Івасишен С. Д., Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д.

ПРО ПРОБЛЕМУ ФАВАРА ТА ЗАДАЧУ КОЛМОГОРОВА – НІКОЛЬСЬКОГО, РОЗВ'ЯЗАНІ В. В. ДЗЯДИКОМ

Стаття присвячена 100-річчю з дня народження видатного українського математика члена-кореспондента НАН України В. К. Дзядика, який отримав значні результати в теорії наближення періодичних функцій, встановив фундаментальні результати, що відносяться до конструктивної теорії функцій комплексної змінної. У статті висвітлюються дві важливі задачі, розв'язання яких принесли вченому світову славу. Це задача Фавара про найкраще наближення функцій з класів W^r при дробових r і задача Колмогорова–Нікольського про точні верхні грані відхилень лінійних методів підсумовування рядів Фур'є на деяких класах $W^r H_\omega$.

Ключові слова і фрази: проблема Фавара, задача Колмогорова–Нікольського, теорія апроксимації, найкраще наближення, асимптотика верхніх граней, тригонометричний поліном, ядро Бернуллі, модуль неперервності, асимптотична рівність, константа Фавара, лінійний метод підсумовування рядів Фур'є, сума Фейєра, метод Рогозинського..

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна
e-mail: *ivasyshen.sd@gmail.com, zadereypv@ukr.net, zadereynm@gmail.com, g.nefyodova@gmail.com*

В. К. Дзядик
(18.02.1919 - 26.10.1998)

18 лютого 2019 року виповнилося 100 років від дня народження видатного україн-

УДК 51(092)+517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 01A70, 42A05, 42A10.

ського математика члена-кореспондента НАН України Владислава Кириловича Дзядика.

Наукову роботу В. К. Дзядик розпочав ще в студентські роки, навчаючись у Дніпропетровському університеті на математичному факультеті. Першу вищу освіту він здобув у Київському університеті на факультеті іноземних мов, спеціалізуючись на французькій мові. Після закінчення Дніпропетровського університету В. К. Дзядик протягом деякого часу викладав математику в школах Волинської області.

У 1953 році його було прийнято на посаду асистента кафедри математики Луцького державного педагогічного інституту імені Лесі Українки. Працюючи в педінституті та виконуючи значне педагогічне навантаження, що складало біля 700 годин, Владислав Кирилович успішно склав за сім місяців чотири кандидатські іспити, захистив у 1955 році кандидатську дисертацію, а вже в 1960 році – докторську.

З 1960 року В. К. Дзядик працює в Інституті математики НАН України. Владислав Кирилович був здібним організатором, завдяки його зусиллям в 1963 році був створений в Інституті математики відділ теорії функцій, яким він керував протягом 27 років. Він завжди дбав, щоб тематика відділу охоплювала якомога більшу кількість напрямів. Математичні здібності та яскравий талант В. К. Дзядика проявились вже в перших публікаціях, де була розв'язана знаменита на той час проблема Фавара.

Свої ранні наукові результати В. К. Дзядик підсумував у докторській дисертації "Дослідження апроксимаційних і геометричних властивостей деяких класів функцій", яку він блискуче захистив у Математичному інституті імені В. А. Стеклова в 1960 році (м. Москва). Офіційний опонент дисертації професор Московського фізико-технічного інституту Л. Д. Кудрявцев у своєму відгуку писав: "Дисертант подолав принципові труднощі і розв'язав задачі, що давно стояли в теорії наближення функцій, над якими працювало багато першокласних спеціалістів у цій області". Другий опонент професор С. Б. Стєчкін відмітив: "В. К. Дзядик поставив своєрідний рекорд: на сьогоднішній день йому в теорії функцій належать результати, які доводяться найбільш трудно".

Наукові математичні інтереси В. К. Дзядика надзвичайно широкі, глибокі та різнопланові. Він, як людина енциклопедичних знань, отримав значні результати в теорії наближення періодичних функцій, встановив важливі результати, що відносяться до конструктивної теорії функцій комплексної змінної.

Фундаментальні результати В. К. Дзядика про наближення неперервних функцій комплексної змінної в замкнутих областях з кутами та ті ідеї, що містяться в них, визначили напрямки досліджень багатьох математиків. Ці напрямки пов'язані з доведенням важливих прямих та обернених теорем конструктивної теорії функцій комплексної змінної. В. К. Дзядику належить заслуга в створенні глибокої і змістовної теорії конструктивного опису важливих класів функцій. Розроблені ним апроксимаційні методи послужили фундаментом побудови ряду ефективних чисельних методів для розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь. У даній статті відмітимо тільки ті результати Владислава Кириловича, які стосуються знаменитих задач Фавара та Колмогорова–Нікольського.

Щоб описати ці результати, наведемо деякі означення та позначення.

Модулем неперервності називають неперервну функцію $\omega(t), t \in [0, \infty)$, що задовольняє такі умови: $\omega(0) = 0, 0 \le \omega(t) - \omega(t') \le \omega(t - t')$ при $0 \le t' < t$. Якщо функція f неперервна на $[t_0, t_1]$, тобто $f \in C[t_0, t_1]$, то її модулем неперервності називається функція

$$\omega(f;\delta) := \sup_{|t-t'|\le\delta} |f(t) - f(t')|, \delta > 0, \omega(f;0) := 0.$$

Через H_ω позначимо клас 2π-періодичних функцій $f \in C[0, 2\pi] =: C$ таких, що $\omega(f, t) \le \omega(t), t \in [0, 2\pi]$, де ω – заданий модуль неперервності, через $W^r H_\omega$ – клас функцій f таких, що похідна $f^{(r)} \in H_\omega$, де $r > 0$, а через W^r – клас функцій $f \in C[0, 2\pi]$, які мають абсолютно неперервну похідну порядку $r-1$ і для яких справджується нерівність

$$\|f^{(r)}\|_{L_\infty[0,2\pi]} \le 1.$$

Тригонометричні поліноми, як апарат наближення класів $W^r H_\omega$, почали вивчати після досліджень С. Н. Бернштейна [1] та Д. Джексона [8]. Зокрема, Д. Джексоном було доведено, що

$$E(W^r H_\omega, I_{2n-1}, C) :=$$
$$= \sup_{f\in W^r H_\omega} \inf_{t_{n-1}\in I_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C \asymp \frac{1}{n^r}\omega(\frac{1}{n}),$$

де I_{2n-1} – множина тригонометричних поліномів порядку $n - 1$.

Точну оцінку наближень класів гладких функцій вперше отримав французький математик Ж. Фавар [7]. Він довів, що

$$E(W^r, I_{2n-1}, C) = \frac{K_r}{n^r}, r \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де

$$K_r := \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{2}$$

Сталі K_r пізніше почали називати константами Фавара. При цьому Ж. Фавар за допомогою конкретного лінійного методу підсумовування рядів Фур'є функцій з W^r побудував тригонометричний поліном, який породжується трикутною матрицею і задовольняє рівність (1). Ж. Фавар висловив гіпотезу, що рівності (1) і (2) будуть справджуватися і для дробових r, тобто будуть правильними для будь-яких $r > 0$.

Ця задача протягом довгого часу була в центрі уваги багатьох математиків. Нею займались Ж. Фавар , Н. І. Ахієзер, М. Г. Крейн, Б. Надь, С. М. Нікольський, С. Б. Стєчкін, О. П. Тіман та інші. На початку 50-х років XX століття задачею Фавара почав займатись В. К. Дзядик.

Клас W^r при $r > 0$ збігається з множиною 2π-періодичних функцій f, які можна подати у вигляді такої згортки:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (\varphi * D_r)(x), x \in [0, 2\pi],$$

де $D_r(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \frac{r\pi}{2})}{k^r}$ – ядро Бернуллі, а функція φ ортогональна 1 в просторі $L_2[0, 2\pi]$ і $\|\varphi\|_{L_\infty[0,2\pi]} \le 1$. Тому задача Фавара зводиться до встановлення того факту, що ядро D_r задовольняє так звану умову A*: для довільного $n \in \mathbb{N}$ існують тригонометричний поліном t^*_{n-1} порядку не вище $n-1$ і натуральне число $n_* > n$ такі, що для функції

$$\varphi_*(t) := \mathrm{sign}(D_r(t) - t^*_{n-1}(t))$$

майже всюди виконується рівність

$$\varphi_*(t) = \varphi_*(t + \frac{\pi}{n^*}).$$

Якщо виконується умова A*, то

$$E(W^r, I_{2n-1}, C) = \frac{1}{\pi} \inf_{t_{n-1} \in I_{2n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} |D_r(t) - t_{n-1}(t)| dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_r(t) - t^*_{n-1}(t)| dt.$$

У 1953 році В. К. Дзядик [2] встановлює, що ядро D_r для довільного $r \in (0,1)$ дійсно задовольняє умову A* і навіть таку більш жорстку умову N*, яка легше перевіряється: існують поліном t^*_{n-1} і точка $\xi \in [0, \frac{\pi}{n}]$ такі, що різниця $D_r(t) - t^*_{n-1}(t)$ змінює знак у точках $t_k = \xi + \frac{k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, з відрізка $[0, 2\pi]$ і тільки в них. Тим самим була розв'язана задача Фавара для будь-якого $r \in (0,1)$.

У 1958–1959 роках дана задача для всіх $r > 0$ була розв'язана В. К. Дзядиком, а для всіх $r > 1$ також і китайським математиком Сунь Юн-Шеном (шляхом розвитку ідей і методів, запропонованих В. К. Дзядиком).

У 1959 році Владислав Кирилович знову повертається до задачі Фавара і розробляє новий метод її розв'язування. Він доводить, що якщо деяка функція K має в півінтервалі $(-\infty, a]$ абсолютно монотонну похідну K', то для всіх $t_{n-1} \in I_{2n-1}$ різниця $K - t_{n-1}$ може мати на піввідрізку $[a - 2\pi, a)$ не більше ніж $2n-1$ коренів з урахуванням кратності. Зокрема, якщо кількість таких коренів t_k дорівнює саме $2n-1$, то для довільних $t \in [a - 2\pi, a]$ виконується нерівність $(K(t) - t_{n-1}(t))/\Pi_{k=1}^{2n-1}(t - t_k) > 0$. Це твердження відіграє ключову роль у розв'язанні проблеми Фавара.

Завдяки цьому твердженню було доведено, що

$$E(W^r, I_{2n-1}, C) = E_n(W^r_L)_L := \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} |D_r(t) - t^*_{n-1}(t)| dt = \frac{1}{\pi} E_n(D_r)_L = \frac{M_r}{n^r},$$

де

$$M_r := \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin((2\nu+1)\beta - \frac{r\pi}{2})}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|,$$

t^*_{n-1} – тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює ядро D_r у точках $\frac{1}{n(\beta + k\pi)}, k \in \{1, .., n-1\}$, а β – число, що дорівнює 0 при $0 < r \le 1$ і є коренем рівняння $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos((2\nu+1)\beta - \frac{r\pi}{2})}{(2\nu+1)^r} = 0$ при $r > 1$, $E_n(W^r_L)_L$ – найкраще наближення в метриці $L := L_1[0, 2\pi]$ класу функцій W^r_L, тобто таких, що $\|f^{(r)}\|_L \le 1$.

Отже, задача Фавара для класів W^r при всіх $r > 0$ була повністю розв'язана В. К. Дзядиком [3].

У 1910 році А. Лебег [10] розглянув верхні грані відхилень

$$\|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_C$$

по класу H_ω, тобто величину

$$\varepsilon_n(H_\omega) := \sup_{f\in H_\omega} \|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_C,$$

де $S_n(f;\cdot)$ – частинна сума ряду Фур'є функції з класу H_ω.

У працях А. Лебега було встановлено, що

$$\varepsilon_n(H_\omega) \approx \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n.$$

А. М. Колмогоров у праці [9] поставив задачу про знаходження головного члена асимптотики верхніх граней

$$\varepsilon_n(W^r) := \sup_{f\in W^r} \|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_C$$

і встановив правильність рівності

$$\varepsilon_n(W^r) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), r \in \mathbb{N}.$$

Ця праця А. М. Колмогорова поклала початок цілому напрямку в теорії апроксимації. Замість класу W^r розглядались інші класи функцій, а замість частинних сум Фур'є брались різноманітні середні рядів Фур'є, замість простору C розглядався простір L.

Важливу роль у цих дослідженнях мали праці С. М. Нікольського [4, 5]. Тому задачу про знаходження головного члена асимптотики верхніх граней

$$\varepsilon(M;U_n) := \sup_{f\in M} \|f(\cdot) - U_n(f;\cdot)\|_X,$$

де M – фіксований клас функцій; $U_n(f;\cdot)$ – тригонометричні поліноми, породжені методами підсумовування ряду Фур'є, а X – простір C або $L_p, 1 \le p \le \infty$, будемо, слідуючи О. І. Степанцю [6], називати задачею Колмогорова–Нікольського (задачею К–Н).

Ця задача має багату історію. Великий внесок у розвиток цієї тематики зробили С. М. Нікольський, Б. Надь, С. Б. Стєчкін, О. В. Єфімов, С. О. Теляковський, М. П. Корнєйчук, В. К. Дзядик, О. І. Степанець та інші.

До початку 60-х років Б. Надь, С. Б. Стєчкін, С. О. Теляковський розробили метод, який дозволяв розв'язувати задачу К–Н на класах W^r_α функцій f, які зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)B^r_\alpha(x-t)dt, x \in [0, 2\pi], r > 0, \alpha \in \mathbb{R},$$

де

$$B_\alpha^r(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \cos(kt - \frac{\alpha\pi}{2}), \|\varphi\|_{L_\infty[0,2\pi]} \le 1,$$

причому $U_n(f;\cdot)$ визначаються числовими матрицями, що породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є.

При розв'язуванні задачі К–Н на класах $W^r H_\omega$, які враховують тонші властивості функцій, ніж класи W_α^r, цей метод не давав результатів.

Завдяки дослідженням С. М. Нікольського та О. В. Єфімова був розроблений метод, який дозволяв розв'язувати задачу К–Н для тих поліномів $U_n(f,\cdot)$, які дають порядок наближення гірший ніж найкращий (наприклад, суми Фур'є) або коли ядро методу $U_n(f,\cdot)$ є невід'ємне (наприклад, суми Фейєра).

Академік С. М. Нікольський (Москва), професор З. Чисельський (Варшава) і професор В. К. Дзядик у Всесоюзній школі з теорії функцій (1987 рік, м. Єреван).

На початку 70-х років XX століття український математик М. П. Корнєйчук (1920 – 2000) заклав основи методу розв'язування задачі К–Н на класах $W^r H_\omega$ для поліномів, що породжуються лінійними методами, у випадку, коли ядро змінює знак і порядок наближення на класі H_ω збігається з найкращим. До таких методів належить, наприклад, метод Фавара, метод Рогозинського. У 70-х роках минулого століття В. К. Дзядик та його учень О. І. Степанець розробили метод, який базувався на лемі Корнєйчука–Стєчкіна (1961 р.) і дозволяв розв'язувати задачу К–Н для класів $W^r H_\omega$.

Математичні досягнення В. К. Дзядика не обмежуються розглянутими вище результатами. Його математичний талант, уміння творчо й наполегливо працювати, неординарне креативне мислення дозволили йому та його учням розробити ряд методів та отримати важливі результати, які нині використовуються і розвиваються. Про це свідчать наукові здобутки його численних учнів та співробітників як відділу теорій функцій Інституту математики НАН України, так і відділу теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки НАН України.

Відомий вчений, учень В. К. Дзядика, член-кореспондент НАН України професор О. І. Степанець (1942–2007), заступник директора з наукової роботи Інституту математики (1996–2007), зокрема, узагальнив класи функцій $W^r H_\omega$ на класи $C^\psi H_\omega$, які точніше враховують властивості функцій, що розглядаються, та одержав на цих класах ряд важливих результатів.

Учень В. К. Дзядика професор І. О. Шевчук, завідувач кафедри математичного аналізу Національного університету імені Тараса Шевченка (з 1998 р.), розвинув теорію продовження функцій, отримав вагомі результати в теорії наближення функцій комплексних змінних та побудував теорію формозберігаючого наближення монотонних та кусково-монотонних функцій многочленами.

Талановитими учнями В. К. Дзядика були професори В. М. Коновалов і Ю. І. Мельник, які отримали важливі результати в теорії апроксимації функцій.

Учень В. К. Дзядика професор В. І. Білий (1938–1997) довгий час працював в Інституті прикладної математики і механіки НАН України, з 1985 року завідував відділом теорії функцій. Під його керівництвом була створена математична школа з теорії наближення функцій комплексної змінної, конструктивної теорії конформних інваріантів і квазіконформних відображень у теорії наближення функцій. Професор В. І. Білий та його учні, насамперед В. В. Андрієвський і Ф. Абдуллаєв, внесли в розвиток цього напрямку значний вклад.

Кафедрою математичного аналізу Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки понад тридцять років завідував учень В. К. Дзядика Л. І. Філозоф.

Математики багатьох країн світу успішно продовжують розвивати теорію наближень, базуючись на тому твердому фундаменті, який був закладений свого часу талановитими засновниками.

Список літератури

[1] Бернштейн С. Н. *О наилучшем приближении непрерывных функций посредством полиномов данной степени.* Собр. соч. Т. **1**. Москва, Изд-во АН СССР 1952, 8–105.

[2] Дзядык В. К. *О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-тую производную* $(0 < s < 1)$. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953, **17** (2), 135–162.

[3] Дзядык В. К. *О наилучшем приближении на классе периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959, **23** (6), 933–950.

[4] Никольский С. М. *Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами.* Тр. Мат. ин-та АН СССР 1945, **15**, 1–76.

[5] Никольский С. М. *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946, **10** (3), 207–256

[6] Степанец А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев, Наук. думка, 1981, 340 с.

[7] Favart J. *Sur les meilleurs procedes d'appvoximation de certains classes de functions par des polynomes trigonometrigues* Bue. Sci. Masth. 1937, **61**, 209–224, 243–266.

[8] Jackson D. Uber die Genauig Keit der Anmaherung stetiger Functionen durch ganze rationale Funkmionen gegebenen Grades and trigonometrischen Summen gegebener Ordnubg. Diss. Gottingen, 1911.

[9] Kolmogoroff A. *Zur Grossenortnung des Restliedes Fouriersehen Reihen differenzierbaren Functionen.* Ann. Math. 1935, **36**, 521–526.

[10] Lebesgue H. Sun la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipshitz. Bull. Soc. Math. De France, 1910.

Список літератури

[1] Bernstein S. N. On the best approximation of continuous functions by means of polynomials of a given degree. Publ. House USSR Academy of Sciences, Moscow, 1952, **1**, 8 – 105. (in Russian)

[2] Dzyadyk V.K. *On the best approximation on the class of periodic functions having a bounded s derivative* $(0 < s < 1)$ Izv. USSR Academy of Sciences Series of Math. 1953, **17** (2), 135 – 162.(in Russian)

[3] Dzyadyk V.K. *On the best approximation on the class of periodic functions defined by kernels that are integrals of absolutely monotonic functions* Izv. USSR Academy of Sciences Series of Math. 1959, **23** (6), 933 – 950. (in Russian)

[4] Nikolsky S.M. *Approximation of periodic functions by trigonometric polynomials.* Trudy Mat. Inst. USSR Academy of Sciences 1945, **15**, 1 – 76.(in Russian)

[5] Nikolsky S.M. *Approximation of functions by trigonometric polynomials on average.* Izv. USSR Academy of Sciences Series of Math. 1946, **10** (3), 207 – 256. (in Russian)

[6] Stepanets A.I. Uniform approximations by trigonometric polynomials. Naukova Dumka, Kyiv, 1981 (in Russian)

[7] Favart J. *Sur les meilleurs procedes d'appvoximation de certains classes de functions par des polynomes trigonometrigues* Bue. Sci. Masth. 1937, **61**, 209 – 224, 243 – 266.

[8] Jackson D. Uber die Genauig Keit der Anmaherung stetiger Functionen durch ganze rationale Funkmionen gegebenen Grades and trigonometrischen Summen gegebener Ordnubg. Diss. Gottingen, 1911.

[9] Kolmogoroff A. *Zur Grossenortnung des Restliedes Fouriersehen Reihen differenzierbaren Functionen.* Ann. Math. 1935, **36**, 521 – 526.

[10] Lebesgue H. Sun la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipshitz. Bull. Soc. Math. De France, 1910.

Надійшло 01.01.2019

Ivasyshen S. D., Zaderei P. V., Zaderei N. M., Nefodova G. D. *On Fawar problem and problem of Kolmogorov–Nikolsky solved by V. K. Dzyadyk*, Bukovinian Math. Journal. **7**, 1 (2019), 48–55.

The article is dedicated to the 100th anniversary of the birth of the outstanding Ukrainian mathematician by Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine V.K. Dzyadyk. He obtained significant results in the theory of approximation of periodic functions. He belongs to the creation of a theory of constructive description of important classes of functions of a complex variable, the construction of approximation methods for solving differential and integral equations. The mathematical talent and organizational abilities of V.K. Dzyadyk contributed to the creation of a well-known school on the theory of approximation of functions. Among his students are such famous mathematicians as professors A. I. Stepanets, I. A. Shevchuk, V. M. Konovalov, Yu I. Melnyk, V. I. Bily and others. The article highlights two important tasks, the solution of which brought world-wide fame to the scientist. These are the Favard problem of the best approximation of functions with classes W^r with fractional r and the Kolmogorov - Nikolsky problem about the exact upper bound of the deviations of linear methods for summing Fourier series on some classes $W^r H_\omega$.