УДК 517.5

©2014 р.   М.В. Працьовитий, І.О. Савченко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

МНОЖИНА НЕПОВНИХ СУМ ЧИСЛОВОГО РЯДУ З ОДНІЄЮ НЕЛІНІЙНОЮ ВЛАСТИВІСТЮ ОДНОРІДНОСТІ

Досліджено тополого-метричні та фрактальні властивості множини E неповних сум збіжного знакододатного ряду $a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + ... = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n$, для якого виконується умова однорідності (по n) $r_n = a_n a_{n-1} ... a_{n-k+1}$, $\forall n \geq k$, де $2 \leq k$ – фіксоване натуральне число. Доведено, що арифметична сума $E \underbrace{\oplus ... \oplus}_{s \text{ разів}} E$ скінченної кількості множин E неповних сум є аномально фрактальною множиною.

The article is devoted to the investigation of metric, topological and fractal properties of the set of subsums of a numerical series $a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + ... = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n$, which satisfy the following condition of homogeneity: $r_n = a_n a_{n-1} ... a_{n-k+1}$, $\quad n \geq k$, where k is a fixed integer number, $k \geq 2$. It is proved that the arithmetic sum $E \underbrace{\oplus ... \oplus}_{s\ times} E$ of an arbitrary number of the sets E of subsums is an anomalously fractal.

1. Вступ. Розглядається збіжний знакододатний ряд

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n. \qquad (1)$$

Нехай M – підмножина множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел, вираз $\sum\limits_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n$ називається *підрядом ряду* (1), а його сума $x = x(M)$ – *неповною сумою (підсумою) ряду* (1). Очевидно, що

$$x(M) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n, \text{ де } \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M; \\ 0, & \text{якщо } n \notin M. \end{cases}$$

Множину всіх неповних сум ряду (1) позначатимемо через $E\{a_n\}$, тобто

$$E\{a_n\} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n \in M} a_n, \ M \in 2^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Усі частинні суми $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ і залишки r_n даного ряду є його неповними сумами. Очевидно, що $E\{a_n\} \subseteq [0, r_0]$.

Тополого-метричні властивості множин неповних сум рядів суттєво залежать від їх швидкості збіжності. Наступні три факти про множину $E\{a_n\}$ неповних сум ряду (1), у якого $a_n \geq a_{n+1}$ для всіх n, встановили С.Какея [4] в 1914 році (і незалежно Г.Горнич [3] в 1941):

1) $E\{a_n\}$ є досконалою множиною.

2) $E\{a_n\}$ є скінченним об'єднанням відрізків тоді й лише тоді, коли $a_n \leq r_n$ для достатньо великих n. ($E\{a_n\}$ – відрізок тоді й лише тоді, коли $a_n \leq r_n$ для всіх n.)

3) Якщо $a_n > r_n$ для достатньо великих n, то $E\{a_n\}$ є гомеоморфною класичній множині Кантора.

У тій же роботі [4] С.Какея висунув припущення, що при виконанні умови $a_n > r_n$ для нескінченної кількості n, множина $E\{a_n\}$ буде ніде не щільною (а, отже, гомеоморфною множині Кантора). Перший контрприклад навели в 1980 р. (без доведення) А.Д. Вайнштейн і Б.З. Шапіро [7]. Незалежно, Ференс [1] навів в 1984 р. інший приклад (з доведенням). Простіший приклад представили Дж. Ґутрі і Дж. Ньюман [2]:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + ... \, . \qquad (2)$$

Для цього ряду, як і у прикладах із вище наведених робіт, нерівності $a_n > r_n$ і $a_n \leq r_n$ виконуються нескінченну кількість разів. Множина неповних сум ряду (2) містить відрізок $[\frac{3}{4}, 1]$, але не є скінченним об'-

єднанням відрізків. В цій же роботі [2], автори сформулювали теорему, остаточно доведену в [5]:

Теорема 1. *Множина $E\{a_n\}$ неповних сум збіжного знакододатного ряду* (1) *є однією з наступних:*

1) скінченним об'єднанням відрізків;

2) гомеоморфною множині Кантора;

3) гомеоморфною множині T неповних сум ряду (2).

Найбільш загадковим є випадок, коли нерівності $a_n \leq r_n$ і $a_n > r_n$ виконуються для нескінченної кількості n. У такому разі множина неповних сум ряду може бути як ніде не щільною, так і може містити цілі відрізки. Про це свідчать приклади ряду (2) і ряду

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \frac{3}{4^3} + \ldots . \quad (3)$$

Множина неповних сум ряду (3) є ніде не щільною нуль-множиною Лебеґа, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\log_4 (2 + \sqrt{2}) \approx 0,8858.$$

(результат, встановлений авторами).

На сьогодні авторам невідомі необхідні і достатні умови нуль-мірності (у розумінні міри Лебега), а також ніде не щільності множини неповних сум ряду (1). Менш дослідженими є фрактальні властивості множини $E\{a_n\}$, хоча для деяких класів рядів це успішно зроблено в [6], [8]-[14]. Задача обчислення міри Лебеґа та розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум ряду в загальній постановці поки що не піддається розв'язанню, тому дослідники її розв'зують для певних класів.

у даній роботі ми цікавимось *тополого-метричними та фрактальними* властивостями множини неповних сум ряду (1), який володіє властивістю однорідності

$$r_n = a_n a_{n-1} ... a_{n-k+1}, \quad \forall n \geq k, \qquad (4)$$

де k – фіксоване натуральне число, $k \geq 2$. Його множину неповних сум позначатимемо через E.

2. Аналіз умови однорідності. Будемо казати, що ряд (1) володіє властивістю однорідності (по n), якщо існує ціле невід'ємне число g і функція f такі, що $r_n \vee f(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-g+1})$ для всіх натуральних $n \geq g$, де символ «$\vee$» означає один із знаків: «$>$», «$<$», «$\leq$», «$\geq$», «$=$».

Лема 1. *Якщо a_1, a_2, ..., a_k – додатні дійсні числа, то k-параметрична послідовність*

$$a_{n+k} = \frac{a_{n+k-1} a_{n+k-2} ... a_n}{1 + a_{n+k-1} ... a_{n+1}}, \; n = 1, 2, 3... \quad (5)$$

є нескінченно малою, а відповідний їй ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжним.

Доведення. З рівності (5) маємо

$$q_n \equiv \frac{a_{n+k}}{a_n} = \frac{a_{n+k-1} a_{n+k-2} ... a_{n+1}}{1 + a_{n+k-1} a_{n+k-2} ... a_{n+1}} < 1.$$

Тому послідовності $(a_{kn-p})_{n=1}^{\infty}$, де $p \in \{0, 1, ..., k-1\}$, є спадними. Більше того, оскільки $a_n > a_{n+k}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{a_{n+k-1} ... a_{n+1}}{1 + a_{n+k-1} ... a_{n+1}} - \frac{a_{n+2k-1} ... a_{n+k+1}}{1 + a_{n+2k-1} ... a_{n+k+1}} =$$

$$= \frac{a_{n+k-1} ... a_{n+1} - a_{n+2k-1} ... a_{n+k-1}}{(1 + a_{n+k-1} ... a_{n+1})(1 + a_{n+2k-1} ... a_{n+k+1})} =$$

$$= q_n - q_{n+k} > 0,$$

тобто, спадними є і послідовності $(q_{kn-p})_{n=1}^{\infty}$. Тоді

$$a_{k(n+1)-p} = a_{k-p} \prod_{i=1}^{n} q_{ki-p}.$$

І тому

$$a_{kn-p} \leq a_{k-p} q_{k-p}^{n-1} \to 0 \;\; (n \to \infty).$$

Отже, послідовності $(a_{kn-p})_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно малими і такою є вся послідовність (a_n). Таким чином, необхідна умова збіжності ряду виконується. Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn-p} \leq a_{k-p} \sum_{n=1}^{\infty} q_{k-p}^{n-1} =$$

$$= \frac{a_{k-p}(1 + a_{k-p+1} a_{k-p+2} ... a_{2k-p-1})}{a_{k-p+1} a_{k-p+2} ... a_{2k-p-1}},$$

то даний ряд збігається.

Теорема 1. *Для того, щоб ряд* (1) *задовольняв умову однорідності* (4), *необхідно і достатньо, щоб для його членів виконувалась рівність* (5).

Доведення. *Необхідність.* Якщо ряд збіжний і задовольняє умову однорідності (4), то для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце система

$$\begin{cases} a_{n+k-1}...a_n = r_{n+k-1} = a_{n+k} + a_{n+k+1} + \dots , \\ a_{n+k}...a_{n+1} = r_{n+k} = a_{n+k+1} + a_{n+k+2} + \dots . \end{cases}$$

Віднявши від першої рівності другу, отримаємо:

$$a_{n+k-1}...a_n - a_{n+k}...a_{n+1} = a_{n+k}, \qquad (6)$$

звідки і випливає рівність (5).

Достатність. Покажемо тепер, що з умови (5) випливає умова (4). Оскільки даний ряд збіжний (див. лему 1), то з рівності (5) маємо рівність (6). Врахувавши, що $a_{n+k} = r_{n+k-1} - r_{n+k}$, отримаємо

$$r_{n+k-1} - r_{n+k} = a_{n+k-1}...a_n - a_{n+k}...a_{n+1},$$

що рівносильно

$$r_{n+k-1} - a_{n+k-1}a_{n+k-2}...a_n =$$

$$r_{n+k} - a_{n+k}...a_{n+1}, \; n = 1, 2, 3, \dots ,$$

звідки

$$r_{n+k-1} - a_{n+k-1}...a_{n+1} =$$

$$r_{n+k-1+l} - a_{n+k-1+l}a_{n+k-1+l} = const$$

для всіх натуральних n і l. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}(r_{n+k-1} - a_{n+k-1}a_{n+k-2}...a_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} r_{n+k-1} - \lim_{n\to\infty} a_{n+k-1}a_{n+k-2}...a_n = 0,$$

то

$$r_n - a_n a_{n-1}...a_{n-k+1} = 0$$

або

$$r_n = a_n a_{n-1}...a_{n-k+1}, \quad \forall n \geq k.$$

Достатність і вся теорема доведені.

Лема 2. *Ряд* (1)*, що задовольняє умову однорідності* (4)*, має суму*

$$r_0 = a_1 + a_2 + ...a_k + a_1 a_2...a_k. \qquad (7)$$

Доведення. З рівності (4) маємо рівність

$$a_1 a_2...a_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots .$$

Додавши до обох її частин $a_1 + a_2 + ... + a_k$, отримаємо (7).

Лема 3. *Для членів ряду* (1)*, що задовольняє умову однорідності* (4)*, мають місце рівності*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \qquad (8)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{q^n} = 0, \qquad (9)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n n! = 0, \qquad (10)$$

де q – довільне дійсне число з $(0, 1)$.

Доведення. Врахувавши збіжність даного ряду та рівність (4), маємо

$$a_{n-k+1} = \frac{r_n}{a_n a_{n-1}...a_{n-k+2}} =$$

$$= \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ...}{a_n a_{n-1}...a_{n-k+2}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{n+m}}{a_n a_{n-1}...a_{n-k+2}}.$$

Останній ряд збігається при кожному $n \in \mathbb{N}$, а його сума разом з a_{n-k+1} прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_{n-k+1} = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}...a_{n-k+2}} +$$

$$+ \frac{a_{n+2}}{a_n a_{n-1}...a_{n-k+2}} + ... + \frac{a_{n+m}}{a_n a_{n-1}...a_{n-k+2}} + ...\Big) = 0,$$

тому і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+m}}{a_n a_{n-1}...a_{n-k+2}} = 0, \; m = 1, 2, 3, ...,$$

таким чином, рівність (8) доведено.

Оскільки справедлива рівність (8), то існують $n_0 \in \mathbb{N}$ та $\varepsilon > 0$ такі, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon$ або $a_{n+1} < \varepsilon a_n$. Нехай $a_{m+s} < 1$ для всіх $s = 0, 1, 2, ...$. Маємо нерівності

$$a_{m+s} < \varepsilon a_{m+s-1} < \varepsilon^2 a_{m+s-2} < ... < \varepsilon^s a_m < \varepsilon^s.$$

Отже, $a_{m+s} < \varepsilon^s$ або $a_n < \varepsilon^{n-m} = \frac{1}{\varepsilon^m}\varepsilon^n = c\varepsilon^n$, де $s = n - m$, $c = const$. Взявши $\varepsilon < q$, отримаємо рівність (9).

Доведення рівності (10) проведемо для випадку, коли в рівності (4) $k = 2$. З рівності (8) випливає існування такого номеру m, що для всіх $n \geq m$ має місце $a_{n+1} < a_n < 1$. Оцінимо члени ряду:

$$a_{m+2} = \frac{a_{m+1}a_m}{1+a_{m+1}} < a_m a_{m+1} < a_m^2,$$

$$a_{m+3} = \frac{a_{m+2}a_{m+1}}{1+a_{m+2}} < a_{m+2}a_{m+1} < a_m^3,$$

$$a_{m+4} = \frac{a_{m+3}a_{m+2}}{1+a_{m+3}} < a_{m+3}a_{m+2} < a_m^3 a_m^2 = a_m^5,$$

$$a_{m+5} = \frac{a_{m+4}a_{m+3}}{1+a_{m+4}} < a_{m+4}a_{m+3} < a_m^8, \dots .$$

Нескладно побачити, що показники степенів u_{j+1} членів $a_m^{u_{j+1}}$, якими обмежені члени a_{m+j}, утворюють класичну послідовність Фібоначчі із загальним членом

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^j - \psi^j\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 - (\frac{\psi}{\varphi})^j\right) \cdot \varphi^j \to \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^j \ (j \to \infty),$$

де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Отже, маємо

$$a_n = a_{m+j} < a_n^{\varphi^{n-m+1}} = p^{\varphi^n},$$

де $p = a_m^{\varphi^{1-m}}$ — деяке число з $(0,1)$.

Для доведення рівності (10) достатньо показати, що $\lim\limits_{n\to\infty}(p^{\varphi^n} \cdot n!) = 0$. А це випливає з того, що $n! < n^n$ при кожному $n > 2$ і того, що $\lim\limits_{n\to\infty}(p^{\varphi^n} \cdot n^n) = 0$ (більше того, ряд з членом $b_n = p^{\varphi^n} \cdot n^n$ є збіжним).

Для доведення твердження у загальному випадку ($k > 2$ в рівності (4)) можна піти тим самим шляхом. Для членів a_n даного ряду з деякого номеру m виконується нерівність $a_n < a_m^{v_j}$, де $j = n - m$, $(v_j)_{j=1}^{\infty}$ – рекурентна послідовність, кожний член якої дорівнює сумі k попередніх, тобто $v_j = v_{j-1} + v_{j-2} + \dots + v_{j-k}$ для всіх $j \leq k$. Для членів такої послідовності має місце асимптотична формула виду

$$v_j \sim c \cdot \theta^n,$$

де c, φ – сталі, $c > 0$, $\theta > \varphi$.

Наслідок 1. *Для довільного $q \in (0,1)$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $a_n < q^n$.*

3. Властивості множини E. При вивченні властивостей множини $E\{a_n\}$ неповних сум ряду (1) корисними є поняття *циліндра* та *циліндричного відрізка*.

Означення 1. Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ – фіксований впорядкований набір нулів та одиниць. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$* ($c_i \in \{0,1\}$) називається множина $\Delta'_{c_1...c_m}$, яка містить всі неповні суми ряду (1) виду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \text{ де } \varepsilon_n \in \{0,1\}.$$

Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1...c_m} = [\inf \Delta'_{c_1...c_m}, \ \sup \Delta'_{c_1...c_m}] =$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{m} c_n a_n, \ r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n a_n\right].$$

З означень випливають наступні *властивості циліндричних множин.*

$$1) \ \Delta'_{c_1...c_m} \subset \Delta_{c_1...c_m}, \ \inf \Delta_{c_1...c_m} =$$

$$= \inf \Delta'_{c_1...c_m}, \ \sup \Delta_{c_1...c_m} = \sup \Delta'_{c_1...c_m}.$$

2) $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta'_{c_1...c_m0} \cup \Delta'_{c_1...c_m1}$.

3) Діаметр циліндра не залежить від його основи, а лише від рангу:

$$d(\Delta'_{c_1...c_m}) = |\Delta_{c_1...c_m}| = r_m \to 0 \ (m \to \infty).$$

4) Для довільної послідовності (c_m) нулів та одиниць має місце

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1...c_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1...c_m} \equiv \Delta_{c_1...c_m...} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n = x \in E\{a_n\} \subseteq [0, r_0].$$

5) Для кожного натурального m має місце включення

$$E\{a_n\} \subset G_{m+1} \subset G_m, \text{ де } G_m = \bigcup_{(c_1...c_m)} \Delta_{c_1...c_m}.$$

$$6) \ E\{a_n\} = \lim_{m\to\infty} G_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{(c_1...c_m)} \Delta_{c_1...c_m}.$$

Нагадаємо означення *$\alpha-$міри Гаусдорфа* і *розмірності Гаусдорфа-Безиковича* множини $F \subset \mathbb{R}^1$, які більш тонко характеризують «масивність» множин у випадку їх нульмірності (у розумінні міри Лебеґа).

Означення 2. Нехай $0 < \alpha$ — фіксоване дійсне число, *α–мірною мірою (α–мірою) Гаусдорфа множини F* називається значення функції множини, визначені рівністю

$$\mathcal{H}^{\alpha}(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_{\varepsilon}^{\alpha}(F) = \sup_{\varepsilon > 0} m_{\varepsilon}^{\alpha}(F), \text{ де}$$

$$m_{\varepsilon}^{\alpha}(F) = \inf_{|F_j| \le \varepsilon} \left\{ \sum_j |F_j|^{\alpha} \right\}$$

і точна нижня грань визначається за всеможливими не більш ніж зчисленними покриттями множини F відрізками F_i, діаметри $|F_i|$ яких не перевищують ε.

Невід'ємне число

$$\alpha_0(F) = \sup \{\alpha : \ \mathcal{H}^{\alpha}(F) = +\infty\} =$$
$$= \inf \{\alpha : \ \mathcal{H}^{\alpha}(F) = 0\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини F.*

Розмірність Гаусдорфа-Безиковича має *властивості*:

1) Якщо $F_1 \subset F_2$, то $\alpha_0(F_1) \le \alpha_0(F_2)$;

2) $\alpha_0 \left(\bigcup\limits_i F_i \right) = \sup\limits_i \alpha_0(F_i)$.

Теорема 2. *Множина E неповних сум ряду* (1)*, що задовольняє умову однорідності* (4)*, є ніде не щільною множиною нульової міри Лебеґа і нульової розмірністі Гаусдорфа-Безиковича.*

Доведення. Розглянемо рівність (4). Оскільки $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що для всіх $n > n_0$ виконуються нерівності:

$$a_{n-1} < 1, \ a_{n-2} < 1, \ ..., \ a_{n-k} < 1,$$

а разом з ними і нерівності

$$a_{n-1} a_{n-2} ... a_{n-k} < 1 \ \text{ та } \ a_n > r_n.$$

Тому, згідно [4], множина E – ніде не щільна.

Згідно властивостей 3 і 5 циліндричних множин, множина E належить об'єднанню 2^n циліндричних відрізків рангу n діаметра r_n. Тому, враховуючи властивість 6, її міра Лебеґа

$$\lambda(E) \le \lim_{n \to \infty} 2^n r_n = \lim_{n \to \infty} 2^n a_n a_{n-1} ... a_{n-k}.$$

За наслідком 1

$$\lambda(E) \le \lim_{n \to \infty} 2^n q^n q^{n-1} ... q^{n-k+1} =$$
$$= q^{-\frac{k(k-1)}{2}} \lim_{n \to \infty} (2q^k)^n = 0,$$

де q – достатньо мале число, для якого $2q^k < 1$, отже, $\lambda(E) = 0$.

Для знаходження розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини E розглянемо її ε-покриття циліндричними відрізками рангу n, де $\varepsilon = |\Delta_{c_1 ... c_n}| = r_n$. Тоді

$$m_{\varepsilon}^{\alpha}(E) \le 2^n (r_n)^{\alpha} = 2^n (a_n a_{n-1} ... a_{n-k+1})^{\alpha} <$$
$$< 2^n (q^n q^{n-1} ... q^{n-k+1})^{\alpha} = q^{-\frac{\alpha k(k-1)}{2}} (2q^{k\alpha})^n.$$

Оскільки q є числом як завгодно малим, то $2q^{k\alpha} < 1$ і $q^{-\frac{\alpha k(k-1)}{2}} (2q^{k\alpha})^n \to 0$ $(n \to \infty)$, тому

$$\mathcal{H}^{\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_{\varepsilon}^{\alpha}(E) = 0$$

для довільного $\alpha > 0$. Отже, $\alpha_0(E) = 0$.

Теорему доведено.

Континуальні множини, які мають нульову розмірність Гаусдорфа-Безиковича називають *аномально фрактальними.*

4. Арифметині (векторні) суми множин E неповних сум.

Означення 3. *Арифметичною (векторною) сумою* множин A і B називається множина

$$C = A \oplus B = \{x : \ x = a + b, \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Добре відомим є той факт, що арифметична сума двох класичних множин Кантора C є відрізком $[0, 2]$, тобто $C \oplus C = [0, 2]$.

З'ясуємо, якою множиною буде арифметична сума двох та довільної скіченної кількості множин E неповних сум ряду (1), який володіє властивістю однорідності (4).

Нехай $(E^{(j)})_{j=1}^{s}$ – послідовність, яка складається з $s \ge 2$ однакових множин E, тобто

$$(E, E, ..., E) \equiv (E^{(j)})_{j=1}^{s}.$$

Розглянемо арифметичну суму:

$$E_s = \bigoplus_{j=1}^{s} E^{(j)}.$$

Лема 4. *Множина E_s має вигляд*

$$E_s = \left\{ x: \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n, \ \eta_n \in \{0, 1, ..., s\} \right\}.$$

Доведення. Множина $E^{(j)}$ містить всі суми виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(j)} a_n,$$

де $\varepsilon_n^{(j)} \in \{0, 1\}$, а множина E_s містить всі суми виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_n^{(j)} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n,$$

де $\eta_n = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_n^{(j)} \in \{0, 1, ..., s\} \equiv A_s$.

Для множини E_s *циліндром рангу n з основою* $d_1 d_2 ... d_n$ називатимемо множину $\Delta'_{d_1 d_2 ... d_m}$, яка містить всі суми виду

$$\sum_{i=1}^{m} d_i a_i + \sum_{i=m+1}^{\infty} \xi_i a_i, \quad \text{де} \quad \xi_i \in A_s$$

і $(d_1 d_2 ... d_m)$ – фіксований впорядкований набір чисел з множини A_s.

Циліндричним відрізком рангу n з основою $d_1, d_2, ..., d_n$ назвемо відрізок

$$\Delta_{d_1 d_2 ... d_m} = [\inf \Delta'_{d_1 d_2 ... d_m}, \sup \Delta'_{d_1 d_2 ... d_m}] =$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{m} d_n a_n, \ s r_m + \sum_{n=1}^{m} d_n a_n \right].$$

Легко бачити, що

$$\Delta'_{d_1 d_2 ... d_m} = \Delta'_{d_1 d_2 ... d_m 0} \cup ... \cup \Delta'_{d_1 d_2 ... d_m s}. \qquad (11)$$

Справедливими також є включення

$$E_s \subset U_{m+1} \subset U_m \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

і рівність

$$E_s = \lim_{m \to \infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m, \qquad (12)$$

де $U_m = \bigcup\limits_{(d_1 ... d_m)} \Delta_{d_1 ... d_m}$.

Теорема 3. *Множина E_s є аномально фрактальною множиною.*

Доведення. Згідно рівностей (11) та (12), множина E_s належить об'єднанню $(s+1)^n$ ізометричних циліндричних відрізків рангу n діаметра $s r_n$ і її міра Лебега

$$\lambda(E_s) \leq \lim_{n \to \infty} (s(s+1)^n r_n) =$$

$$= s \lim_{n \to \infty} ((s+1)^n a_n a_{n-1} ... a_{n-k+1}).$$

За наслідком 1

$$\lambda(E_s) \leq s \lim_{n \to \infty} (s+1)^n q^n q^{n-1} ... q^{n-k+1} =$$

$$= s q^{-\frac{k(k-1)}{2}} \lim_{n \to \infty} \left((s+1) q^k \right)^n = 0,$$

оскільки $(s+1) q^k < 1$, q – достатньо мале. Отже, $\lambda(E_s) = 0$.

Зрозуміло, що континуальна множина E_s нульової міри Лебега є ніде не щільною.

Для знаходження розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини E_s розглянемо її ε-покриття циліндричними відрізками рангу n, де $\varepsilon = s r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для довільного $\alpha > 0$ і довільного n маємо

$$m_\varepsilon^\alpha(E_s) = (s+1)^n (s a_n a_{n-1} ... a_{n-k+1})^\alpha \leq$$

$$\leq (s+1)^n (s q^n ... q^{n-k+1})^\alpha =$$

$$= \left(s q^{\frac{k(1-k)}{2}} \right)^\alpha \cdot \left((s+1) q^{k\alpha} \right)^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Отже,

$$\mathcal{H}^\alpha(E_s) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon^\alpha(E_s) = 0$$

для довільного $\alpha > 0$. Тому $\alpha_0(E_s) = 0$ і аномальну фрактальність множини E_s доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ferens C.* On the range of purely atomic probobility measures // Studia Math. – 1984. – **77**. – C. 261-263.

2. *Guthrie J.A., Nymann J.E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Studia Math. – 1988. – **55**, №2. – C. 323-327.

3. *Hornich H.* Über beliebige Teilsummen absolut konvergenter Reihen // Monatsh. Math. Phys. – 1941. – **49**. – C. 316-320.

4. *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series // Tôhoku Sci Rep. – 1915. – **3**, №4. – С. 159-164.

5. *Nymann J.E., Sáenz R.A.* On the paper of Guthreie and Nymann on subsums of infinite series // Colloq. Math. – 2000. – **83**. – С. 1-4.

6. *Pratsiovytyi M.V., Feshchenko O.Y.* Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series // Theory of Stochastic Processes. – 2007. – **13(29)**, №1-2. – С. 205-224.

7. *Weinstein A.D., Shapiro B.E.* On the structure of a set of $\overline{\alpha}$-representable numbers // Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika. – 1980. – **24**. – С. 8-11.

8. *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їх застосування. – К.: Наукова Думка, 2013. – 288 с.

9. *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2005. – №6. – С. 210-224.

10. *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі // Теор. ймовірност. матем. статист. – 2008. – **79**. – С. 34-49.

11. *Корсунь Н.О., Працьовитий М.В.* Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2009. – №10. – С. 28-39.

12. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М.В. Працьовитий. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – 296 с.

13. *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Доп. НАН України. – 1998. – №4. – С. 48-54.

14. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова Думка, 1992. – 208 с.