Слюсарчук В.Ю.

НЕСТІЙКІСТЬ НЕОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ, ПЕРЕСТАВНИМИ З ОПЕРАТОРАМИ ОБЕРТАННЯ

Досліджуються нелінійні системи звичайних диференціальних рівнянь, звичайних диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями, диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом і недиференціальними обмеженнями на розв'язки та різницевих рівнянь, операторні коефіцієнти яких переставні з тривимірними операторами обертання. Завдяки такій вимозі множини розв'язків досліджуваних систем рівнянь інваріантні відносно відображень, породжених тривимірними обертаннями. Ця властивість розв'язків досліджуваних систем рівнянь дає змогу встановити нестійкість їх необмежених розв'язків. Як наслідок, отримано умови обмеженості розв'язків досліджуваних систем рівнянь. При дослідженні систем рівнянь використовуються деякі знайдені властивості обертань тривимірного простору. Також наведено приклад застосування результатів досліджень до небесної механіки зі скінченною швидкістю гравітації.

Ключові слова і фрази: нестійкість, еволюційні рівняння, тривимірні обертання, математична модель Сонячної системи зі скінченною швидкістю гравітації..

National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine
e-mail: *V.E.Slyusarchuk@gmail.com*

Вступ

У статті досліджуються нелінійні системи еволюційних рівнянь, операторні коефіцієнти яких переставні з тривимірними операторами обертання. Завдяки такій вимозі множини розв'язків досліджуваних систем рівнянь інваріантні відносно відображень, породжених тривимірними обертаннями. Ця властивість досліджуваних систем дає змогу встановити нестійкість їх необмежених розв'язків.

Також наводяться застосування результатів досліджень до небесної механіки зі скінченною швидкістю гравітації.

УДК 517.929; 517.958:531–133
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34A37, 34D20, 37C75, 39A11, 83A05, 93D05.

1 Основні позначення й означення

Будемо використовувати множину $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел, множину $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел, множину $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел, множину $\mathbb{R}_+$ всіх невід'ємних чисел і евклідовий простір $\mathbb{R}^3$, елементами якого є вектори $\vec{r} = (x, y, z)$ з координатами $x, y, z \in \mathbb{R}$, зі скалярним добутком $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ векторів $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ та нормою $|\vec{r}| = \sqrt{(\vec{r}, \vec{r})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Позначимо через G_1 множину всіх відображень $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, кожне з яких відображає простір $\mathbb{R}^3$ на весь простір $\mathbb{R}^3$, не змінює величини скалярного добутку, тобто $(A\vec{r}_1, A\vec{r}_2) = (\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ для всіх $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$, і не змінює орієнтацію, тобто є тривимірним обертанням [1].

Зазначимо, що елементи множини G_1 є ортогональними відображеннями [5].

Для довільних відображень $A_1, A_2 \in G_1$ природним чином визначається операція добутку A_1A_2 (це послідовне виконання двох обертань) і A_1A_2 є елементом множини G_1, причому операція добутку асоціативна, тобто $(A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3)$ для всіх відображень $A_1, A_2, A_3 \in G_1$; одиничне відображення I також є елементом множини G_1 і кожне відображення $A \in G_1$ як ортогональне відображення має обернене. Тому множина G_1 є мультиплікативною групою [8]. Ця група не комутативна [4].

Зазначимо, що кожному $A \in G_1$ відповідають кути φ, ψ, θ такі, що A можна подати у вигляді

$$A = A_{\varphi,\theta,\psi} = A_{Z,\varphi}A_{Y,\theta}A_{X,\psi},$$

де $A_{X,\psi}$, $A_{Y,\theta}$ і $A_{Z,\varphi}$ – повороти на кути ψ, θ і φ навколо осей OX, OY і OZ відповідно. Згідно з [4]

$$A_{X,\psi}(x, y, z) = (x, y\cos\psi - z\sin\psi, y\sin\psi + z\cos\psi),$$

$$A_{Y,\theta}(x, y, z) = (x\cos\theta + z\sin\theta, y, -x\sin\theta + z\cos\theta)$$

і

$$A_{Z,\varphi}(x, y, z) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi, z).$$

Зафіксуємо довільне $m \in \mathbb{N}$ і розглянемо евклідовий простір $E^m = \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3}_{m \text{ разів}}$ елементів $\vec{R} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m)$, $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m \in \mathbb{R}^3$, з нормою

$$\left\|\vec{R}\right\|_{E^m} = \sqrt{|\vec{r}_1|^2 + \ldots + |\vec{r}_m|^2}. \tag{1}$$

Визначимо відображення $\mathcal{A}_{m,\varphi,\theta,\psi} : E^m \to E^m$ рівністю

$$\mathcal{A}_{m,\varphi,\theta,\psi}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m) = (A_{\varphi,\theta,\psi}\vec{r}_1, \ldots, A_{\varphi,\theta,\psi}\vec{r}_m).$$

Множина всіх таких відображень з операцією добутку, що визначається рівністю

$$\mathcal{A}_{m,\varphi,\theta,\psi}\mathcal{A}_{m,\tilde{\varphi},\tilde{\theta},\tilde{\psi}}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m) = (A_{\varphi,\theta,\psi}A_{\tilde{\varphi},\tilde{\theta},\tilde{\psi}}\vec{r}_1, \ldots, A_{\varphi,\theta,\psi}A_{\tilde{\varphi},\tilde{\theta},\tilde{\psi}}\vec{r}_m),$$

є мультиплікативною групою (її позначимо через G_m), оскільки G_1 є мультиплікативною групою.

Зафіксуємо довільну непорожню множину $\Omega_m \subset E^m$, для якої

$$\mathcal{A}_{m,\varphi,\theta,\psi}\Omega_m = \Omega_m \tag{2}$$

для всіх $A_{\varphi,\theta,\psi} \in G_1$.

Позначимо через $\mathfrak{P}_{0,\Omega_m}$ і $\mathfrak{P}_{1,\Omega_m}$ множини неперервних відображень $P_0 : \Omega_m \to \mathbb{R}_+$ і $P_1 : \Omega_m \to \mathbb{R}^3$ відповідно, для яких

$$P_0(A\vec{r}_1, \ldots, A\vec{r}_m) = P_0(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m) \;\text{ і }\; P_1(A\vec{r}_1, \ldots, A\vec{r}_m) = AP_1(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m)$$

для всіх $A \in G_1$ і $(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m) \in \Omega_m$.

Аналогічно позначимо через $\mathfrak{F}_{1,k,\Omega_m}$, де $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, множину неперервних відображень $F : \Omega_m^k \to \mathbb{R}^3$, де $\Omega_m^k = \underbrace{\Omega_m \times \ldots \times \Omega_m}_{k \text{ разів}}$, для кожного з яких

$$F\left(\mathcal{A}_{m,\varphi,\theta,\psi}\vec{R}_1, \ldots, \mathcal{A}_{m,\varphi,\theta,\psi}\vec{R}_k\right) = A_{\varphi,\theta,\psi}F\left(\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_k\right)$$

для всіх $A_{\varphi,\theta,\psi} \in G_1$ і $\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_k \in \Omega_m$, де $\vec{R}_i = (\vec{r}_{i,1}, \ldots, \vec{r}_{i,m})$, $\vec{r}_{i,1}, \ldots, \vec{r}_{i,m} \in \mathbb{R}^3$, $i = \overline{1,k}$.

Множини $\mathfrak{P}_{0,\Omega_m}$, $\mathfrak{P}_{1,\Omega_m}$ і $\mathfrak{F}_{1,k,\Omega_m}$ у подальшому гратимуть важливе значення при встановленні умов нестійкості розв'язків систем рівнянь, що будуть досліджуватися.

Крім елементів просторів E^m і $\mathbb{R}^3$ також будемо використовувати векторні функції $\vec{R}(t) = (\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t))$ і $\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t)$ зі значеннями в E^m і $\mathbb{R}^3$ відповідно.

2 Основні досліджувані рівняння

Зафіксуємо довільні число $t_0 \in \mathbb{R}$ і множину $T = \{t_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, для якої $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}_i(t)}{dt} = P_i(\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t)), \\ t \geq t_0, \quad i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{3}$$

та систему звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}_i(t)}{dt} = P_i(\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t)), \\ \vec{r}_i(t_k + 0) - \vec{r}_i(t_k - 0) = I_{i,k}\left(\vec{R}(t_k - 0)\right), \\ t \in [t_0, +\infty) \setminus T, \quad i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{4}$$

де $P_i : \Omega_m \to \mathbb{R}^3$ – неперервне відображення для кожного $i = \overline{1,m}$, і $I_{i,k} : \Omega_m \to \mathbb{R}^3$ – неперервне відображення для всіх $i = \overline{1,m}$, $k \in \mathbb{N}$.

Також розглянемо систему рівнянь із запізнювальним аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = F_i\left(\vec{R}(t - \tau_{1i}(t)), \ldots, \vec{R}(t - \tau_{mi}(t))\right), \\ \tau_{ji}(t) = P_{ji}(\vec{r}_j(t - \tau_{ji}(t)), \vec{r}_i(t)), \\ t \geq t_0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,m}, \; i \neq j, \end{cases} \tag{5}$$

де $\tau_{ii}(t) = 0$ для всіх $i = \overline{1,m}$ і $F_i : \Omega_m^m \to \mathbb{R}^3$, $P_{ji} : \Omega_1^2 \to \mathbb{R}_+$ – неперервні відображення для всіх $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$, $i \neq j$ (тут $\Omega_1 \neq \varnothing$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$ і $A\Omega_1 = \Omega_1$ для всіх $A \in G_1$, тобто виконується співвідношення (2) при $m = 1$), та систему різницевих рівнянь

$$\begin{cases} \vec{r}_i(t) = P_i(\vec{r}_1(t-1), \ldots, \vec{r}_m(t-1)), \\ t \geq t_0, \quad i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{6}$$

де неперервні відображення $P_i : \Omega_m \to \mathbb{R}^3$, $i = \overline{1,m}$, такі самі, як і в системі рівнянь (3).

Зауважимо, що в системі (5) невідомими є не лише векторні функції $\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t)$, як і в системах (3) і (4), а і скалярні функції $\tau_{ji}(t)$, $i \neq j$, що ускладнює дослідження цієї системи. Однак завдяки додатковим вимогам до відображень F_i, $i = \overline{1,m}$, і P_{ji}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$, $i \neq j$, що будуть наведені в подальшому, можна знайти важливі властивості розв'язків цієї системи.

Метою статті є з'ясування умов нестійкості необмежених розв'язків наведених вище рівнянь.

3 Структура множин розв'язків систем (3), (4), (5) і (6), операторні коефіцієнти яких переставні з обертанням

Позначимо через $\mathcal{I}_{t_0}$ проміжок $[t_0, +\infty)$, а через $C(\mathcal{I}_{t_0}, \mathbb{R}^3)$ і $C(\mathcal{I}_{t_0}, E^m)$ – множини неперервних на $\mathcal{I}_{t_0}$ векторних функцій $\vec{x}(t)$ і $\vec{X}(t) = (\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_m(t))$ зі значеннями в $\mathbb{R}^3$ і E^m відповідно, де $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in C(\mathcal{I}_{t_0}, \mathbb{R}^3)$.

Розглянемо пов'язані з $A_{\varphi,\theta,\psi}$ і $A_{m,\varphi,\theta,\psi}$ відображення $\tilde{A}_{\varphi,\theta,\psi}$ і $\tilde{A}_{m,\varphi,\theta,\psi}$, що діють в $C(\mathcal{I}_{t_0}, \mathbb{R}^3)$ і $C(\mathcal{I}_{t_0}, E^m)$ відповідно і визначаються співвідношеннями

$$\left(\tilde{A}_{\varphi,\theta,\psi}\vec{x}\right)(t) = A_{\varphi,\theta,\psi}\vec{x}(t), \quad t \geq t_0,$$

і

$$\left(\tilde{A}_{m,\varphi,\theta,\psi}\vec{X}\right)(t) = (A_{\varphi,\theta,\psi}\vec{x}_1(t), \ldots, A_{\varphi,\theta,\psi}\vec{x}_m(t)), \quad t \geq t_0.$$

Множини таких відображень є мультиплікативними групами, які позначимо через $\tilde{G}_1$ і $\tilde{G}_m$ відповідно. Ці групи, очевидно, ізоморфні групам G_1 і G_m відповідно [8].

Позначимо через $\mathcal{E}_{(3)}$, $\mathcal{E}_{(4)}$, $\mathcal{E}_{(5)}$ і $\mathcal{E}_{(6)}$ множини розв'язків систем (3), (4), (5) і (6) відповідно. Наведемо умови, при виконанні яких для цих множин виконуються співвідношення, аналогічні (2), що будуть мати важливе значення в п. 5.

Справджуються наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай*

$$P_i \in \mathfrak{P}_{1,\Omega_m}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Тоді для всіх $\mathcal{A} \in G_m$

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_{(3)} = \mathcal{E}_{(3)}. \tag{8}$$

Теорема 2. *Нехай виконується співвідношення* (7) *і*

$$I_{i,k} \in \mathfrak{P}_{1,\Omega_m}, \quad i = \overline{1,m}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Тоді для всіх $\mathcal{A} \in G_m$

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_{(4)} = \mathcal{E}_{(4)}. \tag{10}$$

Теорема 3. *Нехай*

$$F_i \in \mathfrak{F}_{1,k,\Omega_m}, \quad i = \overline{1,m}$$

і

$$P_{ji} \in \mathfrak{P}_{0,\Omega_2}, \quad i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,m}, \ i \neq j.$$

Тоді для всіх $\mathcal{A} \in G_m$

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_{(5)} = \mathcal{E}_{(5)} \tag{11}$$

Теорема 4. *Нехай виконується співвідношення* (7).

Тоді для всіх $\mathcal{A} \in G_m$

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_{(6)} = \mathcal{E}_{(6)} \tag{12}$$

Ці твердження ми використаємо при дослідженні нестійкості розв'язків рівнянь (3), (4), (5) і (6).

Зазначимо, що множини $\mathcal{E}_{(3)}$ і $\mathcal{E}_{(4)}$ є не порожніми завдяки теоремі Пеано [10]. При виконанні додаткових умов щодо гладкості відображень $F_i \in \mathfrak{F}_{1,m,\Omega_m}$, $i = \overline{1,m}$, і $P_{ji} \in \mathfrak{P}_{0,\Omega_2}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$, $i \neq j$, за допомогою модернізації методів, що використовуються у теорії диференціально-функціональних рівнянь [2, 9, 11, 16, 17], можна показати, що також $\mathcal{E}_{(5)} \neq \varnothing$. Аналогічне співвідношення справджується і для множини $\mathcal{E}_{(6)}$, що встановлюється за допомогою методу кроків [11].

Доведення теореми 1. Нехай функція $\vec{X}(t) = (\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_m(t))$ є довільним елементом множини $\mathcal{E}_{(3)}$. Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}_i(t)}{dt} \equiv P_i(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_m(t)), \\ i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{13}$$

Оскільки на підставі (7) і (13) для кожних $A \in G_1$ і $i = \overline{1,m}$

$$\frac{dA\vec{x}_i(t)}{dt} \equiv A\frac{d\vec{x}_i(t)}{dt} \equiv AP_i(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_m(t)) \equiv P_i(A\vec{x}_1(t), \ldots, A\vec{x}_m(t)),$$

то функція $\left(\mathcal{A}\vec{X}\right)(t) = (A\vec{x}_1(t), \ldots, A\vec{x}_m(t))$ також є елементом множини $\mathcal{E}_{(3)}$. Тому з довільності вибору $\vec{X} \in \mathcal{E}_{(3)}$ і $A \in G_1$ випливає (8). □

Доведення теореми 2. Нехай функція $\vec{Y}(t) = (\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_m(t))$ є довільним елементом множини $\mathcal{E}_{(4)}$. Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}_i(t)}{dt} \equiv P_i(\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_m(t)), \\ \vec{y}_i(t_k+0) - \vec{y}_i(t_k-0) = I_{i,k}\left(\vec{Y}(t_k-0)\right), \\ i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{14}$$

Оскільки на підставі (7) і (14) для кожних $A \in G_1$ і $i = \overline{1,m}$

$$\frac{dA\vec{y}_i(t)}{dt} \equiv A\frac{d\vec{y}_i(t)}{dt} \equiv AP_i(\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_m(t)) \equiv P_i(A\vec{y}_1(t), \ldots, A\vec{y}_m(t)),$$

а на підставі (9) і (14) для кожних $A \in G_1$, $i = \overline{1,m}$ і $k \in \mathbb{N}$

$$A\vec{y}_i(t_k+0) - A\vec{y}_i(t_k-0) = AI_{i,k}\left(\vec{Y}(t_k-0)\right) = I_{i,k}\left(A\vec{Y}(t_k-0)\right),$$

то функція $\left(\mathcal{A}\vec{Y}\right)(t) = (A\vec{y}_1(t), \ldots, A\vec{y}_m(t))$ також є елементом множини $\mathcal{E}_{(4)}$. Тому з довільності вибору $\vec{Y} \in \mathcal{E}_{(4)}$ і $A \in G_1$ випливає (10). □

Доведення теореми 3. Нехай функція $\vec{Z}(t) = (\vec{z}_1(t), \ldots, \vec{z}_m(t))$ є довільним елементом множини $\mathcal{E}_{(5)}$. Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{z}_i(t)}{dt^2} \equiv F_i\left(\vec{Z}(t-\tau_{1i}(t)), \ldots, \vec{Z}(t-\tau_{mi}(t))\right), \\ \tau_{ji}(t) \equiv P_{ji}(\vec{z}_j(t-\tau_{ji}(t)), \vec{z}_i(t)), \\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m},\ i \neq j, \end{cases} \tag{15}$$

З умов теореми та (15) випливає, що

$$\frac{d^2A\vec{z}_i(t)}{dt^2} \equiv A\frac{d^2\vec{z}_i(t)}{dt^2} \equiv AF_i\left(\vec{Z}(t-\tau_{1i}(t)), \ldots, \vec{Z}(t-\tau_{mi}(t))\right) \equiv$$

$$\equiv F_i\left(\left(\mathcal{A}\vec{Z}\right)(t-\tau_{1i}(t)), \ldots \left(\mathcal{A}\vec{Z}\right)(t-\tau_{mi}(t))\right)$$

і

$$\tau_{ji}(t) \equiv P_{ji}(\vec{z}_j(t-\tau_{ji}(t)), \vec{z}_i(t)) \equiv P_{ji}(A\vec{z}_j(t-\tau_{ji}(t)), A\vec{z}_i(t))$$

для всіх $A \in G_1$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$, $i \neq j$.

Отже, функція $\left(\mathcal{A}\vec{Z}\right)(t) = (\vec{z}_1(t), \ldots, \vec{z}_m(t))$ також є елементом множини $\mathcal{E}_{(5)}$. Із довільності вибору $\vec{Z} \in \mathcal{E}_{(5)}$ і $A \in G_1$ випливає (11). □

Доведення теореми 4. Нехай функція $\vec{U}(t) = (\vec{u}_1(t), \ldots, \vec{u}_m(t))$ є довільним елементом множини $\mathcal{E}_{(6)}$. Тоді

$$\begin{cases} \vec{u}_i(t) \equiv P_i(\vec{u}_1(t-1), \ldots, \vec{u}_m(t-1)), \\ i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{16}$$

З умов теореми та (16) випливає, що для кожних $A \in G_1$ і $i = \overline{1,m}$

$$A\vec{u}_i(t) \equiv AP_i(\vec{u}_1(t-1), \ldots, \vec{u}_m(t-1)) \equiv P_i(A\vec{u}_1(t-1), \ldots, A\vec{u}_m(t-1)),$$

тобто функція $\left(\mathcal{A}\vec{U}\right)(t) = (A\vec{z}_1(t), \ldots, A\vec{z}_m(t))$ також є розв'язком системи рівнянь (6). Із довільності вибору $A \in G_1$ випливає (12). □

Отже, множини розв'язків систем рівнянь (3), (4), (5) *і* (6)*, коли операторні коефіцієнти в правих частинах цих систем переставні з операторами обертання в* $\mathbb{R}^3$*, інваріантні відносно елементів групи* $\tilde{G}_m$*.*

4 Допоміжні твердження

Спочатку виконаємо деякі підготовчі дії. Розглянемо у просторі $\mathbb{R}^3$ довільну вісь L, що проходить через точку $O(0,0,0)$ і для якої вектор $\vec{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ є напрямним вектором. Зазначимо, що $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{a}$. Вісь L із напрямним вектором $\vec{a}$ будемо позначати через $L_{\vec{a}}$.

Кожне обертання в просторі $\mathbb{R}^3$ повертає радіус-вектори точок цього простору на деякий кут повороту δ навколо деякої осі обертання L, точки якої інваріантні. Напрямок осі обертання L і кут повороту δ залежать від відображення обертання і визначаються однозначно.

Позначимо через $E_{L_{\vec{a}}}$ площину, що проходить через точку $O(0,0,0)$ перпендикулярно до осі $L_{\vec{a}}$. Зазначимо, що множина всіх точок площини $E_{L_{\vec{a}}}$ є підпростором простору $\mathbb{R}^3$ розмірності 2, а множина всіх точок осі $L_{\vec{a}}$ є підпростором простору $\mathbb{R}^3$ розмірності 1.

Кожний вектор $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ єдиним чином подається у вигляді

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2,$$

де $\vec{r}_1 \in E_{L_{\vec{a}}}$ і $\vec{r}_2 \in L_{\vec{a}}$. Очевидно, що вектори $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ ортогональні.

Позначимо через $P_{\vec{a}}$ оператор ортогонального проектування на підпростір $E_{L_{\vec{a}}}$. У нашому випадку він визначається рівністю

$$P_{\vec{a}}\vec{r} = \vec{r}_1.$$

За допомогою цього оператора для кожної множини $M \subset \mathbb{R}^3$ можна розглянути проекцію $P_{\vec{a}}M$ цієї множини на підпростір $E_{L_{\vec{a}}}$. Визначимо її рівністю

$$P_{\vec{a}}M = \{P_{\vec{a}}\vec{m} : \vec{m} \in M\}.$$

Лема 1. *Нехай множина $M \subset \mathbb{R}^3$ необмежена.*

Тоді існує вектор $\vec{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ такий, що множина $P_{\vec{a}}M$ буде необмеженою.

Доведення леми 1. Припустимо, що твердження леми хибне. Розглянемо довільні три взаємно перпендикулярні площини $E_{L_{\vec{a}_1}}$, $E_{L_{\vec{a}_2}}$ і $E_{L_{\vec{a}_3}}$, де $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ – нормальні вектори цих площин відповідно.

За припущенням множини $P_{\vec{a}_1}M$, $P_{\vec{a}_2}M$ і $P_{\vec{a}_3}M$ обмежені.

Ураховуючи, що $|\vec{m}|^2 = |P_{\vec{a}_1}\vec{m}|^2 + |P_{\vec{a}_2}\vec{m}|^2 + |P_{\vec{a}_3}\vec{m}|^2$ для кожного $\vec{m} \in M$, приходимо до суперечності, оскільки $\sup\limits_{\vec{m}\in M} \sqrt{|P_{\vec{a}_1}\vec{m}|^2 + |P_{\vec{a}_2}\vec{m}|^2 + |P_{\vec{a}_3}\vec{m}|^2} < +\infty$ (за припущенням) і $\sup\limits_{\vec{m}\in M} |\vec{m}| = +\infty$ (за умовами леми).

Отже, припущення про хибність твердження леми неправильне. □

Лема 2. *Нехай обертання A точок простору $\mathbb{R}^3$ є поворотом точок цього простору навколо осі $L_{\vec{a}}$ на кут δ (позначимо його через $A_{\vec{a},\delta}$).*

Тоді для кожних $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ і $\delta \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення

$$|A_{\vec{a},\delta}\vec{r} - \vec{r}| = |A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{r} - P_{\vec{a}}\vec{r}| = 2\left|\sin\frac{\delta}{2}\right| |P_{\vec{a}}\vec{r}| \le |\delta||\vec{r}|. \tag{17}$$

Доведення леми 2. Якщо $\vec{r} \in L_{\vec{a}}$, то

$$|A_{\vec{a},\delta}\vec{r} - \vec{r}| = |A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{r} - P_{\vec{a}}\vec{r}| = 0 \tag{18}$$

(тут ураховано те, що всі точки осі $L_{\vec{a}}$ є нерухомими для $A_{\vec{a},\delta}$). Тому виконуються співвідношення (17) для кожного $\delta \in \mathbb{R}$ у випадку $\vec{r} \in L_{\vec{a}}$.

Далі будемо вважати, що $\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus L_{\vec{a}}$.

Подамо $\vec{r}$ у вигляді

$$\vec{r} = P_{\vec{a}}\vec{r} + \vec{r}_2, \tag{19}$$

де $\vec{r}_2 \in L_{\vec{a}}$ і $P_{\vec{a}}\vec{r} \neq \vec{0}$. Оскільки

$$A_{\vec{a},\delta}(P_{\vec{a}}\vec{r} + \vec{r}_2) = A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{r} + A_{\vec{a},\delta}\vec{r}_2 = A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{r} + \vec{r}_2,$$

то завдяки (19)

$$|A_{\vec{a},\delta}\vec{r} - \vec{r}| = |A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{r} - P_{\vec{a}}\vec{r}|. \tag{20}$$

Покажемо, що

$$|A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{r} - P_{\vec{a}}\vec{r}| = 2\left|\sin\frac{\delta}{2}\right| |P_{\vec{a}}\vec{r}|. \tag{21}$$

Використаємо на площині $E_{L_{\vec{a}}}$ прямокутну декартову систему координат $O\hat{x}\hat{y}$ з початком координат $\hat{O}$ на осі $L_{\vec{a}}$.

Нехай $P_{\vec{a}}\vec{r} = (\hat{x}, \hat{y})$, де $\hat{x}$ і $\hat{y}$ – координати вектора $P_{\vec{a}}\vec{r}$. Поворот цього вектора на кут δ навколо точки O' в площині $E_{L_{\vec{a}}}$ описується матрицею $\begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}$ (див. [1]). Тому

$$A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{r} = A_{\vec{a},\delta}(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}\cos\delta - \hat{y}\sin\delta, \hat{x}\sin\delta + \hat{y}\cos\delta),$$
$$A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{r} - P_{\vec{a}}\vec{r} = (\hat{x}(\cos\delta - 1) - \hat{y}\sin\delta, \hat{x}\sin\delta + \hat{y}(\cos\delta - 1))$$

і

$$|A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{r} - P_{\vec{a}}\vec{r}|^2 = (\hat{x}(\cos\delta - 1) - \hat{y}\sin\delta)^2 + (\hat{x}\sin\delta + \hat{y}(\cos\delta - 1))^2 =$$
$$= \hat{x}^2(\cos\delta - 1)^2 + \hat{y}^2\sin^2\delta + \hat{x}^2\sin^2\delta + \hat{y}^2(\cos\delta - 1)^2 = \hat{x}^2\left((\cos\delta - 1)^2 + \sin^2\delta\right) +$$
$$+\hat{y}^2\left((\cos\delta - 1)^2 + \sin^2\delta\right) = \left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right)(2 - 2\cos\delta) = 4\left(\sin^2\frac{\delta}{2}\right)|P_{\vec{a}}\vec{r}|^2.$$

Звідси випливає співвідношення (21).

Отже, на підставі (18), (20) і (21)

$$|A_{\vec{a},\delta}\vec{r} - \vec{r}| = |A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{r} - P_{\vec{a}}\vec{r}| = 2\left|\sin\frac{\delta}{2}\right| |P_{\vec{a}}\vec{r}|$$

для всіх $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ і $\delta \in \mathbb{R}$. На підставі цього співвідношення та нерівностей

$$|\sin\varphi| \leq |\varphi|, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

і

$$|P_{\vec{a}}\vec{r}| \leq |\vec{r}|, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^3, \tag{22}$$

(див. [7] і [6]) отримуємо (17). $\square$

5 Умови нестійкості необмежених розв'язків систем (3), (4), (5) і (6)

Покажемо, що виконання умови комутативності операторних коефіцієнтів досліджуваних систем рівнянь із відображеннями обертання в $\mathbb{R}^3$ та умови необмеженості розв'язків систем гарантують нестійкість цих розв'язків.

Справджуються наступні твердження.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 1.*

Тоді кожний необмежений розв'язок $\vec{X}(t)$ системи (3) нестійкий.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 2.*

Тоді кожний необмежений розв'язок $\vec{Y}(t)$ системи (4) нестійкий.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови теореми 3.*

Тоді кожний необмежений розв'язок $\vec{Z}(t)$ системи (5), для якого виконується співвідношення

$$\sup_{t \geq t_0} \left\| \frac{d\vec{Z}(t)}{dt} \right\|_{E^m} < +\infty, \tag{23}$$

нестійкий.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови теореми 4.*

Тоді кожний неперервний необмежений розв'язок $\vec{U}(t)$ системи (6) нестійкий.

Оскільки доведення теорем 5 і 6 однакові, то обмежимося лише наведенням доведення другого твердження.

Доведення теореми 6. Нехай функція $\vec{Y}(t) = (\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_m(t))$ є необмеженим розв'язком системи (4). Тоді для деякого $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |\vec{y}_{i_0}(t)| = +\infty.$$

На підставі леми 1 існує нормований вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, для якого

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |P_{\vec{a}} \vec{y}_{i_0}(t)| = +\infty. \tag{24}$$

Покажемо, що розв'язок $\vec{Y}(t)$ системи (4) є нестійким.

За теоремою 1 для кожного $\delta \in \mathbb{R}$ функція $\vec{Y}_\delta(t) = (A_{\vec{a},\delta}\vec{y}_1(t), \ldots, A_{\vec{a},\delta}\vec{y}_m(t))$, як і функція $\vec{Y}(t)$, також є розв'язком системи (4), а за лемою 2 на підставі (24)

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |A_{\vec{a},\delta} P_{\vec{a}} \vec{y}_{i_0}(t) - P_{\vec{a}} \vec{y}_{i_0}(t)| = \overline{\lim_{t \to +\infty}} 2 \left| \sin \frac{\delta}{2} \right| |P_{\vec{a}} \vec{y}_{i_0}(t)| = +\infty \tag{25}$$

для кожного $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

Згідно з лемою 2, означенням норми в E^m (див. (1)) та нерівністю (22) для всіх $t \geq t_0$

$$\left\| \vec{Y}_\delta(t) - \vec{Y}(t) \right\|_{E^m} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |A_{\vec{a},\delta} \vec{y}_i(t) - \vec{y}_i(t)|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |A_{\vec{a},\delta} P_{\vec{a}} \vec{y}_i(t) - P_{\vec{a}} \vec{y}_i(t)|^2} \geq |A_{\vec{a},\delta} P_{\vec{a}} \vec{y}_{i_0}(t) - P_{\vec{a}} \vec{y}_{i_0}(t)| \tag{26}$$

і

$$\left\| \vec{Y}_\delta(t_0) - \vec{Y}(t_0) \right\|_{E^m} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |A_{\vec{a},\delta} \vec{y}_i(t_0) - \vec{y}_i(t_0)|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |A_{\vec{a},\delta} P_{\vec{a}} \vec{y}_i(t_0) - P_{\vec{a}} \vec{y}_i(t_0)|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} 4 \left| \sin \frac{\delta}{2} \right|^2 |P_{\vec{a}} \vec{y}_i(t_0)|^2} \leq 2 \left| \sin \frac{\delta}{2} \right| \left\| \vec{Y}(t_0) \right\|_{E^m} \leq |\delta| \left\| \vec{Y}(t_0) \right\|_{E^m}. \tag{27}$$

Із (27) випливає, що

$$\lim_{\delta \to 0} \left\| \vec{Y}_\delta(t_0) - \vec{Y}(t_0) \right\|_{E^m} = 0,$$

а з (25) і (26) випливає, що виконується співвідношення

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \left\| \vec{Y}_\delta(t) - \vec{Y}(t) \right\|_{E^m} = +\infty$$

якою б малою і додатною не була величина $\left\| \vec{Y}_\delta(t_0) - \vec{Y}(t_0) \right\|_{E^m}$.

Це означає нестійкість розв'язку $\vec{Y}(t)$ системи (4). □

Теореми 7 і 8 доводяться аналогічно. Є несуттєва відмінність лише в частинах, що стосуються початкових умов розв'язків.

Доведення теореми 7. Нехай розв'язок $\vec{Z}(t)$ системи (5) необмежений і виконується співвідношення (23). Тоді

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \left\| \vec{Z}(t) \right\|_{E^m} = +\infty$$

і, отже, для деякого $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |\vec{z}_{i_0}(t)| = +\infty. \tag{28}$$

Завдяки (28) та лемі 1 для деякого нормованого вектора $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |P_{\vec{a}} \vec{z}_{i_0}(t)| = +\infty, \tag{29}$$

а завдяки лемі 2 для всіх $\delta \in (0, 1)$

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |A_{\vec{a},\delta} P_{\vec{a}} \vec{z}_{i_0}(t) - P_{\vec{a}} \vec{z}_{i_0}(t)| = +\infty \tag{30}$$

(тут також ураховано (29)).

Зафіксуємо як завгодно мале число $\varepsilon > 0$.

Для обґрунтування нестійкості розв'язку $\vec{Z}(t)$ системи (5) із-за наявності в (5) відхилень $\tau_{ji}(t)$ аргументу потрібно враховувати значення $\vec{Z}(t)$ на деякому початковому проміжку $[t_0-\Delta, t_0]$, довжина якого залежить від співвідношень

$$\begin{cases} \tau_{ji}(t) = P_{ji}(\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t)), \vec{r}_i(t)), \\ t \geq t_0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m},\ i \neq j, \end{cases}$$

що є складовими досліджуваної системи.

Будемо вважати, що початковий проміжок $[t_0-\Delta, t_0]$ нам відомий і функція $\vec{Z}(t)$ є неперервно-диференційовною на $[t_0-\Delta, t_0]$. Завдяки такому припущенню функція $\vec{Z}(t)$ і її похідна $\dfrac{d\vec{Z}(t)}{dt}$ є обмеженими на $[t_0-\Delta, t_0]$, тобто для деякого числа $c>0$

$$\max_{s\in[t_0-\Delta,t_0]} \left\|\vec{Z}(s)\right\|_{E^m} + \max_{s\in[t_0-\Delta,t_0]} \left\|\frac{d\vec{Z}(s)}{ds}\right\|_{E^m} \leq c. \tag{31}$$

Розглянемо функцию $\vec{Z}_\delta(t) = (A_{\vec{a},\delta}\vec{z}_1(t), \ldots, A_{\vec{a},\delta}\vec{z}_m(t))$, що за теоремою 3 також є розв'язком системи рівнянь (5), як і функція $\vec{Z}(t)$.

Аналогічно, як і при доведенні теореми 6 (див. співвідношення (26) і (27)), можна показати, що

$$|A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{z}_{i_0}(t) - P_{\vec{a}}\vec{z}_{i_0}(t)| \leq \left\|\vec{Z}_\delta(t) - \vec{Z}(t)\right\|_{E^m} \leq |\delta| \left\|\vec{Z}(t)\right\|_{E^m} \tag{32}$$

і

$$\left\|\frac{d\vec{Z}_\delta(t)}{dt} - \frac{d\vec{Z}(t)}{dt}\right\|_{E^m} \leq |\delta| \left\|\frac{d\vec{Z}(t)}{dt}\right\|_{E^m} \tag{33}$$

для всіх $\delta \in (0,1)$ і $t \geq t_0 - \Delta$. Тому з урахуванням (30) для всіх $\delta \in (0,1)$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\|\vec{Z}_\delta(t) - \vec{Z}(t)\right\|_{E^m} = +\infty. \tag{34}$$

Завдяки (31), (32) і (33)

$$\max_{s\in[t_0-\Delta,t_0]} \left\|\vec{Z}_\delta(s) - \vec{Z}(s)\right\|_{E^m} + \max_{s\in[t_0-\Delta,t_0]} \left\|\frac{d\vec{Z}_\delta(s)}{ds} - \frac{d\vec{Z}(s)}{ds}\right\|_{E^m} \leq$$

$$\leq |\delta| \max_{s\in[t_0-\Delta,t_0]} \left\|\vec{Z}(s)\right\|_{E^m} + |\delta| \max_{s\in[t_0-\Delta,t_0]} \left\|\frac{d\vec{Z}(s)}{ds}\right\|_{E^m} \leq |\delta|c. \tag{35}$$

Виберемо $\delta \in (0,1)$ настільки малим, щоб

$$|\delta|c < \varepsilon. \tag{36}$$

Зазначимо, що при такому δ виконується (34).

Довільність вибору числа ε та співвідношення (34), (35) і (36) вказують на нестійкість розв'язку $\vec{Z}(t)$ системи (5). □

Доведення теореми 8. Нехай $\vec{U}(t) = (\vec{u}_1(t), \ldots, \vec{u}_m(t))$ – неперервний і необмежений на $[t_0 - 1, +\infty)$ розв'язок системи різницевих рівнянь (6). Тоді для деякого $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} |\vec{u}_{i_0}(t)| = +\infty. \tag{37}$$

Розглянемо нормований вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, для якого

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} |P_{\vec{a}}\vec{u}_{i_0}(t)| = +\infty. \tag{38}$$

Такий вектор існує завдяки лемі 1 та (37).

Покажемо нестійкість розв'язку $\vec{U}(t)$. Використаємо співвідношення

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} |A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{u}_{i_0}(t) - P_{\vec{a}}\vec{u}_{i_0}(t)| = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, 2\left|\sin\frac{\delta}{2}\right| |P_{\vec{a}}\vec{u}_{i_0}(t)| = +\infty, \tag{39}$$

що завдяки (38) та лемі 2 виконується, якщо $\delta \notin \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

Розглянемо неперервну на $[t_0-1, +\infty)$ функцію $\vec{U}_\delta(t) = (A_{\vec{a},\delta}\vec{u}_1(t), \ldots, A_{\vec{a},\delta}\vec{u}_m(t))$, що на підставі теореми 4 є розв'язком системи (6) при кожному $\delta \in \mathbb{R}$.

Для розв'язків $\vec{U}_\delta(t)$ і $\vec{U}(t)$ системи (6) для всіх $t \geq t_0 - 1$ справджується співвідношення

$$|A_{\vec{a},\delta}P_{\vec{a}}\vec{u}_{i_0}(t) - P_{\vec{a}}\vec{u}_{i_0}(t)| \leq \left\|\vec{U}_\delta(t) - \vec{U}(t)\right\|_{E^m} \leq |\delta| \left\|\vec{U}(t)\right\|_{E^m}, \tag{40}$$

аналогічне (32). Звідси та (39) випливає, що для всіх $\delta \in (0,1)$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\|\vec{U}_\delta(t) - \vec{U}(t)\right\|_{E^m} = +\infty \tag{41}$$

Завдяки (40)

$$\max_{s\in[t_0-1,t_0]} \left\|\vec{U}_\delta(s) - \vec{U}(s)\right\|_{E^m} \leq |\delta| \max_{s\in[t_0-1,t_0]} \left\|\vec{U}(s)\right\|_{E^m}.$$

Із цього співвідношення випливає, що для кожного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta \in (0,1)$, для якого

$$\max_{s\in[t_0-1,t_0]} \left\|\vec{U}_\delta(s) - \vec{U}(s)\right\|_{E^m} < \varepsilon. \tag{42}$$

Зазначимо, що для кожного $\delta \in (0,1)$ виконується (41).

Із (41), (42) та довільності вибору $\varepsilon > 0$ випливає нестійкість розв'язку $\vec{U}(t)$ системи рівнянь (6). □

Із теорем 5 – 8 випливають наступні два твердження.

Наслідок 1. *Стійкі розв'язки систем рівнянь* (3), (4) *і* (6) *обмежені.*

Наслідок 2. *Стійкі розв'язки систем рівнянь* (5) *з рівномірно обмеженими похідними першого порядку обмежені.*

6 Приклад застосування теореми 7

Розглянемо точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ з масами $m_0, m_1, \ldots, m_n$, що рухаються у просторі $\mathbb{R}^3$. Для вивчення руху цих точок використаємо прямокутну систему координат x, y, z з початком координат у точці O. Систему координат вважатимемо інерціальною. У статтях [12] і [13] показано, що у випадку, коли швидкість гравітації збігається зі швидкістю світла (це узгоджується з теорією відносності А. Ейнштейна та з дослідженнями С.М. Копейкіна й Е. Фомалонта про фундаментальну межу швидкості гравітації [3]), рух точок M_0, $M_1, \ldots, M_n$ описується наступною системою рівнянь із відхилювальним аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \sum\limits_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \dfrac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)|^3}(\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)), \\ c\tau_{ji}(t) = |\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)|, \\ i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,n},\ i \neq j, \end{cases} \tag{43}$$

де c – швидкість гравітації.

У випадку $n = 9$ систему рівнянь (43) можна використовувати для вивчення руху Сонця і планет, якщо не враховувати дію на них інших складових Сонячної системи (астероїдів, комет тощо) та Галактики [12].

До системи (43) застосовні теореми 3 і 7.

Справді, використаємо множину

$$\check{\Omega}_{n+1} = \{(\vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_n) \in E^{n+1} : \vec{r}_i \neq \vec{r}_j, i = \overline{0,n}, j = \overline{0,n}, i \neq j\},$$

що, очевидно, задовольняє співвідношення (2) при $m = n+1$.

Розглянемо відображення $P_{1,i} : \check{\Omega}_{n+1} \to \mathbb{R}^3$, $i = \overline{0,n}$, що визначаються рівностями

$$P_{1,i}(\vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_n) = \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_i), \quad i = \overline{0,n}.$$

Ці відображення є елементами множини $\mathfrak{P}_{1,\check{\Omega}_{n+1}}$, оскільки

$$A \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|A\vec{r}_j - A\vec{r}_i|^3}(A\vec{r}_j - A\vec{r}_i)$$

для кожного відображення $A \in G_1$ і суми

$$\sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_i), \quad i = \overline{0,n},$$

очевидно, є неперервними на $\check{\Omega}_{n+1}$.

Також відображення $P_{0,ji} : \check{\Omega}_2 \to \mathbb{R}_+$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,n}$, $i \neq j$, що визначаються рівностями

$$cP_{0,ji}(\vec{r}_j, \vec{r}_i) = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|,$$

де $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,n}$, $i \neq j$, є елементами множини $\mathfrak{P}_{0,\breve{\Omega}_2}$, оскільки ці відображення неперервні і

$$|A_\varphi \vec{r}_j - A_\varphi \vec{r}_i| = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$$

для всіх $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,n}$, $i \neq j$.

Тому за теоремою 3 множина розв'язків системи (43) інваріантна відносно елементів групи $\tilde{G}_{n+1}$ і, отже, до системи (43) застосовна теорема 7, якщо вимагати додатково, щоб для цієї системи виконувалося співвідношення, аналогічне (23). У статті [13] показано, що система (43) при $n = 1$ (випадок двох тіл) може мати необмежені розв'язки, які нестійкі. Також нестійкими є необмежені розв'язки такої системи і за теоремою 7.

Аналогічне твердження справджується для системи (43) і при довільному $n \in \mathbb{N}$ (за теоремою 7). Це наступне твердження.

Теорема 9. *Якщо система рівнянь* (43) *має необмежений розв'язок, похідна якого рівномірно обмежена на* $[t_0, +\infty)$, *то цей розв'язок нестійкий.*

7 Додаткові зауваження та літературні вказівки

Задача про інваріантність множин розв'язків систем рівнянь (3), (4), (4) і (6) відносно групи відображень, породжених тривимірними обертаннями, розглянута вперше. Така задача згідно з п. 6 потрібна для небесної механіки зі скінченною швидкістю гравітації і є корисною для звичайних диференціальних рівнянь, звичайних диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями, диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом, різницевих рівнянь та інших еволюційних рівнянь. Звідси, зокрема, випливає, що множини задач, до яких застосовні наведені в п. 3 і 5 результати, не є порожніми.

Запропонований у п. 5 метод доведення нестійкості необмежених розв'язків широкого класу рівнянь з використанням інваріантності множин розв'язків цих рівнянь відносно групи $\tilde{G}_m$ та лем 1 і 2 є новим.

Очевидно, що замість систем рівнянь (3), (4), (4) і (6) можна розглядати складніші системи рівнянь. Твердження п. 3 і 5 та їх обґрунтування зберігаються і для них.

Виконання співвідношення (23) в теоремі 7 є природним. Наприклад, у небесній механіці, що використовує в якості математичної моделі руху $n+1$ тіл систему (43) (див. [12], [13]), швидкість руху тіл не може бути більшою швидкості руху світла c.

Теорема 9 є узагальненням відповідного твердження для двох тіл зі скінченною швидкістю гравітації (див. [13], п. 11).

Дослідженню системи рівнянь (43) було приділено увагу також і в [14], [15].

Список літератури

[1] Bakhvalov, S.V., Babushkin, L.I., Ivanitskaya, V.P. Analytical Geometry. Enlightenment, Moscow, 1965. (in Russian)

[2] Bellman, R., Cooke, K. L. Differential-Difference Equations. Academic Press, New York London, 1963.

[3] Kopeikin, S. V., Fomalont, E. *The fundamental limit of the speed of gravity and its measurement.* Earth and the Universe 2004, (3). http: //ziv.telescopes.ru/rubric/hypothesis/?pub=1 (in Russian)

[4] Korn, G., Korn, T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. McGraw-Hill Book Company, INS, New York Toronto London, 1961.

[5] Kurosh, A.G. Course of Higher Algebra, Nauka, Moscow, 1971. (in Russian)

[6] Maurin, K. Metody Przestrzeni Hilberta. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsawa, 1959.

[7] Miškis, A. D. Lectures in Higher Mathematics. Nauka, Moskva, 1969. (in Russian)

[8] Pontryagin, L.S. Continuous groups. Gostekhizdat, Moscow, 1954. (in Russian)

[9] Rubanik, V.P. Oscillations of quasilinear systems with delay. Nauka, Moscow, 1971. (in Russian)

[10] Samoylenko, A. M., Perestyuk, M. O., Parasyuk, I. A. Differential equations. Libid, Kyiv, 2003. (in Ukrainian)

[11] Slyusarchuk, V. Y. Absolute stability of dynamical systems with aftereffect. Publishing house of the National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, 2003. (in Ukrainian)

[12] Slyusarchuk, V. Y. *Mathematical model of the Solar system with account of gravitation velocity.* Neliniini Koliv. 2018, **21** (2), 238–261. (in Ukrainian)

[13] Slyusarchuk, V. Y. *Non-Keplerian behavior and instability of motion of two bodies caused by a finite velocity of gravity.* Neliniini Koliv. 2018, **21** (3), 397–419. (in Ukrainian)

[14] Slyusarchuk, V. Y. Mathematical model of the Solar system with account of gravitation velocity. Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematics and its applications in the natural sciences and information technologies dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Chernivtsi National University named after Yuriy Fedkovich, Chernivtsi, Ukraine, September 17-19, 2018, Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2018, 98. (in Ukrainian)

[15] Slyusarchuk, V. Y. *Kepler's laws and the two-body problem with finite speed of gravity.* Bukovinian Math. Journal 2018, **6** (3–4), 134–151. (in Ukrainian)

[16] Hale, J. Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1977.

[17] Elsgolts, L.E., Norkin, S. B. Introduction to the theory of differential equations with deviating argument. Nauka, Moscow, 1971. (in Russian)

Надійшло 14.05.2019

Slyusarchuk V.Yu. *Instability of unbounded solutions of evolution equations with operator coefficients commuting with rotation operators*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 1 (2019), 99–113.

We study nonlinear systems of ordinary differential equations, ordinary differential equations with impulse perturbations, differential equations with a lagging argument and non-differential constraints on solutions and difference equations, whose operator coefficients commute with rotation operators. Based on this requirement, the sets of solutions of the studied systems of equations are invariant with respect to the mappings generated by three-dimensional rotations. This property of solutions of the studied systems of equations allows us to prove the instability of their unbounded solutions. As a consequence, the conditions for boundedness of solutions of the studied systems of equations are obtained. In the study of systems of equations, some found properties of rotations of three-dimensional space are used. An example of applying research results to celestial mechanics with a finite gravity speed is also given.