Городецький В.В., Мартинюк О.В., Колісник Р.С.

ПРО ОДНУ НЕЛОКАЛЬНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для параболічних за Шиловим рівнянь з від'ємним родом та початковою умовою у просторі узагальнених функцій типу ультрарозподілів. Встановлено властивість локалізації розв'язку зазначеної задачі.

Ключові слова і фрази: нелокальна багатоточкова задача, параболічні за Шиловим рівняння, простір узагальнених функцій, властивість локалізації розв'язку.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *alfaolga1@gmail.com (Мартинюк О.В.)*

Вступ

Важливий клас рівнянь з частинними похідними утворюють рівняння, параболічні за Шиловим [1, с. 130–146]. Рівняння зі сталими коефіцієнтами, параболічні за Петровським, складають певний підклас рівнянь, параболічних за Шиловим (детальніше про це див. [1, с. 131]). Наведемо основні означення та поняття, які стосуються параболічних за Шиловим рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Отже, розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = R\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x), \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Pi_T, \tag{1}$$

де R – поліном змінної $\partial/\partial x$ порядка p над полем комплексних чисел. Рівняння (1) називається параболічним за Шиловим, якщо функція $\Lambda(s) = \mathrm{Re}R(s)$, $s = \sigma + i\tau$, при дійсних значеннях $s = \sigma$ задовольняє нерівність $\Lambda(\sigma) \le -c|\sigma|^h + c_1$, де c, h – деякі додатні сталі. Число h називається показником параболічності рівняння (1). Надалі вважатимемо, що показник параболічності рівняння (1) більший за одиницю.

Важливою характеристикою рівняння (1), пов'язаною з властивостями функції $\exp(tR(s))$, $s = \sigma + i\tau$, є рід μ рівняння (1). Відомо [1, с. 143], що існує область $G_\mu \subset \mathbb{C}$, яка визначається умовою $|\tau| \le K(1 + |\sigma|)^\mu$, $\mu \ge 1 - (p - h)$, в якій справджується нерівність $|\exp(tR(s))| \le c_2 \exp(-a_0 t|\sigma|^h)$ з деякими додатними сталими c_2, a. Число μ

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55, 46T30.

називається родом рівняння (1). Для параболічних за Петровським рівнянь зі сталими коефіцієнтами $\mu = 1$, $p = h = 2b$, $b \in \mathbb{N}$. Для рівнянь, параболічних за Шиловим, це вже не так. Наприклад, рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)^p, \quad p > 3,$$

є параболічним за Шиловим з $h = 2$, $\mu = 1 - (p - h) < 0$, але не є параболічним за Петровським [1, с. 131].

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими абозалежними лише від часової змінної коефіцієнтами часто використовуються простори типу S, введені в [2, с. 199–246]. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \to \infty$ спадають швидше, ніж $\exp(-a|x|)$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. У працях [3, 4, 5, 6] встановлено, що простори типу S та типу S' – топологічно спряжені з ними, є природними множинами початкових даних задачі Коші для рівнянь з частинними похідними, параболічних за Петровським та Шиловим, при яких розв'язки є аналітичними функціями просторової змінної.

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для параболічного за Шиловим рівняння (1) з від'ємним родом μ. Для (1) задається умова

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f, \tag{2}$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < \cdots < t_m \leq T$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Задачу (1), (2) можна розуміти як узагальнення задачі Коші, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою (2). При цьому умова (2) трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція, тобто, як граничне співвідношення $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k \lim\limits_{t\to t_k} \langle u(t,\cdot), \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для довільної функції φ з основного простору (тут $\langle f, \cdot\rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію). Нелокальна багатоточкова задача (1), (2) відноситься до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Тут досліджені властивості фундаментального розв'язку задачі (1), (2), доведено коректну розв'язність такої задачі. Встановлено, що розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (1) володіє властивістю локалізації (властивістю локального покращення збіжності): якщо узагальнена функція f в (2) співпадає на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$ з неперервною функцією g, то на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$ граничне співвідношення $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k \lim\limits_{t\to t_k} u(t,x) = g(x)$ справджується рівномірно або поточково на $\mathbb{K}$. Зазначимо, що для рівнянь, параболічних за Шиловим з від'ємним родом, нелокальна багатотокова за часом задача у вказаній постановці раніше не досліджувалася.

1 Простори типу S та S'

І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов у монографії [2, с. 203–246] ввели простори нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які є підпросторами простору $S \equiv S(\mathbb{R})$ Л. Шварца швидко спадних на нескінченності функцій. Означимо деякі з них.

Для довільно фіксованих $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \Big| \exists c > 0\ A > 0\ B > 0 \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \le c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}.$$

Простір S_α^β можна охарактеризувати ще й так [2, с. 210]: S_α^β складається з тих і лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(m)}(x)| \le c_1 B_1^m m^{m\beta} \exp\{-c_2 |x|^{1/\alpha}\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c_1, B_1, c_2, залежними від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій, які допускають аналітичне продовження в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \le c_3 \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, c_3, a, b > 0, \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β нетривіальні, якщо $\alpha + \beta \ge 1$; для довільних α, $\beta > 0$ правильною є рівність: $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$ [3, с. 143].

Топологічна структура в S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall \overline{A} > A\ \forall \overline{B} > B: \ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \le c \overline{A}^k \overline{B}^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \ x \in \mathbb{R}, \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k \varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}}, \{\delta, \rho\} \subset \Big\{1, \frac{1}{2}, \dots\Big\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Із результатів, наведених в [2, с. 220], випливає, що послідовність$\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset S_\alpha^\beta$ збігається до нуля в цьому просторі, якщо функції φ_ν та їхні похідні довільного порядку збігаються до нуля рівномірно на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і при цьому виконуються нерівності

$$|x^k \varphi_\nu^{(m)}(x)| \le c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \quad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

де сталі c, A, $B > 0$ не залежать від ν.

Функція g називається мультиплікатором у просторі S_α^β, якщо $g\psi \in S_\alpha^\beta$ для довільної функції $\psi \in S_\alpha^\beta$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором з S_α^β в S_α^β. Мультиплікатором у просторі S_α^β є нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція g, яка задовольняє умови

$$\forall\varepsilon>0\ \exists c=c_\varepsilon>0\ \forall m\in\mathbb{Z}_+\ \forall x\in\mathbb{R}:\ \ |g^{(m)}(x)|\le c_\varepsilon\varepsilon^m m^{m\beta}\exp\{\varepsilon|x|^{1/\alpha}\}.$$

У просторах S_α^β визначена і є неперервною операція зсуву аргумента T_x: $\varphi(\xi)\to\varphi(\xi+x)$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [2, с. 171]) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду $(\varphi(x+h)-\varphi(x))h^{-1}\to\varphi'(x)$, $h\to0$, справджуються для кожної функції $\varphi\in S_\alpha^\beta$ в сенсі збіжності за топологією простору S_α^β. У S_α^β визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими [2, с. 215] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні); вони пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула $F[S_\alpha^\beta]=S_\beta^\alpha$ [2, с. 245], де

$$F[S_\alpha^\beta]:=\Big\{\psi:\ \psi(\sigma)=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)e^{i\sigma x}dx,\ \varphi\in S_\alpha^\beta\Big\}.$$

Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Оскільки в основному просторі S_α^β визначена операція зсуву аргумента T_x, то згортку узагальненої функції $f\in(S_\alpha^\beta)'$ з основною функцією φ задамо формулою

$$(f*\varphi)(x)=\langle f_\xi,T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\rangle\equiv\langle f_\xi,\varphi(x-\xi)\rangle,\quad \check{\varphi}(\xi):=\varphi(-\xi).$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргумента в просторі S_α^β випливає, що згортка $f*\varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Нехай $f\in(S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f*\varphi\in S_\alpha^\beta$, $\forall\varphi\in S_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\varphi_\nu\to0$ при $\nu\to+\infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f*\varphi_\nu\to0$ при $\nu\to+\infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається згортувачем у просторі S_α^β.

Оскільки $F^{-1}[S_\beta^\alpha]=S_\alpha^\beta$ (F^{-1} – обернене перетворення Фур'є), а також і $F[S_\beta^\alpha]=S_\alpha^\beta$, бо кожний простір типу S разом з функцією $\varphi(x)$ містить і функцію $\varphi(-x)$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f\in(S_\alpha^\beta)'$ означимо за допомогою співвідношення $\langle F[f],\varphi\rangle=\langle f,F[\varphi]\rangle$, $\varphi\in S_\beta^\alpha$. Звідси випливає, що $F[f]\in(S_\beta^\alpha)'$, якщо $f\in(S_\alpha^\beta)'$. Якщо узагальнена функція $f\in(S_\alpha^\beta)'$ – згортувач у просторі S_α^β, то для довільної функції $\varphi\in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f*\varphi]=F[f]\cdot F[\varphi]$, при цьому $F[f]$ – мультиплікатор у просторі S_β^α.

Наведемо ще основні поняття й означення, які стосуються абстрактних функцій. Нехай X – лінійний топологічний простір або об'єднання таких просторів, Ω – деяка множина чисел. Відображення $\Omega\ni\nu\to\varphi_\nu\in X$ називається абстрактною функцією параметра ν із значеннями в просторі X. За X, зокрема, можна брати простори типу S. Границею абстрактної функції φ_ν при $\nu\to\nu_0$ називається такий елемент $\varphi_{\nu_0}\in X$, що для довільної послідовності $\{\nu_n,n\ge1\}$, $\nu_n\to\nu_0$, $n\to\infty$, виконується граничне співвідношення $\varphi_{\nu_n}\to\varphi_{\nu_0}$, $n\to\infty$, у розумінні збіжності за топологією простору X. Абстрактна функція φ_ν називається диференційовною у точці $\nu_0\in\Omega$, якщо в просторі X існує границя $\dfrac{d\varphi_\nu}{d\nu}\Big|_{\nu\nu_0}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\varphi_{\nu_0+h}-\varphi_{\nu_0}}{h}$. Відзначимо деякі властивості числових функцій вигляду $\langle f,\varphi_\nu\rangle$, де $\{\varphi_\nu,\nu\in\Omega\}\subset X$, а $f\in X'$.

Правильним є таке твердження [2, с. 96]: якщо абстрактна функція φ_ν диференційовна в точці $\nu\in\Omega$, то $\langle f,\varphi_\nu\rangle$ – диференційовна в точці ν функція, причому $\dfrac{d}{d\nu}\langle f,\varphi_\nu\rangle=$

$\Big\langle f, \dfrac{d\varphi_\nu}{d\nu}\Big\rangle$.

2 Нелокальна багатоточкова за часом задача

Для рівняння (1) з показником параболічності $h > 1$ та родом $\mu < 0$ розглянемо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок $u \in C^1((0,T], S_\alpha^\beta)$ рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu_0 u(t,\cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = \varphi, \tag{3}$$

де $\varphi \in S_\alpha^\beta$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T]$ – фіксовані числа, причому $\mu_0 > e^{c_1}\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k$, c_1 – стала з умови параболічності рівняння (1), $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \le T$ (конкретні значення параметрів α, $\beta > 0$ вкажемо пізніше). За допомогою перетворення Фур'є, міркуючи формально, знайдемо, що

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t, x-\xi)\varphi(\xi)d\xi = G(t,x) * \varphi(x), \tag{4}$$

де $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $Q_1(t,\sigma) = \exp\{tR(\sigma)\}$, $Q_2(\sigma) = \Big(\mu_0 - \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k \exp\{t_k R(\sigma)\}\Big)^{-1}$.

Коректність проведення тут відповідних перетворень, збіжність відповідних інтегралів, а, отже, правильність формули (4) випливає з властивостей функції G, які ми наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, передусім дослідимо властивості функції Q як функції аргумента σ.

Проаналізувавши доведення теореми 4 з [2, с. 265] та врахувавши параболічність за Шиловим рівняння (1), безпосередньо переконуємося в тому, що для функції $Q_1(t,\sigma)$ та її похідних (за змінною σ) справджуються оцінки

$$|D_\sigma^k Q_1(t,\sigma)| \le cA^k t^{\mu k/h} k^{k(1-\mu/h)} \exp\{-c_0 t|\sigma|^h\}, k \in \mathbb{Z}_+, (t,\sigma) \in \Pi_T, \tag{5}$$

де сталі c, A, $c_0 > 0$ не залежать від t.

Врахувавши формулу диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$D_\sigma^s Q(t,\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l Q_1(t,\sigma) D_\sigma^{s-l} Q_2(\sigma). \tag{6}$$

Введемо позначення: $\tilde{R}(\sigma) = \mu_0 - \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)$, тоді $Q_2(\sigma) = \tilde{R}^{-1}(\sigma)$. Для оцінки похідних функції $Q_2(\sigma)$ можна скористатися формулою Фаа де Бруно диференціювання складної функції, але в даній конкретній ситуації це можна зробити безпосередньо, враховуючи при цьому (5). Похідна $D_\sigma^m Q_2(\sigma)$ складається з m доданків, які містять вирази $\tilde{R}^{-l}D_\sigma^j R$, $1\le l\le m+1$, $0\le j\le m$, з коефіцієнтами вигляду $(-1)^l l!$. Зазначимо, що

$$\Big|\sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k R(\sigma)\}\Big| \le \sum_{k=1}^m \mu_k |\exp\{t_k R(\sigma)\}| = \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k \mathrm{Re} R(\sigma)\} \le$$

$$\le e^{c_1}\sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-ct_k|\sigma|^h\} \le e^{c_1}\exp\{-ct_1|\sigma|^h\}(\mu_1+\cdots+\mu_m) \le$$

$$\le e^{c_1}(\mu_1+\cdots+\mu_m) < \mu_0, \quad t\in(0,1]$$

(тут враховано, що $t_1<t_2<\cdots<t_m$). Отже,

$$|\tilde{R}| = \Big|\mu_0 - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k R(\sigma)\}\Big| \ge \Big|\mu_0 - \Big|\sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k R(\sigma)\}\Big|\Big| \ge$$

$$\ge \mu_0 - e^{c_1}(\mu_1+\cdots+\mu_m) = \gamma_0 > 0.$$

Звідси дістаємо нерівність $|\tilde{R}^{-l}| \le (1/\gamma_0)^l$. З урахуванням (5) та формули Стірлінга, маємо, що

$$|D_\sigma^m Q_2(\sigma)| \le \beta_0\beta_1^m m! m^{m(1-\mu/h)} \le \beta_2\beta_3^m m^{m(2-\mu/h)}, m\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

з деякими сталими β_2, $\beta_3>0$.

З оцінок (7) та обмеженості функції $|Q_2(\sigma)|$ випливає, що Q_2 є мультиплікатором у просторі $S_{1/h}^{2-\mu/h}$. У свою чергу, з (5)–(7) випливають нерівності

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \le \sum_{l=0}^s C_s^l |D_\sigma^l Q_1(t,\sigma)|\cdot|D_\sigma^{s-l}Q_2(\sigma)| \le$$

$$\le c\beta_2 \sum_{l=0}^s C_s^l A^l t^{\mu l/h} l^{l(1-\mu/h)}\beta_3^s (s-l)^{(s-l)(2-\mu/h)}\exp\{-c_0 t|\sigma|^h\} \le$$

$$\le \tilde{\beta}_0\tilde{\beta}_1^s(\beta(t))^{\mu s/h} s^{s(2-\mu/h)}\exp\{-c_0 t|\sigma|^h\}, \quad s\in\mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

де $\tilde{\beta}_0 = c\beta_0$, $\tilde{\beta}_1 = 2\max\{A,\beta_3\}$, сталі $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\beta}_1$ не залежать від t,

$$\beta(t) = \begin{cases} t^{\mu/h}, & 0<t<1, \\ 1, & t\ge 1. \end{cases}$$

На підставі оцінок (8) робимо висновок, що функція $Q(t,\cdot)$, як функція σ, є елементом простору $S_{1/h}^{2-\mu/h}$ (при кожному $t>0$). Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та співвідношення $F^{-1}[S_{1/h}^{2-\mu/h}] = S_{2-\mu/h}^{1/h}$, отримуємо, що $G(t,\cdot)\in S_{2-\mu/h}^{1/h}$ при кожному $t\in(0,T]$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра $t\in(0,T^*]$ ($T^*=T$, якщо $T\le 1$, $T^*=1$, якщо $T>1$). Для цього скористаємося співвідношенням

$$x^k D_x^s F[\varphi](x) = i^{k+s}F[(\sigma^s\varphi(\sigma))^{(k)}] = i^{k+s}\int_{\mathbb{R}}(\sigma^s\varphi(\sigma))^{(k)}e^{ix\sigma}d\sigma, \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+, \varphi\in S_{1/h}^{2-\mu/h}.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s} (-1)^s \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma.$$

В [2, с. 239] доведено твердження: якщо числа a_k та b_s такі, що

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} \geq c_a k^{1-\chi}, \quad \frac{b_s}{b_{s-1}} \geq c_b s^{1-\lambda}, \quad \chi + \lambda = \theta \leq 1, \tag{9}$$

по подвійна послідовність $m_{ks} = a_k b_s$ задовольняє нерівність

$$ks \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \leq \gamma (k+s)^\theta, \quad \gamma > 0.$$

Для послідовностей $a_k = k^{k(2-\mu/h)}$, $b_s = s^{s/h}$ нерівності (9) виконуються з параметрами $\chi = \max\{1-(2-\mu/h), 0\} = 0$, $\lambda = \max\{1-1/h, 0\} = 1-1/h = \theta < 1$, $h > 1$ (див. [2, с. 243]); отже, $\chi + \lambda = \theta \leq 1$. Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій та оцінки (8), знайдемо, що

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| = \Big| \sum_{p=0}^{k} C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t,-\sigma) \Big| \leq |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1} Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2!} s(s-1) |\sigma^{s-2} Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \dots \leq$$

$$\leq c A^s B^k k^{k(2-\mu/h)} t^{\mu k/h} s^{s/h} t^{-s/h} \exp\Big\{-\frac{c_0}{2} t|\sigma|^h\Big\} \Big(1 + \frac{ks}{(A/t^{1/h})B} \frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{ks}{(A/t^{1/h})^2 B^2} \frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}} \frac{m_{s-2,k-2}}{m_{s-1,k-1}} + \dots \Big) \leq$$

$$\leq c A^s B^k t^{\mu k/h} t^{-s/h} k^{k(2-\mu/h)} \exp\Big\{-\frac{c_0}{2} t|\sigma|^h\Big\} \Big(1 + \frac{\gamma}{(A/t^{1/h})B} (k+s) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{\gamma^2}{(A/t^{1/h})^2 B^2} (k+s)^2 + \dots \Big) \leq c A^s B^k t^{\mu k/h} t^{-s/h} k^{k(2-\mu/h)} s^{s/h} \times$$

$$\times \exp\Big\{\frac{\gamma t^{1/h}}{AB}(k+s)\Big\} \exp\Big\{-\frac{c_0}{2} t|\sigma|^h\Big\} \leq$$

$$\leq c A_1^s B_1^k t^{\mu k/h} t^{-s/h} k^{k(2-\mu/h)} s^{s/h} \exp\{-\bar{c}_0 t|\sigma|^h\},$$

де $A_1 = A \exp\Big\{\dfrac{\gamma T^{1/h}}{AB}\Big\}$, $B_1 = B \exp\Big\{\dfrac{\gamma T^{1/h}}{AB}\Big\}$, $\bar{c}_0 = \dfrac{c_0}{2}$.

Отже,

$$|x^k D_x^s G(t,x)| \leq c_1 A_1^s B_1^k t^{-(s+1)/h} t^{\mu k/h} k^{k(2-\mu/h)} s^{s/h}, \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+, t \in (0,T^*], x \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$|D_x^s G(t,x)| \leq c_1 A_1^s s^{s/h} t^{-(s+1)/h} \inf_k \frac{B_1^k k^{k(2-\mu/h)}}{(t^{-\mu/h}|x|)^k} \leq$$

$$\leq \tilde{c} A_1^s s^{s/h} t^{-(s+1)/h} \exp\{-a_0 (t^{-\mu/h}|x|)^{1/(2-\mu/h)}\}, s \in \mathbb{Z}_+, t \in (0,T^*].$$

Таким чином, правильним є таке твердження.

Лема 1. *Для функції $G(t,x)$, $t\in(0,T^*]$, $x\in\mathbb{R}$, та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \le \tilde{c} A_1^s s^{s/h} t^{-(s+1)/h} \exp\{-a_0(t^{-\mu/h}|x|)^{1/(2-\mu/h)}\}, \mu<0, s\in\mathbb{Z}_+,$$

сталі $\tilde{c}$, $A_1, a_0>0$ не залежать від t.

Лема 2. *Функція $G(t,\cdot)$, $t\in(0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S^{1/h}_{2-\mu/h}$, диференційовна за змінною t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення леми досить показати, що функція $F[G(t,x)] = Q(t,\sigma)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $F[S^{1/h}_{2-\mu/h}] = S^{2-\mu/h}_{1/h}$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\sigma)] \to \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma), \ \ \Delta t\to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:
1) $D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} D_\sigma^s(R(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s\in\mathbb{Z}_+$,
рівномірно на кожному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$;
2) $|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \bar{c}\bar{B}^s s^{s(2-\mu/h)} \exp\{-\bar{a}|\sigma|^h\}$, $s\in\mathbb{Z}_+$,
де сталі $\bar{c}, \bar{a}, \bar{B}>0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma)\in\Pi_T$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому, внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости,

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = R(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma), 0<\theta<1, t+\theta\Delta t\le T.$$

Отже,

$$D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l R(\sigma) D_\sigma^{s-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma) \tag{10}$$

і

$$D_\sigma^s\Big(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l R(\sigma)[D_\sigma^{s-l}Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l}Q(t,\sigma)].$$

Оскільки

$$D_\sigma^{s-l}Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l}Q(t,\sigma) = D_\sigma^{s-l+1}Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t, \ \ 0<\theta_1<1,$$

то звідси та з оцінок (8) випливає, що

$$D_\sigma^{s-l+1}Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0, \ \ \Delta t\to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Тоді

$$D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D_\sigma^s\Big(\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big), \Delta t\to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Враховуючи (10), оцінки (8), які задовольняють похідні функції $Q(t,\sigma)$, нерівність $|Q^l_\sigma R(\sigma)|\leq c(1+|\sigma|^p)$, а також те, що $t+\theta\Delta t\geq t/2$ (для досить малих значень Δt), знайдемо, що

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)|\leq c\tilde{\beta}_0\sum_{l=0}^{s}C^l_s(1+|\sigma|^p)\tilde{\beta}_1^{s-l}(\beta(t+\theta\Delta t))^{\mu(s-l)/h}(s-l)^{(s-l)(2-\mu/h)}\times$$

$$\times\exp\{-c_0(t+\theta\Delta t)|\sigma|^h\}\leq\overline{c}\,\overline{L}^s s^{s(2-\mu/h)}\exp\{-\overline{c}_0|\sigma|^h\},$$

де $\overline{c}=2c\tilde{\beta}_0\max\Big\{1,\Big(\dfrac{2p}{c_0th}\Big)^{p/h}\Big\}$, $\overline{L}=2\tilde{\tilde{\beta}}(\tilde{\beta}(t))^{\mu/h}$, $\tilde{\beta}(t)=\max\{1,\beta(t/2)\}$, $\tilde{\tilde{\beta}}=\max\{1,\tilde{\beta}_1\}$, $\overline{c}_0=c_0t/2$, причому сталі $\overline{c}$, $\overline{L}$, $\overline{c}_0>0$ не залежать від Δt.

Лема доведена. □

Наслідок 1. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\cdot))=f*\frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t},\quad \forall f\in(S^{1/h}_{2-\mu/h})',t\in(0,T].$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$f*G(t,x)=\langle f_\xi,T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle,\ \check{G}(t,\xi)=G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\cdot))=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f*G(t+\Delta t,\cdot))-(f*G(t,\cdot))]=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\langle f_\xi,\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi)-T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle.$$

Внаслідок леми 2 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot)-T_{-x}\check{G}(t,\cdot)]\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}\frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S^{1/\omega}_{2-\mu/h}$, тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,x))=\langle f_\xi,\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi)-T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle=$$

$$=\langle f_\xi,\frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle=\langle f_\xi,T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\xi)\rangle=f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Твердження доведено. □

Лема 3. *У просторі* $(S^{1/h}_{2-\mu/h})'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu_0\lim_{t\to+0}G(t,\cdot)-\sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l}G(t,\cdot)=\delta \tag{11}$$

(δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є та функції $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $S^{1/h}_{2-\mu/h}$, співвідношення (11) замінимо граничним співвідношенням

$$\mu_0 \lim_{t\to+0} F[G(t,\cdot)] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} F[G(t,\cdot)] = F[\delta] \tag{12}$$

у просторі $(S^{2-\mu/h}_{1/h})'$. Врахувавши зображення функції G, (12) подамо у вигляді

$$\mu_0 \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} Q(t,\cdot) = 1. \tag{13}$$

Для доведення (13) візьмемо довільну функцію $\psi \in S^{2-\mu/h}_{1/h}$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\mu_0 \lim_{t\to+0}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \mu_0 \lim_{t\to+0}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big[\mu_0 Q(0,\sigma) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l Q(t_l,\sigma)\Big]\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big[\frac{\mu_0}{\mu_0 - \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \frac{Q_1(t_l,\sigma)}{\mu_0 - \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\Big]\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_0 - \sum\limits_{l=1}^{m}\mu_l Q_1(t_l,\sigma)}{\mu_0 - \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\psi(\sigma)d\sigma = \int_{\mathbb{R}} \psi(\sigma)d\sigma = \langle 1,\psi\rangle$$

(тут $Q(t,\cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(S^{2-\mu/h}_{1/h})'$). Звідси випливає, що співвідношення (13) виконується в просторі $(S^{2-\mu/h}_{1/h})'$, а отже, правильним є співвідношення (11). Лема доведена. □

Символом $(S^{1/h}_{2-\mu/h,*})'$ позначимо клас узагальнених функцій з простору $(S^{1/h}_{2-\mu/h})'$, які є згортувачами в просторі $S^{1/h}_{2-\mu/h}$.

Наслідок 2. *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \quad f \in (S^{1/h}_{2-\mu/h,*})', (t,x) \in \Pi_T.$$

Тоді в просторі $(S^{1/h}_{2-\mu/h})'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu_0 \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = f. \tag{14}$$

Доведення. Оскільки $f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle$, $f \in (S^{1/h}_{2-\mu/h,*})'$, то з властивості неперервності $G(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $S^{1/h}_{2-\mu/h}$, випливає неперервність $\omega(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $S^{1/h}_{2-\mu/h}$. Тоді, врахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є та формулу $F[f * G(t,\cdot)] = F[f]\cdot F[G(t,\cdot)] = F[f]\cdot Q(t,\cdot)$, співвідношення (14) запишемо у вигляді

$$\mu_0 \lim_{t\to+0} F[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F[\omega(t,\cdot)] = F[f]\Big(\mu_0 \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot)\Big)$$

(вказані співвідношення розглядаються в просторі $(S^{2-\mu/h}_{1/h})'$). Врахувавши (13) та останнє співвідношення, прийдемо до (14). Твердження доведено. □

З наслідку 2 випливає, що для рівняння (1) нелокальну m-точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок $u \in C^1((0,T], S^{1/h}_{2-\mu/h})$ рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu_0 \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, f \in (S^{1/h}_{2-\mu/h,*})', \tag{15}$$

де граничне співвідношення (15) розглядається в просторі $(S^{1/h}_{2-\mu/h})'$ (обмеження на параметри $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$, $t_1, \dots, t_m$ такі ж, як у випадку задачі (1), (3)).

Теорема 1. *Задача* (1), (15) *коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою:* $u(t,x) = f * G(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T$.

Доведення. Функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (1). Справді (див. наслідок 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Оскільки f - згортувач у просторі $S^{1/h}_{2-\mu/h}$, то

$$R\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x) = F^{-1}[R(\sigma)F[f*G(t,\cdot)]] = F^{-1}[R(\sigma)F[f]\cdot F[G(t,\cdot)]] = F^{-1}[R(\sigma)F[f]Q(t,\cdot)] =$$

$$= F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\cdot)\cdot F[f]\Big] = F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\Big]\cdot F[f]\Big] =$$

$$= F^{-1}\Big[F\Big[f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}\Big]\Big] = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x)\in\Pi_T$, задовольняє рівняння (1). З наслідку 2 випливає, що u задовольняє умову (15) у вказаному сенсі.

Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $f \in (S^{1/h}_{2-\mu/h,*})'$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (1), (15) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A^* v = 0, (t,x) \in [0,t_0)\times\mathbb{R} \equiv \Omega, 0 \le t < t_0, \tag{16}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0}=\psi,\ \ \psi\in(S^{1/h}_{2-\mu/\omega,*})', \tag{17}$$

де $A^*g=F[R(\sigma)F^{-1}[g]]$, $\forall g\in S^{1/h}_{2-\mu/h}$, $A^*=R^*$ - звуження спряженого оператора до оператора R на простір $S^{1/h}_{2-\mu/h}\subset(S^{1/h}_{2-\mu/h})'$. Умова (17) розуміється в слабкому сенсі. Із результатів, наведених в [1, с. 41–43] випливає, що задача Коші (16), (17) є розв'язною, при цьому $v(t,\cdot)\in S^{1/h}_{2-\mu/h}$ при кожному $t\in[0,t_0)$.

Нехай $Q^t_{t_0}:(S^{1/h}_{2-\mu/h,*})'\to S^{1/h}_{2-\mu/h}$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi\in(S^{1/h}_{2-\mu/h,*})'$ розв'язок задачі (16), (17). Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0\le t<t_0\le T$ і володіє властивостями:

$$\forall\psi\in(S^{1/h}_{2-\mu/h,*})':\frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt}+A^*Q^t_{t_0}\psi=0,$$

$$\lim_{t\to t_0}Q^t_{t_0}\psi=\psi$$

(границя розглядається в просторі $(S^{1/h}_{2-\mu/h})'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x)\in\Pi_T$, задачі (1), (15), який розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(S^{1/h}_{2-\mu/h,*})'\supset S^{1/h}_{2-\mu/h}$. Доведемо, що задача (1), (15) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(S^{1/h}_{2-\mu/h,*})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (1) при нульовій граничній умові може бути лише функціонал $u(t,x)\equiv 0$ (при кожному $t\in(0,T]$). Застосуємо функціонал u до функції $Q^t_{t_0}\psi\in S^{1/h}_{2-\mu/h}$, де ψ – довільно фіксований елемент з простору $S^{1/h}_{2-\mu/h}\subset(S^{1/h}_{2-\mu/h,*})'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (1), (16) знайдемо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot),Q^t_{t_0}\psi\rangle=\Big\langle\frac{\partial u}{\partial t},Q^t_{t_0}\psi\Big\rangle+\Big\langle u,\frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t}\Big\rangle=$$

$$=\langle Ru,Q^t_{t_0}\psi\rangle-\langle u,R^*Q^t_{t_0}\psi\rangle=\langle Ru,Q^t_{t_0}\psi\rangle-\langle Ru,Q^t_{t_0}\psi\rangle=0, t\in[0,t_0).$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\cdot),Q^t_{t_0}\psi\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot),Q^t_{t_0}\psi\rangle=\langle u(t_0,\cdot),\psi\rangle=\mathrm{const}\equiv c$$

у довільній точці $t_0\in(0,T]$. Отже, якщо в (15) $f=0$, то

$$\mu_0\lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle-\sum_{k=1}^m\mu_k\lim_{t\to t_k}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle=c\Big(\mu_0-\sum_{k=1}^m\mu_k\Big)=0,$$

тобто $c=0$. Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot),\psi\rangle=0$ для довільного $\psi\in S^{1/h}_{2-\mu/h}$, тобто $u(t_0,x)$ – нульовий функціонал з простору $(S^{1/h}_{2-\mu/h,*})'$. Оскільки $t_0\in(0,T]$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t,\cdot)=0$ для всіх $t\in(0,T]$. Теорема доведена. □

3. Властивість локалізації. Оскільки узагальнена функція f – згортувач у просторі $S^{1/h}_{2-\mu/h}$, а функція $G(t,\cdot)$ є неперервною абстрактною функцією параметра $t\in(0,T]$ із значеннями в просторі $S^{1/h}_{2-\mu/h}$, то граничні співвідношення

$$u(t,\cdot)=f*G(t,\cdot)\underset{t\to t_k}{\longrightarrow}f*G(t_k,\cdot)=u(t_k,\cdot),t_k\in(0,T],k\in\{1,\dots,m\},$$

справджуються в просторі $S^{1/h}_{2-\mu/h}$. Звідси, зокрема, дістаємо, що $u(t,\cdot)\to u(t_k,\cdot)$ при $t\to t_k$, $k\in\{1,\dots,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Вказану збіжність в (15) погіршує перший доданок, оскільки для функції $G(t,\cdot)$ точка $t=0$ є особливою. Однак, якщо узагальнену функцію f в (15) брати з класу $(S^{\beta}_{2-\mu/h})'\subset(S^{1/h}_{2-\mu/h})'$, де $\beta>1$, то можна отримати локальне покращення збіжності згортки $f*G(t,\cdot)$ при $t\to+0$. Це пояснюється тим, що клас $S^{\beta}_{2-\mu/h}$ при $\beta>1$ містить фінітні функції і в цьому випадку коректним є поняття співпадіння узагальненої функції f з гладкою функцією на відкритій множині $Q\subset\mathbb{R}$, а саме, $f=g$ на Q, якщо для довільної основної функції $\psi\in S^{\beta}_{2-\mu/h}$ такої, що $\operatorname{supp}\psi\subset Q$ маємо $\langle f-g,\psi\rangle=0$. При обґрунтуванні властивості локалізації будемо використовувати наступне допоміжне твердження.

Лема 4. *Якщо $x\neq 0$, то для функції $G(t,x)$, $t\in(0,1)$, та її похідних (за змінною x) справджуються оцінки*

$$|D^m_x G(t,x)|\le c\beta_0^q q^{q(2-\mu/h)}B^m m^{m/h}t^{\gamma(q-m-1)}|x|^{-q}, t\in(0,1), m\in\mathbb{Z}_+, \tag{18}$$

де $\gamma>1/h$ – фіксований параметр, сталі $c,\ \beta_0, B>0$ не залежать від t, $q\in\mathbb{N}$ – довільно фіксоване.

Доведення. Оскільки

$$G(t,x)=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)e^{ix\sigma}d\sigma,$$

то покладемо $\sigma=t^{-\gamma}y$, де $\gamma>0$ – фіксований параметр, конкретне значення якого вкажемо пізніше. Тоді

$$G(t,x)=(2\pi)^{-1}t^{-\gamma}\int_{\mathbb{R}}Q(t,t^{-\gamma}y)e^{it^{-\gamma}xy}dy. \tag{19}$$

За умови $x\neq 0$ зінтегруємо q разів частинами інтеграл (19); у результаті знайдемо, що

$$D^m_x G(t,x)=(-1)^q(2\pi)^{-1}i^{q+m}t^{\gamma(q-1)-\gamma m}x^{-q}\int_{\mathbb{R}}y^m D^q_y Q(t,t^{-\gamma}y)e^{it^{-\gamma}xy}dy, m\in\mathbb{Z}_+.$$

Звідси дістаємо оцінку

$$|D^m_x G(t,x)|\le(2\pi)^{-1}t^{\gamma(q-m-1)}|x|^{-q}\int_{\mathbb{R}}|y|^m|D^q_y Q(t,t^{-\gamma}y)|dy.$$

Із властивості параболічності (за Шиловим) рівняння (1) випливає, що в області $G_\mu=\{z=y+iw:|w|\le K(1+|y|)^\mu, y\in\mathbb{R}\}$, $\mu<0$, функція $Q_1(t,t^{-\gamma}z)=\exp\{-tR(t^{-\gamma}z)\}$ задовольняє нерівність

$$|Q_1(t,t^{-\gamma}z)|\le\exp\{-Lt|t^{-\gamma}y|^h\}, t\in(0,1), \tag{20}$$

де стала $L>0$ не залежить від t. Справді, функція $\exp\{t^{-\gamma}y\}$ допускає аналітичне продовження в область $\tilde G_\mu=\{z=y+iw:|t^{-\gamma}w|\le K(1+|t^{-\gamma}y|)^\mu, y\in\mathbb{R})\}=\{z=y+iw:$

$|w| \leq K(t^\gamma + |y|)^\mu, y \in \mathbb{R}, \mu < 0\}$. Якщо $t \in (0,1)$, то $t^\gamma + |y| \leq 1 + |y|$, $(t^\gamma + |y|)^\mu \geq (1+|y|)^\mu$, $\mu < 0$, звідси й випливає, що в області G_μ функція $Q_1(t, t^{-\gamma} z)$ задовольняє нерівність (20). Врахувавши (20) та доведення теореми 4 з [2, с. 265], знайдемо, що для функції $Q_1(t, t^{-\gamma} y)$ та її похідних (за змінною y) за умови $\gamma > 1/h$, $t \in (0,1)$, справджуються оцінки:

$$|D_y^q Q_1(t, t^{-\gamma} y)| \leq c B^q q^{q(1-\mu/h)} t^{-(\gamma h - 1)\mu q/h} \exp(-a t^{1-\gamma h} |y|^h) \leq$$

$$\leq c B^q q^{q(1-\mu/h)} \exp\{-a t^{1-\gamma h} |y|^h\}, q \in \mathbb{Z}_+, \tag{21}$$

де сталі c, B, $a > 0$ не залежать від t.

Далі, як і при встановленні оцінок (7), з урахуванням умови $t \in (0,1)$, знаходимо, що

$$|D_y^q Q_2(t^{-\gamma} y)| \leq b L_1^q q^{q(2-\mu/h)}, q \in \mathbb{Z}_+, \tag{22}$$

де сталі b, $L_1 > 0$ не залежать від t. Тоді, скориставшись оцінками (21), (22), прийдемо до нерівності

$$|D_y^q Q(t, t^{-\gamma} y)| = |D_y^q (Q_1(t, t^{-\gamma} y) Q_2(t^{-\gamma} y))| \leq \sum_{k=0}^{q} C_q^k |D_y^k Q_1(t, t^{-\gamma} y)| \cdot |D_y^{q-k} Q_2(t^{-\gamma} y)| \leq$$

$$\leq cb \sum_{k=0}^{q} C_q^k B^k k^{k(1-\mu/h)} L_1^{q-k} (q-k)^{(q-k)(2-\mu/h)} \exp\{-a t^{1-\gamma h} |y|^h\} \leq$$

$$\leq \alpha \beta_0^q q^{q(2-\mu/h)} \exp\{-a t^{1-\gamma h} |y|^h\}, \tag{23}$$

де $\alpha = cb$, $\beta_0 = 2\max\{B, L_1\}$, сталі α, $\beta_0 > 0$ не залежать від t. Врахувавши (23), знайдемо, що

$$|D_x^m G(t,x)| \leq \alpha (2\pi)^{-1} \beta_0^q q^{q(2-\mu/h)} t^{\gamma(q-m-1)} |x|^{-q} \int_{\mathbb{R}} |y|^m \exp\{-a t^{1-\gamma h} |y|^h\} dy.$$

Оскільки $\gamma > 1/h$, $t \in (0,1)$, то

$$\int_{\mathbb{R}} |y|^m \exp\{-a t^{1-\gamma h} |y|^h\} dy = 2 t^{\frac{\gamma h - 1 + m(\gamma h - 1)}{h}} \int_0^\infty v^m \exp\{-a v^h\} dv \leq c_1 B_1^m m^{m/h}.$$

Отже,

$$|D_x^m G(t,x)| \leq c_2 \beta_0^q q^{q(2-\mu/h)} t^{\gamma(q-m-1)} B^m m^{m/h} |x|^{-q}, m \in \mathbb{Z}_+, t \in (0,1], x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

сталі c_2, β_0, $B > 0$ не залежать від t. Лема доведена. □

Теорема 2. *Нехай $f \in (S^{\beta}_{2-\mu/h})'$, де $\beta \geq 3 - \mu/h$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі* (1), (15) *з функцією f в умові* (15). *Якщо $f = 0$ на інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$, то $u(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на довільному відрізку $[c,d] \subset (a,b)$.*

Доведення. Нехай $[c,d] \subset [a_1,b_1] \subset (a,b)$. Побудуємо функцію $\varphi \in S^{\beta}_{2-\mu/h}$ з носієм в (a,b) таку, що $\varphi = 1$ на $[a_1,b_1]$ (така функція існує, бо при $\beta > 1$ в просторі $S^{\beta}_{2-\mu/h}$ є фінітні функції [2, с. 209]). Оскільки функції $\varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$, $(1-\varphi(\cdot))T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$ при кожному $t > 0$ і $x \in \mathbb{R}$ є елементами простору $S^{\beta}_{2-\mu/h}$, то правильним є співвідношення

$$u(t,x) = \langle f, \varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle + \langle f, \eta(\cdot)T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle, \quad (t,x) \in \Pi_T.$$

де $\eta = 1 - \varphi$. Оскільки узагальнена функція f дорівнює нулеві на (a,b), а $\operatorname{supp}(\varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t,\cdot)) \subset (a,b)$, з останнього співвідношення випливає, що

$$u(t,x) = t^{\gamma}\langle f, t^{-\gamma}\eta(\cdot)T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle,\ (t,x) \in \Pi_T.$$

Для доведення теореми досить встановити, що сім'я функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{-\gamma}\eta(\xi)T_{-x}\check{G}(t,\xi)$ обмежена в просторі $S^{\beta}_{2-\mu/h}$ рівномірно по t (для малих значень t) та $x \in [c,d]$, тобто, що

$$|\xi^k D^m_{\xi}\Phi_{t,x}(\xi)| \le cA^k B^m k^{k(2-\mu/h)} m^{m\beta},\ \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \xi \in \mathbb{R}, \tag{24}$$

де сталі c, A, $B > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом. Оскільки $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [a_1,b_1]$, то оцінку (24) досить встановити для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1,b_1]$.

Функція φ є елементом простору $S^{\beta}_{2-\mu/h}$. Отже,

$$|\xi^k D^m_{\xi}\varphi(\xi)| \le c_1 A_1^k B_1^m k^{k(2-\mu/h)} m^{m\beta},\ \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$|\xi^k D^m_{\xi}\Phi_{t,x}(\xi)| = t^{-\gamma}\Big|\xi^k \sum_{l=0}^{m} C^l_m D^l_{\xi}\eta(\xi) D^{m-l}_{\xi} G(t,x-\xi)\Big| \le \Psi^1_{t,x}(\xi) + \Psi^2_{t,x}(\xi),$$

де

$$\Psi^1_{t,x}(\xi) := t^{-\gamma}\sum_{l=0}^{m} C^l_m |\xi^k D^l_{\xi}\varphi(\xi)| \cdot |D^{m-l}_{\xi} G(t,x-\xi)|,$$

$$\Psi^2_{t,x}(\xi) := t^{-\gamma}|\xi^k D^m_{\xi} G(t,x-\xi)|.$$

Оцінимо $\Psi^1_{t,x}(\xi)$. Для цього скористаємося нерівностями (18); при оцінці функції $|D^{m-l}_{\xi}G(t,x-\xi)|$ в (18) візьмемо $q = m+2-l$. Врахуємо також те, що $|x-\xi| \ge a_0 > 0$, де $a_0 = \min\{|a_1-c|, |b-b_1|\}$. Отже,

$$\Psi^1_{t,x}(\xi) \le cc_1 t^{-\gamma} A_1^k k^{k(2-\mu/h)} \sum_{l=0}^{m} C^l_m B_1^l l^{l\beta} \beta_0^q q^{q(2-\mu/h)} B^{m-l} (m-l)^{(m-l)/h} t^{\gamma(q-(m-l)-1)} |x-\xi|^{-q}.$$

Оскільки

$$t^{\gamma(q-(m-l)-1)} = t^{\gamma}, q = m-l+2, t \in (0,1), 0 \le l \le m,$$

$$q^{q(2-\mu/h)} = (m-l+2)^{(m-l+2)(2-\mu/h)} \le bM^{m-l}(m-l)^{(m-l)(2-\mu/h)},$$

$$\beta_0^q = \beta_0^2 \cdot \beta_0^{m-l}, |x-\xi|^{-q} \le a_0^{-q} = \Big(\frac{1}{a_0}\Big)^{m-l+2},$$

де b, M – додатні сталі, то

$$\Psi^1_{t,x}(\xi) \le \tilde{c}A_1^k k^{k(2-\mu/h)} M_1^m \sum_{l=0}^{m} C_m^l l^{l\beta}(m-l)^{(m-l)/h} \times$$

$$\times (m-l)^{(m-l)(2-\mu/h)} \le \tilde{c}A_1^k \tilde{B}_1^m k^{k(2-\mu/h)} m^{m\beta}, \beta \ge 1 + (2-\mu/h), \qquad (25)$$

де сталі $\tilde{c}$, A_1, $\tilde{B}_1 > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом.

Для оцінки $\Psi^2_{t,x}(\xi)$ скористаємося тим, що виконується умова:

$$\exists L_0 > 0 \ \forall x \in [c,d] \ \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1] : \ \ |\xi|/|x-\xi| \le L_0.$$

Поклавши в (18) $q = m + 2 + k$, знайдемо, що

$$\Psi^2_{t,x}(\xi) \le ct^{-\gamma}|x-\xi|^{-q}\beta_0^q q^{q(2-\mu/h)} B^m m^{m/h} t^{\gamma(q-m-1)}, |x-\xi| \ge a_0 > 0,$$

при цьому

$$t^{-\gamma}t^{\gamma(q-m-1)} = t^{-\gamma}t^{\gamma}t^{\gamma k} \le 1, t \in (0,1), k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$q^{q(2-\mu/h)} = (m+2+k)^{(m+2+k)(2-\mu/h)} \le \overline{c}\overline{A}^k k^{k(2-\mu/h)} m^{m(2-\mu/h)},$$

де $\overline{c}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ – додатні сталі,

$$|\xi|^k|x-\xi|^{-q} = |\xi|^k|x-\xi|^{-(m+2+k)} \le \alpha_0 L_0^k a_1^m,$$

$$\alpha_0 = a_0^{-2}, a_1 = a_0^{-1}, \beta_0^q = \beta_0^{m+2+k} = \beta_0^2\beta_0^m\beta_0^k, \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$\Psi^2_{t,x}(\xi) \le c_2 A_2^k B_2^m k^{k(2-\mu/h)} m^{m/h} m^{m(2-\mu/h)}, \qquad (26)$$

де сталі c_2, A_2, $B_2 > 0$ не залежать від t, x, ξ. З нерівностей (25), (26) випливає нерівність (24). Теорема доведена. □

Наслідок 3. *Нехай $f \in (S^{\beta}_{2-\mu/h})'$, де $\beta \ge 3 - \mu/h$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі* (1), (15) *з функцією f в умові* (15). *Якщо $f = 0$ на інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$, то граничне співвідношення*

$$\mu_0 \lim_{t\to+0} u(t,x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,x) = 0$$

справджується рівномірно відносно x на довільному проміжку $[c,d] \subset (a,b)$.

Символом M_s позначатимемо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $S^{\beta}_{2-\mu/h}$, $\beta \ge 3 - \mu/h$.

Теорема 3 (властивість локалізаїї). *Нехай $f \in (S^{\beta}_{2-\mu/h})'$, де $\beta \ge 3 - \mu/h$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі* (1), (15) *з функцією f в умові* (15). *Якщо узагальнена функція f співпадає на інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$ з функцією $g \in M_s$, то на довільному проміжку $[c,d] \subset (a,b)$ граничне співвідношення*

$$\mu_0 \lim_{t\to+0} u(t,x) - \sum_{k=1}^{m} + \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,x) = g(x)$$

справджується у кожній точці $x \in [c,d]$.

Доведення. Нехай $[c,d] \subset [a_1,b_1] \subset (a,b)$, φ – основна функція, побудована при доведенні теореми 2. Оскільки $\varphi(f-g)=0$ на (a,b), то $\varphi(f-g)=0$ на $[c,d]$, $(1-\varphi)f=0$ на $[a_1,b_1]$, то, згідно з наслідком 3, граничні співвідношення

$$\mu_0 \lim_{t\to+0}\langle\varphi(f-g), T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}\langle\varphi(f-g), T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = 0,$$

$$\mu_0 \lim_{t\to+0}\langle(1-\varphi)f, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}\langle(1-\varphi)f, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = 0,$$

справджуються рівномірно відносно $x \in [c,d]$. Крім того,

$$u(t,x) = \langle f, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = \langle\varphi(f-g), T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle + \langle(1-\varphi)f, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle + \langle\varphi g, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle.$$

Оскільки g – мультиплікатор у $S^{\beta}_{2-\mu/h}$, то $\varphi g \in S^{\beta}_{2-\mu/h}$, причому $\varphi g = g$ на $[c,d]$. Функція

$$\langle\varphi g, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)\varphi(\xi)g(\xi)d\xi$$

є класичним розв'язком нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (1) з початковою функцією φg. Звідси й випливає той факт, що співвідношення

$$\mu_0 \lim_{t\to+0}\langle\varphi g, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}\langle\varphi g, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = (\varphi g)(x),$$

$\varphi g = g$ на $[c,d]$, справджується у кожній точці $x \in [c,s]$.

Теорема доведена. □

Наприклад, якщо $f = \delta \in (S^{\beta}_{2-\mu/h})'$, то, згідно з наслідком 3 та теоремою 3, розв'язок $u(t,x) = \delta * G(t,x) = G(t,x)$ відповідної багатоточкової задачі задовольняє співвідношення

$$\mu_0 \lim_{t\to+0} u(t,x) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,x) = 0$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ або рівномірно на кожному проміжку $[c,d] \subset \mathbb{R}$, який не містить точку 0.

Література

[1] Gelfand I.M., Shylov G.E. Some questions of differential equations theory. Fizmatgiz, Moskva, 1958. (in Russian)

[2] Gelfand I.M., Shylov G.E. The spaces of main and generilized functions. Fizmatgiz, Moskva, 1958. (in Russian)

[3] Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L. The boundary value of solutions of differential-operator equations. Naukova Dumka, Kuiv, 1984. (in Russian)

[4] Gorbachuk M.L., Dudnikov P.I. *On the initial data of the Cauchy problem for parabolic equations for which solutions are infinitely differentiable.* Dokl AN USSR. Ser. A 1981, textbf4, 9–11. (in Ukrainian)

[5] Gorodetskii V.V. The set of initial values of smooth solutions of differential-operator parabolic type equations. Ruta, Chernivtsi, 1998. (in Ukrainian)

[6] Gorodetskii V.V. Evolution equations in counted normalized spaces of infinitely differentiable functions. Ruta, Chernivtsi, 2008. (in Ukrainian)

[7] Nahushev A.M. Equations of Mathematical Biology. Vysshaya shkola, Moskva, 1995. (in Russian)

[8] Belavin I.A., Kapitsa S.P., Kurdyumov S.P. *Mathematical model of global demographic processes taking into account spatial distribution.* Zhurn vych. mat. i mat. fiz 1998. **38** (6), 885–902 (in Russian).

[9] Dezin A.A. General questions of the theory of boundary problems. Nauka, Moskva, 1980. (in Russian)

[10] Makarov A.A. *Existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudodifferential equations.* Differents. uravneniya 1994. **30** (1), 144–150. (in Russian)

[11] Chesalin V.I. *A problem with nonlocal boundary conditions for some abstract hyperbolic equations.* Differents. uravneniya 1979. **15** (11), 2104–2106. (in Russian)

[12] *Il'kiv V.S., Ptashnyk B.I. Some nonlocal two-point problem for systems of partial differential equations.* Sib. mat.zhurn 2005. **46**, (1). 119–129. (in Russian)

[13] Chabrowski J. *On the non-local problems with a functional for parabolic equation.* Funckcialaj Ekvacioj 1984. **27**, 101–123.

Надійшло 25.01.2019

Gorodetskiy V.V., Martynyuk O.V., Kolisnyk R.S. *On a nonlocal problem for parabolic type equations*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 1 (2019), 14–31.

We investigate a nonlocal on time multipoint problem for a non-parabolic Shilov equation with an non-negative genus and with an initial condition in the space of generalized functions of ultra-distributions type.

This problem can be understood as a generalization of the Cauchy problem, when the initial condition $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ is replaced by condition $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, where $t_0 = 0$, $t_i \in (0,T]$, $i = \overline{1,m}$, $0 < t_1 < \cdots < t_m \leq T$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0,m}$, $m \in \mathbb{N}$, are fixed numbers.

This problem refers to non-local boundary value problem for partial differential equations. The property of the fundamental solution of the this nonlocal multipoint on time problem was investigated and the correct solvability of this problem is proved. It has been established that solution of a non-local on time multipoint problem for the Shilov parabolic equation with non-negative genus owns the localization property (the local improvements of convergence property): if the generalized function f of the condition of specified equation on an open set $Q \subset \mathbb{R}$ with a non-major function g, then on any compact $\mathbb{K} \subset Q$ the boundary ratio $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lim_{t\to t_k} u(t,x) = g(x)$ is confirmed evenly or dotted on $\mathbb{K}$.