Маслюченко В.К., Мельник В.С.

ПРО ПРОМІЖНІ МНОГОЗНАЧНІ ФУНКЦІЇ

Для топологічних просторів X та Y ми розглядаємо умови, при яких для довільних многозначних відображень $G : X \to Y$ та $H : X \to Y$, таких, що $G(x) \subseteq H(x)$, для кожного $x \in X$ та G і H є відповідно напівнеперервними зверху та знизу, існує $F : X \to Y$ неперервна, така, що $G(x) \subseteq F(x) \subseteq H(x)$. Ми також розглядаємо умови на топологічні простори, за яких виконується аналог теореми Гана для многозначних функцій.

Ключові слова і фрази: теорема Гана, многозначні відображення, нормальні простори.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *vmaslyuchenko@ukr.net, windchange7@gmail.com*

Вступ

Припустимо що X — множина, Y — частково впорядкована множина, $g : X \to Y$ та $h : X \to Y$ — відображення, такі, що $g(x) \leq h(x)$ для кожного $x \in X$. Відображення $f : X \to Y$ називається проміжним / строго проміжним / для пари (g, h) якщо $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X /$g(x) < f(x) < h(x)$, якщо $g(x) < h(x)$/. Якщо X є топологічним простором, $Y = \mathbb{R}$, то ми кажемо, що відображення $g : X \to \mathbb{R}$ та $h : X \to \mathbb{R}$ утворюють пару Гана / строгу пару Гана/, якщо g — напівнеперервна зверху, h — напівнеперервна знизу і $g(x) \leq h(x)$ /g(x)<h(x)/ на X. Г. Ган [5] довів, що кожна пара Гана (g, h) на метричному просторі X має неперервну проміжну функцію $f : X \to \mathbb{R}$. Ж. Дєдонне [2] довів це для паракомпактного простору X, Г. Тонг [10, 11] і М. Катетов [6, 7] довели теорему Гана для нормальних просторів, при тому, з існування проміжної неперервної функції f для кожної пари Гана на T_1-просторі X випливає нормальність простору X.

Ці результати були розвинуті в роботах К. Даукера [3] та Е. Майкла [8]. В першій роботі разом з М. Катетовим [6] було встановлено, що в класі T_1-просторів X існування строго проміжних неперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ для кожної строгої пари Гана (g, h) є еквівалентним до нормальності та паракомпактності простору X, в другій роботі було встановлено, що в класі T_1-просторів X існування строго проміжної неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ для кожної пари Гана (g, h) є еквівалентним до досконалої нормальності X. Новий метод доведення цих результатів був презентований К. Ґудом та Й. Старсом

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 46T99.

[4]. К. Ямазакі [12], розвиваючи свої попередні дослідження [13] та результати Ж.М. Борвейна, М. Трери [1], довів теореми про проміжне відображення $f : X \to \mathbb{R}$ для аналогів пар Гана (g, h) зі значеннями в Банахових ґратках.

Недавно появилися нові версії теореми Гана. В статті [14] було доведено що для кожної пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$, де g та h — зростаючі функції, існує проміжна зростаюча функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Потім в [15] для строгих пар Гана (g, h) на відрізку X в $\mathbb{R}$ було побудовано кусково лінійні та нескінченно диференційовні функції $f : X \to \mathbb{R}$, такі, що задовільняють додаткові умови. Ці результати були узагальнені в [16, 17] для диференційовних за Фреше відображень використовуючи розбиття одиниці.

1 Многозначні відображення та постановка задачі

Добре відомо, що поняття напівнеперервності зверху та знизу можна застосувати до многозначних відображень $F : X \to Y$, що ставлять у відповідність непорожні підмножини Y до кожної точки $x \in X$, т.б., є відображеннями $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ зі значеннями в множині $\mathcal{P}(Y) = 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ всіх непорожніх множин простору Y. Нагадаємо, що многозначне відображення $F : X \to Y$ з топологічного простору X в топологічний простір Y є напівнеперервним зверху /знизу/ в точці $x_0 \in X$, якщо для кожної відкритої множини V в Y, такої, що $F(x_0) \subseteq V$ /$F(x_0) \cap V \neq \emptyset$/ існує такий окіл U точки $x_0 \in X$, що $F(x) \subseteq V$ /$F(x) \cap V \neq \emptyset$/ для кожної точки $x \in U$ (тут ми використовуємо термінологію з [9]). Ми кажемо, що F є неперервною в x_0, якщо вона є напівнеперервною зверху та знизу в цій точці. Відображення $F : X \to Y$ називається неперервним, зверху чи знизу напівнеперервним, якщо воно є таким в кожній точці простору X.

Оскільки множина $\mathcal{P}(Y)$ є наділеною природним відношенням часткового порядку, яким є відношення $\subseteq$ підмножин з Y, це дозволяє перенести концепт пар Гана на випадок многозначних відображень. Ми кажемо, що многозначні відображення утворюють пару Гана /строгу пару Гана/, якщо G є напівнеперервною зверху, H є напівнеперервною знизу і $G(x) \subseteq H(x)$ /$G(x) \subset H(x)$/ для кожного $x \in X$.

Природно постають наступні задачі:

Задача 1. За яких умов на простори X і Y кожна пара Гана (G, H) многозначних відображень $G, H : X \to Y$ має проміжне неперерервне многозначне відображення $F : X \to Y$?

Задача 2. За яких умов на кожна строга пара Гана (G, H) з X в Y має строго проміжне многозначне відображення $F : X \to Y$?

Задача 3. За яких умов на кожна пара Гана (G, H) з X в Y має строго проміжне многозначне відображення $F : X \to Y$?

В цій статті ми досліджуємо ці задачі. Наші результати відносяться до задачі 1. Ми показуємо що для нормального T_1-простору X і кожної пари Гана (G, H) з многозначних відображень $G : X \to Y$ і $H : X \to Y$, зі значеннями які є відрізками, існує проміжне неперервне відображення $F : X \to Y$, що має значеннями відрізки в $\mathbb{R}$. Тоді ми показуємо, що з існування проміжного неперервного відображення $F : X \to Y$ для пари Гана (G, H) відображень $G : X \to \mathbb{R}$, $G(x) = (-\infty, g(x)]$, і $H : X \to \mathbb{R}$, $H(X) = (-\infty, h(x)]$, випливає що (g, h) є парою Гана на X і має проміжну неперервну функцію $f : X \to \mathbb{R}$ на X.

2 Існування неперервних проміжних многозначних відображень.

Нехай X — топологічний простір і $F : X \to \mathbb{R}$ многозначне відображення, зі значеннями які є відрізками $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, де $f_1 : X \to \mathbb{R}$ і $f_2 : X \to \mathbb{R}$ є функціями, для яких $f_1(x) \leq f_2(x)$ на X.

Лема 1. *Відображення $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, є напівнеперервним зверху тоді і тільки тоді, коли функція $f_1 : X \to \mathbb{R}$ є напівнеперервною знизу, і $f_2 : X \to \mathbb{R}$ є напівнеперервною зверху.*

Доведення. Нехай F напівнеперервна зверху в x_0 і $\varepsilon > 0$. Відкрита множина $V = (f_1(x_0) - \varepsilon, f_2(x_0) + \varepsilon)$ містить відрізок $F(x_0)$. З цього випливає існування U околу точки x_0 такої що $F(x) \subseteq V$ при $x \in U$. Оскільки $f_1(x) \in F(x)$ та $f_2(x) \in F(x)$ для кожної x, тоді $\{f_1(x), f_2(x)\} \subseteq V$ для кожної $x \in U$, тоді,

$$f_1(x_0) - \varepsilon < f_1(x) \leq f_2(x) < f_2(x_0) + \varepsilon$$

для кожного $x \in U$, отже f_1 є напівнеперервним знизу, і f_2 є напівнеперервним зверху в x_0.

Нехай f_1 напівнеперервна знизу, f_2 напівнеперервна зверху в x_0 і $\varepsilon > 0$. Тоді існують такі околи U_1 і U_2 точки x_0, що

$$f_1(x) > f_1(x_0) - \varepsilon \text{ на } U_1 \text{ і } f_2(x) < f_2(x_0) + \varepsilon \text{ на } U_2$$

Перетин $U = U_1 \cap U_2$ також є околом точки x_0 і для $x \in U$:

$$f_1(x_0) - \varepsilon < f_1(x) \leq f_2(x) < f_2(x) + \varepsilon.$$

Нехай V довільна підмножина $\mathbb{R}$, що містить $F(x_0) = [f_1(x_0), f_2(x_0)]$. Оскільки $f_i(x_0) \in V$ для $i = 1, 2$ то існують такі $\varepsilon_i > 0$ для $i = 1, 2$ що:

$$(f_i(x_0) - \varepsilon_i, f_i(x_0) + \varepsilon_i) \subseteq V, \text{ де } i = 1, 2.$$

Покладемо $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Очевидно, тоді:

$$V_0 = (f_1(x_0) - \varepsilon, f_2(x_0) + \varepsilon) \subseteq V.$$

З доведеного раніше випливає, що існує окіл U точки x_0 в X, такий, що

$$F(x) \subseteq V_0,$$

як тільки $x \in U$. Тоді також $F(x) \subseteq V$ для кожного $x \in U$, отже, многозначне відображення F є напівнеперервним зверху в x_0. □

Лема 2. *Відображення $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, є напівнеперервним знизу тоді і тільки тоді, коли функція $f_1 : X \to \mathbb{R}$ є напівнеперервною зверху, і $f_2 : X \to \mathbb{R}$ є напівнеперервною знизу.*

Доведення. Нехай F є напівнеперервною знизу в x_0 і $\varepsilon > 0$. Розглянемо відкриту множину $V = (-\infty, f_1(x_0) + \varepsilon)$, для якої, очевидно, $V \cap F(x_0) \neq \emptyset$, з цього випливає існування такого околу U точки x_0 в X, що $V \cap F(x) \neq \emptyset$, як тільки $x \in U$. В якості точки $x \in U$ розглянемо точку $y_1 \in V \cap F(x)$. Тоді $y_1 \in V$, отже, $y_1 < f_1(x_0) + \varepsilon$, і $y_1 \in F(x)$, тоді $y_1 \geq f_1(x)$. Звідси маємо $f_1(x) < f_1(x_0) + \varepsilon$ на U, і f є напівнеперервною зверху в x_0. □

Аналогічно доводиться напівнеперервність знизу функції f_2 в x_0, для цього достатньо розглянути відкриту множину $V = (f_2(x_0) - \varepsilon, +\infty)$.

Навпаки, нехай функція f_1 напівнеперервна зверху, f_2 знизу і V — відкрита множина в $\mathbb{R}$, для якої $V \cap F(x_0) \neq \emptyset$. Розглянемо довільну точку $y \in V \cap F(x_0)$. Тоді $f_1(x_0) \leq y \leq f_2(x_0)$ і $y \in V$. З того що V відкрита випливає що існує $\varepsilon > 0$, таке що $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq V$. Також, з того що f_1 і f_2 напівнеперервні зверху та знизу відповідно в точці x_0 випливає що існує окіл U точки x_0 в X, такий що для $x \in U$:

$$f_1(x) < y + \varepsilon \text{ і } f_2(x) > y - \varepsilon.$$

Тоді для $x \in U$ маємо: $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Справді, для точок $y_1 = f_1(x)$ та $y_2 = f_2(x)$ маємо що $y_1 < y + \varepsilon$ та $y_2 > y - \varepsilon$. Якщо $y_2 < y + \varepsilon$, то $y_2 \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap F(x) \subseteq V \cap F(x)$, і якщо $y_1 > y - \varepsilon$, тоді $y_1 \in V \cap F(x)$. Нехай тепер $y_2 \geq y + \varepsilon$ і $y_1 \leq y - \varepsilon$. Тоді $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq [y_1, y_2] = F(x)$ і звідси маємо $y \in V \cap F(x)$. В любому випадку $F(x) \cap V \neq \emptyset$.

Теорема 1. *Нехай X — нормальний простір і (G, H) — пара Гана така, що $G(x) = [g_1(x), g_2(x)]$ і $H(x) = [h_1(x), h_2(x)]$ для кожного $x \in X$. Тоді існує проміжна для (G, H) неперервна $F : X \to \mathbb{R}$ така що $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ на X, де функції f_1 і f_2 є неперервними.*

Доведення. З умови $G(x) \subseteq H(x)$ на X отримуємо

$$h_1(x) \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq h_2(x)$$

для кожного $x \in X$. З лемм 1 та 2 отримуємо, що (h_1, g_1) і (g_2, h_2) є парами Гана на X. З теореми Гана випливає існування неперервних функцій $f_i : X \to \mathbb{R}$ для $i = 1, 2$ таких, що:

$$h_1(x) \leq f_1(x) \leq g_1(x) \text{ і } h_2(x) \leq f_2(x) \leq g_2(x)$$

для кожного $x \in X$. Оскільки $g_1(x) \leq g_2(x)$, то $f_1(x) \leq f_2(x)$ на X. З лемми 3 випливає, що відображення

$$F : X \to \mathbb{R}, F(x) = [f_1(x), f_2(x)],$$

є неперервним, і $G(x) \subseteq F(x) \subseteq H(x)$ для кожного $x \in X$. □

3 Теорема Гана як наслідок своєї многозначної версії.

Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ — функція, визначена на топологічному просторі X і $F(x) = (-\infty, f(x)]$. Наступні лемми можна довести аналогічно до лемм 1-2:

Лема 3. *Функція f є напівнеперервною зверху тоді і тільки тоді, коли многозначне відображення F є напівнеперервним зверху.*

Лема 4. *Функція f є напівнеперервною знизу тоді і тільки тоді, коли многозначне відображення F є напівнеперервним знизу.*

Лема 5. *Функція f є неперервною тоді і тільки тоді, коли многозначне відображення F є неперервним.*

З лемм 1 та 2 негайно випливає:

Лема 6. *Нехай X — топологічний простір, (g, h) — пара Гана на X, $G(x) = (-\infty, g(x)]$ і $H(x) = (-\infty, g(x)]$. Тоді (G, H) також пара Гана на X.*

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, (g, h) — пара Гана на X, $G(x) = (-\infty, g(x)]$ і $H(x) = (-\infty, g(x)]$, і пара Гана (G, H) має проміжну неперервну функцію $F : X \to \mathbb{R}$. Тоді пара Гана (g, h) також має проміжну неперервну функцію $f : X \to \mathbb{R}$*

Доведення. Маємо, що $G(x) \subseteq F(x) \subseteq H(x)$ на X. Покладемо

$$f(x) = \sup F(x).$$

Оскільки $g(x) \in G(x)$, то $g(x) \in F(x)$, і $g(x) \leq f(x)$. Тут, з умови $F(x) \subseteq H(x)$ випливає, що

$$f(x) = \sup F(x) \leq \sup H(x) = h(x).$$

Звідси маємо, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X.

Нехай $\varepsilon > 0$. Розглянемо відкриту множину $V_1 = (-\infty, f(x_0) + \varepsilon)$. Очевидно, що $F(x_0) \subseteq V_1$. З того, що F є напівнеперервною зверху в x_0 випливає, що існує окіл U_1 точки x_0 в X, такий, що $F(x) \subseteq V_1$ як тільки $x \in U$. В цьому випадку:

$$f(x) = \sup F(x) \leq \sup V_1 = f(x_0) + \varepsilon$$

на U_1, отже, функція f є напівнеперервною зверху в x_0.

Для відкритої множини $V_2 = (f(x_0) - \varepsilon, +\infty)$ маємо, що $V_2 \cap F(x_0) \neq \emptyset$. Справді, оскільки $f(x_0) = \sup F(x_0)$, маємо, що існує $y \in F(x_0)$, така, що $y > f(x_0) - \varepsilon$. Очевидно, що $y \in V_2 \cap F(x_0)$. З того що F є напівнеперервна знизу в x_0 випливає, що існує окіл U_2 точки x_0 такий, що $F(x) \cap V_2 \neq \emptyset$ коли $x \in U_2$. Тоді для кожного $x \in U_2$ існує $y_x \in F(x) \cap V_2$, для якого, очевидно, $f(x_0) - \varepsilon < y_x \leq f(x)$, і тоді:

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

на U_2 і f є напівнеперервною знизу в x_0.

На околі $U = U_1 \cap U_2$ точки x_0 в X наступні нерівності справджуються:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

і з цього випливає неперервність f в точці x_0. □

Список літератури

[1] Borwein J.M., Th?era M.: *Sandwich theorems for semicontinuous operators*, Canad. Math. Bull. 35 (1992) 463–474.

[2] Dieudonne J.: *Une généralisation des espaces compacts*, J. de Math. Pyres et Appl. 23 (1944) 65-76.

[3] Dowker C. H.: *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math. 3 (1951) 219-224.

[4] Good C., Stares I.: *New proofs of classical insertion theorems*, Comm. Math. Univ. Carolinae. 41 ?1 (2000) 139-142

[5] Hahn H.: *Uber halbstetige und unstetige Functionen*, Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien. Math. - naturwiss.Kl.Abt.IIa. 127 (1917) 91-110.

[6] Katetov M.: *On real-valued functions in topological spaces*, Fund.Math. 38 (1952) 85-91.

[7] Katetov M.: *Correction to 'On real-valued functions in topological spaces'*, Fund.Math. 40 (1953) 203-205.

[8] Michael E.: Continuous selections I, Ann. of Math. 63 (1956) 361–382.

[9] Neubrunn T.: Quasi-continuity, Real. Anal. Exch. 14 ?3 (1988-1989) 259-306.

[10] Tong H.: *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces*, Bull.Amer.Math.Soc. 54 (1948) 65.

[11] Tong H.: *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces*, Duke Math.J. 19 (1952) 289-292.

[12] Yamazaki K.: *The range of maps on classical insertion theorems*, Acta Math. Hungar. 132 parts 1-2 (2011) 42-48.

[13] Yamazaki K.: *Insertion theorems for maps to Banach lattices*, Topology Appl. 157 (2010) 1955–1965.

[14] Maslyuchenko V.K., Petey S.P.: *Pointwise limits of monotonous functions and functions of bounded variation*, Bukovinian math. journ. 3 ?2 (2015) 64-71.

[15] Maslyuchenko V.K., Maslyuchenko O.V., Melnyk V.S.: *Existence of piecewise linear and continuously differentiable functions*, Bukovinian math. journ. 4 ? 3-4 (2016) 93-100.

[16] Maslyuchenko V.K., Melnyk V.S.: *On the construction of intermediate differentiable functions, in: Modern problems of probability theory and mathematical analysis: Ukrainian national conference*, Vorochta (2017) 105-106, Ivano-Frankivsk: "Vasyl Stafanyk University"

[17] Maslyuchenko V., Melnyk V.: *Construction of intermediate differentiable functions*, Ukrainian Mathematical Journal (2017)

Надійшло 30.06.2019

Maslyuchenko V.K., Melnyk V.S. *On the intermediate multivalued functions*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 1 (2019), 62–68.

If X is a topological space, $Y = \mathbb{R}$, then we say that maps $g : X \to \mathbb{R}$ and $h : X \to \mathbb{R}$ form a Hahn's pair / strict Hahn's pair/, if g is upper semicontinuous, h — lower semicontinuous and $g(x) \le h(x)$ /g(x)<h(x)/ on X. Austrian mathematician H. Hahn proved, that every Hahn's pair (g, h) on metric space X has continuous intermediate function $f : X \to \mathbb{R}$

For topological spaces X and Y we consider conditions, by which for arbitrary multivalued maps $G : X \to Y$ and $H : X \to Y$, such, that $G(x) \subseteq H(x)$ for each $x \in X$ and G and H

are respectively upper and lower semicontinuous, there is $F : X \to Y$ continuous, such, that $G(x) \subseteq F(x) \subseteq H(x)$. We also consider conditions on topological spaces, by which the Hahn‘s theorem on the intermediate function has a multivalued analog.

The set $\mathcal{P}(Y)$ is equipped with natural partial order, which is the relation of inclusion $\subseteq$ of Y subsets , that allows to transfer the concept of Hahn's pair to the case of multivalued maps. We say that a multivalued maps form the Hahn /Hahn strict/ pair, if G is upper semicontinuous, H is lower semicontinuous and $G(x) \subseteq H(x)$ $/G(x) \subset H(x)/$ for each $x \in X$.

We show that for the normal T_1-space X and any Hahn's pair (G, H) of multivalued maps $G : X \to Y$ and $H : X \to Y$, which values are segments, there is intermediate continuous map $F : X \to Y$, that has segments as values in $\mathbb{R}$. Then we show, that the existence of intermediate continuous map $F : X \to Y$ for Hahn's pair (G, H) of maps $G : X \to \mathbb{R}$, $G(x) = (-\infty, g(x)]$, and $H : X \to \mathbb{R}$, $H(X) = (-\infty, h(x)]$, implies that (g, h) is Hahn's pair on X and has continuous intermediate function $f : X \to \mathbb{R}$ on X.