

ІНТЕГРАЛЬНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

Отримано нову інтегральну ознаку збіжності рядів.

We obtain a new integral test for convergence of series.

У даній статті наведено інтегральну ознаку, що дає змогу досліджувати на збіжність не тільки числові ряди, члени яких можуть мати довільні знаки, але й векторні та операторні ряди, а також послідовності.

1. Інтегральні ознаки збіжності числових рядів. Нехай $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{C}$ – множина всіх комплексних чисел і $[b]$ – ціла частина числа b .

Важливою для теорії рядів є інтегральна ознака Маклорена–Коші, що зводить дослідження збіжності числових рядів із додатними монотонно незростаючими членами до дослідження збіжності невластних інтегралів.

Теорема 1 (Інтегральна ознака Маклорена–Коші [1]). *Нехай: 1) $a_n > 0$, $n \geq 1$; 2) $f : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ – неперервна монотонно незростаюча функція і $f(n) = a_n$, $n \geq 1$.*

Тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ одночасно збігаються або розбігаються.

Для дослідження збіжності числових рядів, члени яких можуть бути довільними, зокрема, комплексними, можна використовувати наступну інтегральну ознаку.

Теорема 2. *Нехай: 1) $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$; 2) $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ – неперервна функція і $f(n) = a_n$, $n \geq 1$; 3) невластний інтеграл*

$$\int_1^{+\infty} (f(t) - f([t])) dt \quad (1)$$

збігається.

Тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ одночасно збігаються або розбігаються.

Зазначимо, що *теорема 1* є окремим випадком *теорема 2*. Справді, нехай $f(t)$ – довільна функція, що задовольняє умови *теорема 1*. Покажемо, що для цієї функції інтеграл (1) є збіжним. Розглянемо функцію

$$S(x) = \int_1^x (f([t]) - f(t)) dx, \quad x \geq 1.$$

Ця функція є монотонно зростаючою й обмеженою зверху, оскільки $f([t]) \geq f(t)$ для всіх $t \geq 1$ і для кожного $x \geq 2$ виконуються співвідношення

$$S(x) = \sum_{k=1}^{[x-1]} \int_k^{k+1} (f([t]) - f(t)) dt + \int_{[x]}^x (f([t]) - f(t)) dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{[x-1]} (a_k - a_{k+1}) + (x - [x])(a_{[x]} - a_{[x]+1}) \leq \leq (a_1 - a_{[x]}) + (a_{[x]} - a_{[x]+1}) \leq a_1.$$

Тому існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ і, отже, інтеграл (1) збігається. За *теоремою 2* числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(t) dt$, що розглядаються в *теоремі 1*, одночасно збігаються або розбігаються.

Отже, теорема 1 випливає з теореми 2.

Зазначимо, що теорема 2 є окремим випадком загального твердження, що розглядатиметься у подальшому.

2. Векторний аналог теореми 2. Нехай E , E_1 і E_2 – банахові простори з нормами $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_{E_1}$ і $\|\cdot\|_{E_2}$ відповідно і $L(E_1, E_2)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів $A: E_1 \rightarrow E_2$ з нормою $\|A\|_{L(E_1, E_2)} = \sup_{\|x\|_{E_1}=1} \|Ax\|_{E_2}$.

Теорема 3. Нехай: 1) $a_n \in E$, $n \geq 1$; 2) $f: [1, +\infty) \rightarrow E$ – неперервне відображення і $f(n) = a_n$, $n \geq 1$; 3) збігається невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} (f(t) - f([t])) dt$.

Тоді векторний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ одночасно збігаються або розбігаються.

Доведення. Завдяки першим двом умовам теореми справджується співвідношення

$$\int_1^b f(t) dt = \sum_{n=1}^{[b]-1} a_n + \int_1^{[b]} (f(t) - f([t])) dt + \int_{[b]}^b f(t) dt, \quad b \geq 2. \quad (2)$$

Якщо інтеграл $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ збігається, то існує границя $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(t) dt$. Тому

$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(t) dt = 0$ і на підставі (2) та третьої умови теореми існує границя $\lim_{b \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{[b]-1} a_n$.

Отже, із збіжності інтеграла $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Навпаки, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Завдяки другій та третій умо-

вам теореми $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{[b]}^b (f(t) - a_{[b]}) dt = 0$ і то-

му $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(t) dt = 0$. Отже, кожний доданок правої частини (2) при $b \rightarrow +\infty$ має границю. Тому збігається інтеграл $\int_1^{+\infty} f(t) dt$.

Отже, із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає збіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} f(t) dt$.

Теорему 3 доведено.

Зауважимо, що в теоремі 3 невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} (f(t) - f([t])) dt$ збігається, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t \in (n, n+1]} \|f(t) - f([t])\|_E \quad (3)$$

або у випадку диференційовного на множині $(1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ відображення f збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\tau \in (n, n+1)} \|f'(\tau)\|_E. \quad (4)$$

Очевидно, що у випадку диференційовного на $(1, +\infty)$ відображення f і монотонної на $(1, +\infty)$ функції $\|f'(t)\|_E$ збіжність ряду (4) рівносильна збіжності невластного інтеграла

$$\int_1^{+\infty} \|f'(t)\|_E dt.$$

Очевидно також, що в багатьох випадках досліджувати на збіжність ряд (3) або ряд (4) легше, ніж досліджувати на збіжність інтеграл (1).

Окремим випадком теореми 3 є наступне твердження.

Теорема 4. Нехай: $A_n \in L(E_1, E_2)$, $n \geq 1$; 2) $F: [1, +\infty) \rightarrow L(E_1, E_2)$ – неперервне відображення і $F(n) = A_n$, $n \geq 1$; 3) збігається невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} (F(t) - F([t])) dt$.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ і невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} F(t) dt$ одночасно збігаються або розбігаються.

3. Множини рядів, до дослідження на збіжність яких застосовна теорема 3. Справджується наступне твердження.

Теорема 5. Для кожного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \in E$, існує неперервне відображення $f: [1, +\infty) \rightarrow E$, для якого $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, і невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} (f(t) - f([t])) dt$ збігається.

Доведення. Використаємо числові послідовності $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$, $(\delta_n)_{n \geq 1}$, для яких

$$0 < \varepsilon_n < 1, \quad n \geq 1,$$

$$\delta_n = \frac{\varepsilon_n}{\max\{1, \|a_n - a_{n+1}\|_E\}}, \quad n \geq 1,$$

і числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \quad (5)$$

збігається. Розглянемо неперервне відображення $f: [1, +\infty) \rightarrow E$, звуження $f|_{[n, n+1)}$ якого на $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, визначається співвідношеннями

$$f|_{[n, n+1)}(t) = a_n \quad (6)$$

для всіх $t \in [n, n+1 - \delta_n]$ і

$$\begin{aligned} f|_{[n, n+1)}(t) &= \\ &= a_n + \frac{t - n - 1 + \delta_n}{\delta_n} (a_{n+1} - a_n) \end{aligned} \quad (7)$$

для всіх $t \in [n+1 - \delta_n, n+1)$.

Очевидно, що $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Завдяки (6), (7) та збіжності ряду (5) невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} (f(t) - f([t])) dt$ збігається.

Теорему 5 доведено.

Із теореми 5 випливає, що кожний ряд можна дослідити на збіжність за допомогою теорем 2, 3 або 4 при відповідному виборі відображень f і F .

Із теорем 3 і 5 випливає наступне твердження.

Теорема 6. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \in E$, збігається тоді і тільки тоді, коли існує неперервне відображення $f: [1, +\infty) \rightarrow E$, для якого $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, і невластні інтеграли $\int_1^{+\infty} (f(t) - f([t])) dt$ і $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ збігаються.

4. Приклад застосування теореми 2. Дослідимо на збіжність знакозмінний ряд

$$\sum_{n=3^3}^{\infty} (\sin \ln \ln n) n^{-1} (\ln n)^{-1} (\ln \ln n)^{-p}, \quad (8)$$

де $p \in \mathbb{R}$. Використаємо функцію

$$f(t) = (\sin \ln \ln t) t^{-1} (\ln t)^{-1} (\ln \ln t)^{-p}.$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\cos \ln \ln t) t^{-2} (\ln t)^{-2} (\ln \ln t)^{-p} - \\ &- (\sin \ln \ln t) t^{-2} (\ln t)^{-1} (\ln \ln t)^{-p} - \\ &- (\sin \ln \ln t) t^{-2} (\ln t)^{-2} (\ln \ln t)^{-p} - \\ &- p (\sin \ln \ln t) t^{-2} (\ln t)^{-2} (\ln \ln t)^{-p-1}. \end{aligned}$$

Тому

$$|f'(t)| \leq (3+|p|) t^{-2} (\ln t)^{-1} (\ln \ln t)^{|p|+1}, \quad t \geq 3^3.$$

Звідси випливає, що збігається ряд

$$\sum_{n=3^3}^{\infty} \sup_{\tau \in (n, n+1)} |f'(\tau)|$$

і, отже, збігається невластний інтеграл

$$\int_{3^3}^{+\infty} (f(t) - f([t])) dt.$$

Таким чином, завдяки теоремі 2 при кожному $p \in \mathbb{R}$ ряд (8) і невластний інтеграл

$$\int_{3^3}^{+\infty} (\sin \ln \ln t) t^{-1} (\ln t)^{-1} (\ln \ln t)^{-p} dt \quad (9)$$

поводять себе однаково в сенсі збіжності.

Досліджувати на збіжність інтеграл (9) легше, ніж ряд (8). Справді, використавши

для (9) заміну змінної $s = \ln \ln t$, отримаємо рівність

$$\int_{3^3}^{+\infty} (\sin \ln \ln t) t^{-1} (\ln t)^{-1} (\ln \ln t)^{-p} dt = \\ = \int_{\ln \ln 3^3}^{+\infty} (\sin s) s^{-p} ds.$$

Очевидно, що при $p > 0$ невластний інтеграл $\int_{\ln \ln 3^3}^{+\infty} (\sin s) s^{-p} ds$ збігається за ознакою Діріхле [1].

При $p \leq 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, очевидно, справджується нерівність

$$\int_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\pi/2} (\sin s) s^{-p} ds > \frac{\pi(2n\pi + \pi/6)^{|p|}}{6}$$

і тому

$$\int_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\pi/2} (\sin s) s^{-p} ds \not\rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Отже, інтеграл $\int_{\ln \ln 3^3}^{+\infty} (\sin s) s^{-p} ds$ при $p \leq 0$ розбігається.

Таким чином, інтеграл (9) збігається лише при $p > 0$. За теоремою 2 числовий ряд (8) також збігається лише при $p > 0$.

5. Приклад застосування теореми 4. Дослідимо на збіжність операторний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \ln n) n^{-A}, \quad (10)$$

де $A \in L(E, E)$.

При дослідженні цього ряду крім теореми 4 також будемо використовувати наступні три твердження.

Нехай $\sigma(A)$ і $\partial\sigma(A)$ – спектр і границя спектра оператора A відповідно.

Теорема 7 [2]. Якщо $\lambda \in \partial\sigma(A)$, то для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує нормований вектор $x \in E$ ($\|x\|_E = 1$), для якого $\|(A - \lambda I)x\|_E < \varepsilon$.

Теорема 8 [2]. Для того, щоб дійсному числу ρ відповідало додатне число N_ρ таке, щоб $\|e^{tA}\|_{L(E,E)} \leq N_\rho e^{\rho t}$, $t \geq 0$, необхідно, щоб $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \rho\}$, і достатньо, щоб $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < \rho\}$.

Теорема 9 (Теорема Данфорда [2]). Якщо функція $\varphi(\lambda)$ зі значеннями в $\mathbb{C}$ кусково-аналітична на $\sigma(A)$, то $\sigma(\varphi(A)) = \varphi(\sigma(A))$.

Спочатку дослідимо ряд (10) у випадку

$$\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}. \quad (11)$$

Використаємо функцію

$$F(t) = (\sin \ln t) t^{-A}.$$

Очевидно, що ця функція задовольняє перші дві умови теореми 4 і

$$F'(t) = (\cos \ln t) t^{-I-A} - (\sin \ln t) A t^{-I-A},$$

де I – одиничний оператор. Також $F(t)$ задовольняє третю умову цієї теореми, оскільки $\sigma(-I - A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -1\}$, $t^{-I-A} = e^{-(\ln t)(I+A)}$ ($t \geq 1$) і за теоремою 8 для деяких чисел $\rho > 1$ і $N \geq 1$ виконується нерівність $\|t^{-I-A}\|_{L(E,E)} \leq N t^{-\rho t}$, $t \geq 1$. Тому у випадку виконання співвідношення (11) ряд (10) і невластний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} (\sin \ln t) t^{-A} dt \quad (12)$$

поводять себе однаково в сенсі збіжності.

Досліджувати на збіжність інтеграл (12) легше, ніж ряд (10), як це видно з подальшого. Справді, здійснивши в (12) заміну змінної $t = e^s$, отримаємо

$$\int_1^{+\infty} (\sin \ln t) t^{-A} dt = \int_0^{+\infty} (\sin s) e^{s(I-A)} ds.$$

За допомогою диференціювання легко перевіряється, що при $x \geq 1$

$$(I + (I - A)^2) \int_0^x (\sin s) e^{s(I-A)} ds = \\ = e^{x(I-A)} ((\sin x)(I - A) - (\cos x)I) + I. \quad (13)$$

Нехай

$$\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}. \quad (14)$$

Оскільки завдяки теоремі 9

$$\sigma(I - A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$$

(у цьому випадку $0 \notin \sigma(I + (I - A)^2)$ і оператор $I + (I - A)^2$ має неперервний обернений), то за теоремою 8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(I-A)} = O$, де O – нульовий оператор. Тому на підставі співвідношення (13)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (I + (I - A)^2) \int_0^x (\sin s) e^{s(I-A)} ds = I.$$

Звідси та з оборотності оператора $I + (I - A)^2$ випливає, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (\sin s) e^{s(I-A)} ds = (I + (I - A)^2)^{-1},$$

тобто збігається інтеграл $\int_0^{+\infty} (\sin s) e^{s(I-A)} ds$, а, отже, й інтеграл (12).

Отже, у випадку виконання співвідношення (14) ряд (10) збігаються (за теоремою 4).

Нехай тепер виконується співвідношення (11) і

$$\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z \leq 1\} \neq \emptyset. \quad (15)$$

Покажемо, що у цьому випадку невластивий інтеграл $\int_0^{+\infty} (\sin s) e^{s(I-A)} ds$ розбігається. Справді, на підставі (13) для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (I + (I - A)^2) \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(I-A)} ds &= \\ &= e^{2n\pi(I-A)} (e^{\pi(I-A)} + I). \end{aligned} \quad (16)$$

Оскільки для кожного числа $\mu \in \partial\sigma(A)$, для якого $0 < \operatorname{Re} \mu \leq 1$, за теоремою 7 існує послідовність $(x_m)_{m \geq 1}$ нормованих векторів, для якої $\lim_{m \rightarrow \infty} \|(\mu I - A)x_m\|_E = 0$, то за теоремою 9 для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|e^{2n\pi(I-A)} (e^{\pi(I-A)} + I) x_m -$$

$$-e^{2n\pi(1-\mu)} (e^{\pi(1-\mu)} + 1) x_m\|_E = 0.$$

Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\|e^{2n\pi(I-A)} (e^{\pi(I-A)} + I)\|_{L(E,E)} = \\ &= \sup_{\|x\|_E=1} \|e^{2n\pi(I-A)} (e^{\pi(I-A)} + I) x\|_E \geq \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \|e^{2n\pi(I-A)} (e^{\pi(I-A)} + I) x_m\|_E = \\ &= |e^{2n\pi(1-\mu)} (e^{\pi(1-\mu)} + 1)|. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(I-A)} ds \right\|_{L(E,E)} \geq \\ &\geq \left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(1-\mu)} ds \right|, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (18)$$

Якщо $\mu \notin \{1+i, 1-i\}$, то, очевидно,

$$e^{2n\pi(1-\mu)} (e^{\pi(1-\mu)} + 1) \not\rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$. Тому завдяки (17)

$$e^{2n\pi(I-A)} (e^{\pi(I-A)} + I) \not\rightarrow O$$

при $n \rightarrow +\infty$ і на підставі (16) та обмеженості оператора $I + (I - A)^2$ також

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(I-A)} ds \not\rightarrow O$$

при $n \rightarrow +\infty$. У випадку $\mu \in \{1+i, 1-i\}$

$$\begin{aligned} &\left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(1-\mu)} ds \right| = \\ &= \left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{\pm is} ds \right| = \\ &= \left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) (\cos s \pm i \sin s) ds \right| = \\ &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s)^2 ds = \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Тому завдяки (18) також

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(I-A)} ds \not\rightarrow O$$

при $n \rightarrow +\infty$ і, отже, у випадку виконання співвідношень (11) і (15) невластний інтеграл $\int_0^{+\infty} (\sin s) e^{s(I-A)} ds$ розбігається.

Таким чином, за теоремою 4 ряд (10) розбігається, якщо виконуються співвідношення (11) і (15).

Далі дослідимо на збіжність ряд (10) у випадку

$$\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\} \neq \emptyset. \quad (19)$$

Покажемо, що загальний член ряду не прямує до O при $n \rightarrow \infty$. Справді, для кожної точки $\mu \in \partial\sigma(A)$, для якої $\operatorname{Re} \mu \leq 0$, за теоремою 7 існує послідовність $(x_m)_{m \geq 1}$ нормованих векторів, для якої

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(\mu I - A)x_m\|_E = 0.$$

Тому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(n^{-A} - n^{-\mu} I)x_m\|_E = 0$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і

$$\begin{aligned} & \|(\sin \ln n) n^{-A}\|_{L(E,E)} = \\ &= \sup_{\|x\|_E=1} \|(\sin \ln n) n^{-A} x\|_E \geq \\ & \geq \sup_{m \geq 1} \|(\sin \ln n) n^{-A} x_m\|_E \geq \\ & \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \|(\sin \ln n) n^{-A} x_m\|_E = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|(\sin \ln n) n^{-\mu} x_m\|_E = \\ &= |(\sin \ln n) n^{-\mu}| \geq |\sin \ln n|, \end{aligned}$$

тобто

$$(\sin \ln n) n^{-A} \not\rightarrow O \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Тому операторний ряд (10) розбігається, якщо виконується співвідношення (19).

Таким чином, ряд (10) збігається лише у випадку $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

Зазначимо, що інші ознаки збіжності рядів можна знайти, наприклад, в [3]–[6].

6. Інтегральна ознака збіжності послідовностей. Розглянемо довільну послідовність

$$(b_n)_{n \geq 1} \quad (20)$$

елементів банахового простору E . Ця послідовність збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n).$$

Тому на підставі теореми 5 для дослідження збіжності послідовності (20) можна використати теорему 3. Завдяки цій теоремі справджується наступне твердження.

Теорема 10. *Нехай: 1) $(b_n)_{n \geq 1}$ – довільна послідовність елементів простору E ; 2) $f : [1, +\infty) \rightarrow E$ – неперервне відображення і $f(n) = b_{n+1} - b_n$, $n \geq 1$; 3) збігається невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} (f(t) - f([t])) dt$.*

Тоді послідовність $(b_n)_{n \geq 1}$ та невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ одночасно збігаються або розбігаються.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Фихтенгольц Г.М. Дифференциальное и интегральное исчисления, Т. 2. – М: Наука, 1966. – 800 с.
2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М: Наука, 1970. – 535 с.
3. Слюсарчук В.Ю. Загальні теореми про збіжність числових рядів. – Рівне: Вид-во РДТУ, 2001. – 240 с.
4. Слюсарчук В.Ю. Операторний аналог ознаки д'Аламбера // Математика сьогодні '09. – Київ: Вид-во „Освіта України“, 2009. – №15. – С. 101–115.
5. Слюсарчук В.Ю. Операторний аналог ознаки Коші // Мат. Студії. – 2010. – **33**, №1. – С. 97–100.
6. Слюсарчук В.Ю. Операторний аналог ознаки Бертрана // Мат. Студії. – 2011. – **35**, №2. – С. 181–195.