Шавала О.В.

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПО ЗАДАНИХ ПОСЛІДОВНОСТЯХ

Розглядається питання про побудову розв'язків лінійного диференціального рівняння третього порядку на основі побудови фундаментальної системи розв'язків рівняння другого порядку по заданих послідовностях.

Ключові слова і фрази: лінійні диференціальні рівняння, мероморфні розв'язки, нулі розв'язків, полюси розв'язків, задані нулі, інтерполяція..

Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, Stryiska str., 3, 82100, Ukraine
e-mail: *olena.shvl@gmail.com*

Вступ

У праці [14] доведено, що для будь-якої послідовності $\{\lambda_n\}$ різних комплексних чисел без скінченних точок скупчення існує ціла функція A така, що рівняння

$$f'' + Af = 0 \tag{1}$$

має цілий розв'язок f з нулями лише в точках λ_n. Також автор праці [14] довів, що для двох даних послідовностей $\{\lambda_n\}$ і $\{\mu_n\}$ різних комплексних чисел без скінченних точок скупчення і без спільних точок тобто таких, що $\lambda_n \neq \mu_k$, $n, k \in \mathbb{N}$ існує ціла функція A така, що рівняння (1) має лінійно незалежні розв'язки f_1, f_2 з нулями в точках λ_n і μ_n відповідно. Подібне питання, коли задані посліідовності $\{\lambda_n\}$ і $\{\mu_n\}$ задовольняють умову Бляшке, а функція A є аналітичною в одиничному крузі розглядалось в [5]. У даній праці ми застосовуємо методи праць [14] і [10]. Огляд результатів по даній тематиці можна знайти в [13].

УДК 517.53, 517.925.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34M03, 34M05.

1 Результати

Нехай $M = \{\mu_n\}$ – послідовність комплексних чисел μ_n, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$ і $Q = \{q_n\}$ – послідовність натуральних чисел. Зокрема, розглядатимемо окремий випадок Λ_1 – послідовність різних комплексних чисел λ_n, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$ і M_1 – послідовність різних комплексних чисел μ_n, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$. Наша мета полягає в доведенні

Теорема 1. *Для заданих послідовностей Λ_1, M і Q, таких, що $\lambda_n \neq \mu_k$, $n, k \in \mathbb{N}$ існує мероморфна функція A з полюсами другого порядку в точках μ_n і з точками голоморфності λ_n, така, що рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків $\{f_1; f_2\}$, де f_1 є мероморфною функцією з простими нулями в точках λ_n і полюсами і в точках μ_n кратності q_n, а f_2 є цілою функцією з нулями в точках μ_n кратності $q_n + 1$.*

Зауважимо, що фундаментальну систему розв'язків рівняння (1) ще називають базисом [2, с.95].

Для доведення теореми 1 нам знадобиться

Лема 1 ([3, с.212], [9, с.300-301]). *Для будь-якої послідовності $\{\lambda_n\}$ різних комплексних чисел без скінченних точок скупчення і для будь-якої послідовності $\{a_n\}$ комплексних чисел існує ціла функція J така, що*

$$J(\lambda_n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Огляд результатів по інтерполяції цілими функціями можна знайти в [4, Розділ 4].

Доведення теореми 1. Скористаємось методом з праць [14, с.242-244], [10]. Візьмемо цілу функцію P_1 з простими нулями в точках λ_n, цілу функцію P_2 з нулями в точках μ_n кратності q_n, цілу функцію R з нулями в точках μ_n кратності $q_n + 1$. Функції $f_1 = \frac{P_1}{P_2} e^g = P e^g$, $f_2 = R e^h$ будуть розв'язками рівняння (1), якщо за формулою Абеля [6, с.151] визначник Вронського $W(f_1; f_2) = c$, де $c \neq 0$ – деяка стала. Тому цілі функції g і h виберемо так, щоб

$$f_1 f_2' - f_2 f_1' = c \tag{2}$$

або

$$e^{g+h}(PR' - P'R + (h' - g')PR) = c,$$

$$e^J(PR' - P'R + IPR) = c, \tag{3}$$

де $J = g + h$, $I = h' - g'$. Оскільки функції g і h є цілими, то функції J та I також є цілими. З рівності (3) маємо

$$I = \frac{ce^{-J} - (PR' - P'R)}{PR}.$$

Функція I є цілою тоді і лише тоді, коли кожен нуль цілої функції PR є нулем функції $ce^{-J} - (PR' - P'R)$, тобто

$$\left(ce^{-J} - (PR' - P'R)\right)\Big|_{z=\gamma_n} = 0, \tag{4}$$

де $\{\gamma_n\} = \{\lambda_n\} \cup \{\mu_n\}$ – прості нулі функції PR, $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що

$$(PR' - P'R)|_{z=\gamma_n} \neq 0.$$

Справді

$$(PR' - P'R)|_{z=\lambda_n} = (-P'R)|_{z=\lambda_n} \neq 0.$$

Далі, якщо $P(z) = (z-\mu_n)^{-q_n}\varphi(z)$, $R(z) = (z-\mu_n)^{q_n+1}\psi(z)$, де φ і ψ – цілі функції без нулів і полюсів в точках μ_n, то

$$(PR' - P'R)|_{z=\mu_n} = (2q_n+1)\varphi(\mu_n)\psi(\mu_n) \neq 0.$$

Тоді з (4) випливає

$$J(\lambda_n) = \begin{cases} \log \frac{c}{(-P'R)|_{z=\lambda_n}}, \\ \log \frac{c}{(PR'-P'R)|_{z=\mu_n}}. \end{cases}$$

де $\log v = \log|v| + i\theta$, $\theta = \arg v \in [-\pi;\pi)$ – головне значення логарифма. З леми 1 отримуємо, що така функція J існує. Далі, оскільки $J' = g' + h'$, $I = h' - g'$, тобто

$$g' = \frac{1}{2}(J' - I), \quad h' = \frac{1}{2}(J' + I),$$

то маємо

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(J(z) - \int_{z_0}^{z} \frac{ce^{-J} - (PR' - P'R)}{PR} d\zeta\right) - \frac{J(z_0)}{2} + g(z_0),$$
$$h(z) = \frac{1}{2}\left(J(z) + \int_{z_0}^{z} \frac{ce^{-J} - (PR' - P'R)}{PR} d\zeta\right) - \frac{J(z_0)}{2} + h(z_0).$$

Тоді $f_1 = Pe^g$ і $f_2 = Re^h$ – розв'язки рівняння (1). Відомо [8, с.385], що знаючи два лінійно незалежні розв'язки f_1 і f_2 рівняння (1), функцію A можна обчислити безпосередньо з рівності

$$\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 \\ f' & f_1' & f_2' \\ f'' & f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, враховуючи (2), отримаємо, що

$$A(z) = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} f_1'(z) & f_2'(z) \\ f_1''(z) & f_2''(z) \end{vmatrix}.$$

Тому A є мероморфною функцією з полюсами другого порядку в точках μ_n. Водночас A має точки голоморфності λ_n.

Аналогічними міркуваннями, як теорему 1 можна отримати

Теорема 2. *Для будь-якої послідовності* Λ_1 *існує мероморфна функція* A *з полюсами другого порядку в точках* λ_n *така, що рівняння* (1) *має фундаментальну систему розв'язків* $\{f_1; f_2\}$, *де* $f_1^{1/\omega}$, $f_2^{\frac{1}{1-\omega}}$, $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1/2; 1\}$ *є цілими функціями з простими нулями в точках* λ_n.

Для рівняння

$$f''' + A_1 f' + A_0 f = 0$$

на відміну від формули (2) для рівняння (1) визначник Вронського [7, с.10;16]

$$W(z) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} = c,$$

де $c \neq 0$ – деяка стала. Його розкриття приводить до громістких обчислень. У зв'язку з цим застосуємо перехід від рівняння третього порядку до рівняння другого порядку, якщо відомий один частинний розв'язок першого.

Теорема 3. *Для заданих послідовностей* Λ_1, M *і* Q, $q_k \geq 2$ *таких, що* $\lambda_n \neq \mu_k$, $n, k \in \mathbb{N}$ *існують мероморфні функції* A_1 *з полюсами не вище другого порядку і* A_0 *з полюсами не вище третього порядку такі, що рівняння*

$$f''' - \frac{3f_1'}{f_1} f'' + A_1 f' + A_0 f = 0 \tag{5}$$

має фундаментальну систему мероморфних розв'язків $\{f_1; f_2; f_3\}$, *де* $(f_2/f_1)'$ *є мероморфною функцією з простими нулями в точках* λ_n *і полюсами в точках* μ_n *кратності* q_n, *а* $(f_3/f_1)'$ *є цілою функцією з нулями в точках* μ_n *кратності* $q_n + 1$.

Доведення теореми 3. Зробимо заміну [2, с.96] $f = f_1 \int u dz$. Тоді послідовно отримаємо, що

$$f' = f_1' \int u dz + f_1 u, \quad f'' = f_1'' \int u dz + 2f_1' u + f_1 u',$$

$$f''' = f_1''' \int u dz + 3f_1'' u + 3f_1' u' + f_1 u''.$$

Підставимо у рівняння

$$f''' + A_2 f'' + A_1 f' + A_0 f = 0. \tag{6}$$

Тоді, враховуючи рівність $f_1''' + A_2 f_1'' + A_1 f_1' + A_0 f_1 = 0$, маємо

$$u'' + \left(\frac{3f_1'}{f_1} + A_2\right) u' + \left(\frac{3f_1''}{f_1} + \frac{2A_2 f_1'}{f_1} + A_1\right) u = 0.$$

Нехай $A_2 = -3f_1'/f_1$. Тоді ми одержуємо рівняння вигляду (1), а саме

$$u'' + Au = 0, \tag{7}$$

де $A = 3f_1''/f_1 - 6\left(f_1'/f_1\right)^2 + A_1$. Для рівняння (7) згідно з теоремою 1 одержуємо, що можна побудувати u_1 і u_2, де u_1 є мероморфною функцією з простими нулями в точках λ_n і полюсами в точках μ_n кратності q_n, а u_2 є цілою функцією з нулями в точках μ_n кратності $q_n + 1$. Оскільки $A_2 = -3f_1'/f_1$, $A_1 = -3f_1''/f_1 + 6\left(f_1'/f_1\right)^2 + A$, то рівняння (6) прийме вигляд

$$f''' - \frac{3f_1'}{f_1} f'' + \left(-\frac{3f_1''}{f_1} + 6\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^2 + A\right) f' + A_0 f = 0. \tag{8}$$

Отже маємо рівняння вигляду (5). Оскільки f_1 є розв'язком рівняння (8), то звідси ми знаходимо A_0. Тоді розв'язками рівняння (5) будуть f_1, $f_2 = f_1 \int u_1 dz$ і $f_3 = f_1 \int u_2 dz$ – мероморфні функції. Нескладно отримати, що A_1 має полюси не вище другого порядку, A_0 має полюси не вище третього порядку.

Подібний результат розглядався у праці [12], де використано [11].

Зауваження. Аналогічні результати можна розглядати, коли задані послідовності задовольняють умову Бляшке в одиничному крузі $\{z : |z| < 1\}$ і півплощині $\{z : \mathrm{Re} z > 0\}$.

Автор висловлює щиру вдячність проф. $\boxed{\text{А.А. Кондратюкові}}$ (див.[1]) за увагу до теорем 1-2.

Список літератури

[1] *Andriy Andrijovych Kondratyuk (5.02.1941 – 22.04.2016).* Matematchni Studii 2016, **45** (1), 111–112. (in Ukrainian)

[2] Coddington E.A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. Foreign languages publishing house, Moskow, 1958. (in Russian)

[3] Gel'fond A.O. Calculus of finite differences. State publishing house of physical and mathematical literature, Moscow, 1959. (in Russian)

[4] Gol'dberg A.A., Levin B.Ya., Ostrovskii I.V. *Entire and meromorphic functions.* Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr 1991, **85**, 5–185. (in Russian)

[5] Heittokangas J. *Blaschke-oscillatory equations of the form $f'' + Af = 0$.* J. Math. Anal. Appl. 2006, **318**, 120–133. doi:10.1016/j.jmaa.2005.05.027

[6] Hille E. Ordinary differential equations in the complex domain, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[7] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[8] Matveev N.M. Methods of integrating ordinary differential equations. Vysshaya Shkola, Moscow, 1967. (in Russian)

[9] Saks S., Zygmund A. Analytic functions. Nakladem Polskiego towarzystwa matematycznego, Warszawa-Wroclaw, 1952.

[10] Shavala O.V. *On nonlogarithmic solutions of differential equation of second order.* Bukovinian Mathematical Journal 2017, **5** (1–2), 149–151. (in Ukrainian)

[11] Shavala O.V. On sequences of zeros and poles of fundamental systems of solutions of equation $f''+Af = 0$. International scientific conference "Spectral Problems, nonlinear and complex analysis", Ufa, Russia, 01.10-03.10 2015, 150–151. (in Russian)

[12] Shavala O.V. On some properties of meromorphic solutins of linear differential equation of third order, All-Ukrainian Scientific Conference "Modern problems of theory of probability and mathematical analysis", Ivano-Frankivsk, Ukraine, 24.02-27.02 2016, 147–148. (in Ukrainian)

[13] Shavala O.V. *On the construction of solutions of linear differential equations according to given sequences.* Ukr. Mat. Zh. 2017, **69** (10), 1437–1440. (in Ukrainian)

[14] Sheda V. *On some properties of solutions of the differential equation $y'' = Q(z)y$, where $Q(z) \not\equiv 0$ is an entire function.* Acta F.R.N. Univ. Comen. Mathem. 1959, **4**, 223–253. (in Slovak)

Надійшло 24.06.2019

Shavala O.V. *On some properties of solutions of linear differential equations according to given sequences*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 1 (2019), 121–126.

Information for researches, when the differential equation

$$f'' + Af = 0$$

has the fundamental system of solutions, where absent logarithmic solutions is known a long time. In the classical analysis for decision the equations received local expand in the integer degrees of an independent variable. In more difficult cases received local expand in fractional degrees of an independent variable, on so-called Newton – Poiseux series. A row of mathematicians for integration of linear differential equations applied a method of so-called generalized degree series, where meets irrational, in general real degree of an independent variable.

In this article we consider the question about construction of fundamental system of solutions of the above mentioned equation according to given sequences, where A is meromorphic functions.

Earlier similar results considered by several authors. In particular they studied the zero sequences of the non-trivial solutions of the above mentioned equation, when A is entire function or it is similar, when A is analytic function in unit disc. Except this case, when above marked differential equation possesses one solution with given zero-sequence it is possible for consideration the case, when two linearly independent solutions of this equation possesses given zero-sequences, where A is entire function. Also considered similar problems for differential equations of higher order. Let's note, that representation of function by Weierstrass canonical product is the basic element for researches in the theory of the entire functions.

Further in this article we consider the problem about construction of linearly independent solutions $\{f_1; f_2; f_3\}$ of equation

$$f''' + A_2 f'' + A_1 f' + A_0 f = 0,$$

where f_1 is meromorphic function. Then we consider the question about construction of meromorphic functions $(f_2/f_1)'$ and $(f_3/f_1)'$ on the base of construction of fundamental system of solutions of linear differential equation of the second order according to given sequences.