equations we use the method of reduction these equations to the respective equations in the class of linear functionals on the space $\mathcal{H}(G_1)$ and extension theorems for analytic functions.