УДК 517.925

©2018 р. Н. П. Колун

Військова академія (м. Одеса)

# АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ПОВІЛЬНО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ РІЗНОГО ТИПУ В ПРАВІЙ ЧАСТИНІ

Встановлюються умови існування та асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ $P_\omega(Y_0,0)-$ розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять в правій частині суму доданків з нелінійностями різного типу.

*Ключові слова:* диференціальні рівняння другого порядку, умови існування, асимптотичні зображення, повільно змінні розв'язки.

Existence conditions and asymptotic as $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ representations are obtained for $P_\omega(Y_0,0)-$ solutions of second-order differential equations whose right-hand side contains a sum of terms with nonlinearities of different types.

*Keywords:* second-order differential equations, existence conditions, asymptotic representations, slowly variable solutions.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y), \tag{1}$$

в якому $\alpha_i \in \{-1,1\}$ $(i=\overline{1,m})$, $p_i : [a,\omega[\to ]0,+\infty[$ $(i=\overline{1,m})$ – неперервні функції, $-\infty < a < \omega \le +\infty$; $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to ]0,+\infty[$ $(i=\overline{1,m})$, де $\Delta_{Y_0}$ - однобічний окіл $Y_0$, $Y_0$ дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, є неперервними функціями при $i=\overline{1,l}$ та двічі неперервно диференційовними при $i=\overline{l+1,m}$, причому для кожного $i \in \{1,...,l\}$ при деякому $\sigma_i \in \mathbb{R}$ виконуються умови

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i} \tag{2}$$

для будь-якого $\lambda > 0$, а для кожного $i \in \{l+1,...,m\}$ –

$$\varphi_i'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \tag{3}$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) \in \{0,+\infty\}, \tag{4}$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1. \tag{5}$$

Функції $\varphi_i$ $(i=\overline{1,l})$, що задовольняють умови (2), є правильно змінними при $y \to Y_0$ функціями порядків $\sigma_i$ $(i=\overline{1,l})$ (див. монографію Є. Сенети [18], Розділ 1, §1, С.9). Для них справедливі зображення виду

$$\varphi_i(y) = \mid y \mid^{\sigma_i} L_i(y) \quad (i=\overline{1,l}), \tag{6}$$

де $L_i$ $(i=\overline{1,l})$ – повільно змінні функції при $y \to Y_0$, тобто такі, що

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{L_i(\lambda y)}{L_i(y)} = 1 \quad \text{для будь-якого} \quad \lambda > 0.$$

Із умов (3), (4) та (5) безпосередньо випливають граничні співвідношення

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} = \pm\infty \quad (i=\overline{l+1,m}), \tag{7}$$

в силу яких при $i \in \{l+1,...,m\}$ кожна з функцій $\varphi_i$ та її похідна першого порядку є швидко змінними при $y \to Y_0$ функціями (див. монографію В. Марича [14], Розділ 3, §3.4, Леми 3.2, 3.3, С.91-92).

**Означення 1.** *Розв'язок $y$ рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – розв'язком, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ і задовольняє наступні умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \tag{8}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \textit{або} & 0, \\ \textit{або} & \pm\infty, \end{cases} \tag{9}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{10}$$

Такого виду розв'язки досліджувалися в роботі В.А. Касьянової [11] у випадку, коли всі нелінійності в правій частині рівняння (1) є правильно змінними при $y \to Y_0$ функціями, та в роботах В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [7-9] для двочленного диференціального рівняння другого порядку зі швидко змінною нелінійністю в правій частині. Двочленні диференціальні рівняння з правильно змінною нелінійністю вивчалися в [12, 15-17, 19]. У роботах [3-6] були отримані необхідні та достатні умови існування, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків рівняння (1) у випадках, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ та $\lambda_0 = 1$. У [13] досліджувався випадок, коли $\lambda_0 = 0$ і в правій частині рівняння (1) головним є доданок з правильно змінною нелінійністю.

Метою цієї роботи є встановлення необхідних та достатніх умов існування $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язків $y$ диференціального рівняння (1), а також асимптотичних при $t \uparrow \omega$ зображень для таких розв'язків та їх похідних першого порядку у випадку, коли для деякого $s \in \{l+1, ..., m\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \tag{11}$$

при $i \in \{1, ..., m\} \setminus \{s\}$, тобто коли на кожному такому розв'язку рівняння (1) права частина рівняння еквівалентна при $t \uparrow \omega$ одному доданку зі швидко змінною нелінійністю.

При вивченні $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язків диференціального рівняння (1) знадобиться одне допоміжне твердження про їх апріорні асимптотичні властивості.

Введемо функцію $\pi_\omega : [a, \omega[ \longrightarrow \mathbb{R}$, вважаючи, що

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Для кожного $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язку диференціального рівняння (1)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0 \tag{12}$$

і у випадку існування (скінченої або рівної $\pm\infty$) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1. \tag{13}$$

Справедливість цього твердження безпосередньо випливає із роботи В.М. Євтухова [2] (див. наслідок 10.1).

В подальшому будемо вважати, що

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b),$$

де $\Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[$, якщо $\Delta_{Y_0}$ - лівий окіл $Y_0$ і $\Delta_{Y_0}(b) = ]Y_0, b]$, якщо $\Delta_{Y_0}$ - правий окіл $Y_0$. Число $b$ при цьому задовольняє нерівності

$$|b| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0,$$

$$b > 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty,$$

$$b < -1 \quad \text{при} \quad Y_0 = -\infty.$$

У роботі В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [9], використовуючи результати із монографії N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels [1] (Розділ 3, п.3.10, стор. 178), було показано, що двічі неперервно диференційовна функція $f : \Delta_{Y_0}(b) \to ]0, +\infty[$, що задовольняє умови

$$f'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}(b),$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} f(y) = Z_0 \in \{0, +\infty\},$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{f''(y)f(y)}{f'^2(y)} = 1$$

належить так званому класу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, який був отриманий шляхом розширення класу $\Gamma$, введеному Л. Ханом (див., наприклад, [1], Розділ 3, п.3.10, стор.175). При цьому були вказані властивості таких функцій, які будуть використані в подальшому.

Введемо два числа

$$\nu_0 = \mathrm{sign} b,$$

$$\nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ -1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0}(b) = ]Y_0, b]. \end{cases}$$

Враховуючи означення $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – розв'язку диференціального рівняння (1), зауважимо, що числа $\nu_0$ та $\nu_1$ визначають знаки будь-якого $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – розв'язку та його першої похідної (відповідно) в деякому лівому околі $\omega$. При цьому зрозуміло, що умови

$$\nu_0\nu_1=-1, \quad \text{якщо} \quad Y_0=0,$$

$$\nu_0\nu_1=1, \quad \text{якщо} \quad Y_0=\pm\infty$$

є необхідними для існування $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – розв'язків. якщо ж для таких розв'язків рівняння (1), крім того, виконуються умови (11), то $\mathrm{sign} y''(t)=\alpha_s$ в деякому лівому околі $\omega$ і при цьому

$$\nu_1\alpha_s=-1, \quad \text{якщо} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t)=0,$$

$$\nu_1\alpha_s=1, \quad \text{якщо} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t)=\pm\infty.$$

Покладемо при $s\in\{l+1,...,m\}$

$$\mu_s=\mathrm{sign}\varphi_s'(y),$$

$$H_s(y)=\int\limits_{B_s}^{y}\frac{du}{\varphi_s(u)},$$

де

$$B_s=\begin{cases} b, & \text{якщо} \quad \int\limits_b^{Y_0}\frac{dy}{\varphi_s(y)}=\pm\infty,\\ Y_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_b^{Y_0}\frac{dy}{\varphi_s(y)}=\mathrm{const}.\end{cases}$$

Так як $H_s'(y)=\frac{1}{\varphi_s(y)}>0$ при $y\in\Delta_{Y_0}(b)$, то $H_s$ зростає на $\Delta_{Y_0}(b)$ та існує обернена функція $H_s^{-1}:\Delta_{Z_s}(c_s)\to\Delta_{Y_0}(b)$, де в силу (4) та зростання $H_s^{-1}$

$$Z_s=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} H_s(y)=\begin{cases}\text{або} & 0,\\ \text{або} & +\infty,\end{cases} \qquad (14)$$

$$\Delta_{Z_s}(c_s)=\begin{cases}[c_s,Z_s[, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0}(b)=[b,Y_0[,\\ ]Z_s,c_s], & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0}(b)=]Y_0,b],\end{cases}$$

$$c_s=H_s(b).$$

В силу правила Лопіталя у формі Штольця та умови (5)

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{H_s(y)}{\frac{1}{\varphi_s'(y)}}=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\frac{1}{\varphi_s(y)}}{-\frac{\varphi_s''(y)}{\varphi_s'^2(y)}}=$$

$$=-\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\varphi_s'^2(y)}{\varphi_s''(y)\varphi_s(y)}=-1.$$

Отже

$$H_s(y)\sim-\frac{1}{\varphi_s'(y)} \quad \text{при} \quad y\to Y_0 \qquad (15)$$

і

$$\mathrm{sign}H_s(y)=-\mu_s \quad \text{при} \quad y\in\Delta_{Y_0}(b). \qquad (16)$$

Із (15) також випливає, що

$$\frac{H_s'(y)}{H_s(y)}\sim-\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)} \quad \text{при} \quad y\to Y_0, \qquad (17)$$

$$\frac{H_s''(y)H_s(y)}{H_s'^2(y)}\sim 1 \quad \text{при} \quad y\to Y_0. \qquad (18)$$

Таким чином, функція $H_s$ належить класу $\Gamma_{Y_0}(Z_s)$ і згідно з лемою 2.5 із работи В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [9] в якості доповнючої функції для $H_s$ може бути обрана одна із еквівалентних функцій

$$\frac{H_s'(y)}{H_s''(y)}\sim\frac{H_s(y)}{H_s'(y)}\sim-\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)} \quad \text{при} \quad y\to Y_0.$$

Так як

$$\lim_{z\to Z_s}\frac{z(\varphi_s(H_s^{-1}(z)))'}{\varphi_s(H_s^{-1}(z))}=-1,$$

$$\lim_{z\to Z_s}\frac{z(\varphi_s'(H_i^{-1}(z)))'}{\varphi_s'(H_s^{-1}(z))}=-1,$$

то функції $\varphi_s(H_s^{-1}(z))$ і $\varphi_s'(H_s^{-1}(z))$ є правильно змінними функціями порядку -1 при $z\to Z_s$.

В подальшому знадобляться також позначення

$$J_s(t)=\int\limits_{A_s}^{t}\pi_\omega(\tau)p_{0s}(\tau)d\tau,$$

$$J_{\varphi_s}(t)=\int\limits_{A_{\varphi_s}}^{t}p_{0s}(\tau)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(\tau)))d\tau,$$

в яких $A_s$, $A_{\varphi_s}\in\{a,\omega\}$ і обираються наступним чином

$$A_s=a, \quad \text{якщо} \quad \int\limits_a^{\omega}\pi_\omega(\tau)p_{0s}(\tau)d\tau=\pm\infty,$$

$$A_s = \omega, \quad \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega \pi_\omega(\tau) p_{0s}(\tau) d\tau < +\infty,$$

$$A_{\varphi_s} = a, \quad \text{якщо}$$

$$\int\limits_{t_{\varphi_s}}^{\omega} p_{0s}(\tau)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(\tau)))d\tau = \pm\infty,$$

$$A_{\varphi_s} = \omega, \quad \text{якщо}$$

$$\int\limits_{t_{\varphi_s}}^{\omega} p_{0s}(\tau)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(\tau)))d\tau < +\infty,$$

$$t_{\varphi_s} \in [a, \omega[.$$

Введемо також функції

$$G_s(t) = \left.\frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|_{y=H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))},$$

$$\Phi_s(t) = \left.\frac{y\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}}\right|_{y=H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))}.$$

В цих позначеннях $p_{0s} : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – неперервна функція, така, що $p_{0s}(t) \sim p_s(t)$ при $t \uparrow \omega$.

**Теорема 1.** *Нехай для деякого $s \in \{l+1, ..., m\}$ функція $p_s$ зображена у вигляді*

$$p_s(t) = p_{0s}(t)[1 + r_s(t)], \tag{19}$$

*де*

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_s(t) = 0, \tag{20}$$

*$p_{0s} : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – неперервно диференційовна функція, $r_s : [a, \omega[\to] - 1, +\infty[$ – неперервна функція, існує скінчена або рівна $\pm\infty$ границя*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{\varphi_s}(t)}{J_{\varphi_s}(t)}$$

*і для будь-якого $i \in \{l+1, ..., m\}$ виконується умова*

$$\frac{\varphi_s(y)\varphi_i'(y)}{\varphi_s'(y)\varphi_i(y)} = O(1) \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{21}$$

*Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язків, які задовольняють при $i \in \{1, ..., m\} \setminus \{s\}$ умови (11), необхідно, щоб виконувались нерівності*

$$\alpha_s \nu_1 \pi_\omega(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in ]a, \omega[, \tag{22}$$

$$\alpha_s \mu_s J_s(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in ]a, \omega[ \tag{23}$$

*та граничні співвідношення*

$$-\alpha_s \lim_{t\uparrow\omega} J_s(t) = Z_s, \tag{24}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{\varphi_s}(t)}{J_{\varphi_s}(t)} = -1, \tag{25}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega^2(t) p_{0s}(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))} = 0, \tag{26}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} = 0 \tag{27}$$

*при будь-якому $i \in \{1, ..., m\} \setminus \{s\}$. Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення*

$$y(t) = H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\left[1 + \frac{o(1)}{G_s(t)}\right], \tag{28}$$

$$y'(t) = -\alpha_s \pi_\omega(t) p_{0s}(t) \times$$
$$\times \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))[1 + o(1)]. \tag{29}$$

**Доведення.** Нехай $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ – довільний $P_\omega(Y_0, 0)$– розв'язок диференціального рівняння (1), який задовольняє при деякому $s \in \{l+1, ..., m\}$ умови (11). Тоді в силу (1), (11) і (19)

$$y''(t) \sim \alpha_s p_{0s}(t)\varphi_s(y(t)) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{30}$$

звідки зрозуміло, що

$$\text{sign} y''(t) = \alpha_s.$$

Із (13), враховуючи останню рівність, випливає справедливість нерівності (22). Крім того, має місце співвідношення

$$y''(t) \sim -\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

в силу якого із (30) випливає, що при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_s(y(t))} = -\alpha_s \pi_\omega(t) p_{0s}(t)[1 + o(1)]. \tag{31}$$

Інтегруючи співвідношення (31) на проміжку від $t_0$ до $t$, отримаємо

$$\int\limits_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{du}{\varphi_s(u)} = -\alpha_s \int\limits_{t_0}^{t} \pi_\omega(\tau) p_{0s}(\tau)[1+o(1)]\, d\tau$$

при $t \uparrow \omega$. Оскільки згідно з означенням $P_\omega(Y_0, 0)$–розв'язку $y(t) \to Y_0$ при $t \uparrow \omega$, то звідси випливає, що невласні інтеграли

$$\int\limits_{y(t_0)}^{Y_0} \frac{du}{\varphi_s(u)} \quad \text{і} \quad \int\limits_{t_0}^{\omega} \pi_\omega(\tau) p_{0s}(\tau)\, d\tau$$

збігаються або розбігаються разом. Зважаючи на цей факт та на правило вибору границь інтегрування $A_s$ та $B_s$ в раніше введених функціях $J_s$ і $H_s$, встановлене вище співвідношення може бути записане у вигляді

$$H_s(y(t)) = -\alpha_s J_s(t)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega, \quad (32)$$

звідки, враховуючи властивості (14) і (15) функції $H_s$, випливає справедливість нерівності (23) і умови (24). Крім того, із (32) знаходимо, що при $t \uparrow \omega$

$$y(t) = H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)[1+o(1)]). \quad (33)$$

Так як виконується умова (24), функція $H_s^{-1}(z)$ є повільно змінною, а $\varphi_s(H_s^{-1}(z))$ – правильно змінною порядку -1 при $z \to Z_s$, то згідно з теоремою про рівномірну збіжність для повільно змінних функцій (див., наприклад, монографію Є. Сенети [11], стор.3)

$$H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)[1+o(1)]) =$$
$$= H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega,$$
$$\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)[1+o(1)])) =$$
$$= \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Зважаючи на ці формули і (33) із (31) та (30) випливає справедливість (29) та асимптотичних при $t \uparrow \omega$ співвідношень

$$y(t) \sim H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)), \quad (34)$$

$$y''(t) \sim \alpha_s p_{0s}(t) \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))). \quad (35)$$

Інтегруючи останню з них на проміжку від $t_{\varphi_s}$ до $t$, де $t_{\varphi_s} \in [t_0, \omega[$ обрано таким, щоб $-\alpha_s J_s(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_{\varphi_s}, \omega[$, отримаємо, враховуючи ознаення $P_\omega(Y_0, 0)$–розв'язку, співвідношення виду

$$y'(t) = \alpha_s J_{\varphi_s}(t)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Звідси та із (29) випливає умова (25).

Справедливість зображення (28) безпосередньо випливає із (33) і леми 2.3 із роботи В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [9], якщо врахувати, що $H_s \in \Gamma_{Y_0}(Z_s)$ з доповнюючою функцією $g_s(y) = -\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$.

В силу сформульованих раніше апріорних властивостей $P_\omega(Y_0, 0)$– розв'язків маємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega^2(t) y''(t)}{y(t)} =$$
$$= \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} \cdot \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = 0 \cdot (-1) = 0.$$

Зважаючи на цю границю та на асимптотичні співвідношення (34) і (35), безпосередньо випливає справедливість умови (26).

Функції $\varphi_i$ $(i = \overline{1, l})$ є правильно змінними при $y \to Y_0$. $H_s^{-1}$ є повільно змінною при $z \to Z_s$, як обернена до швидко змінної функції $H_s$. Крім того, функція $z(t) = -\alpha_s J_s(t)[1+o(1)]$, враховуючи (24) і той факт, що $-\alpha_s J_s(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_{\varphi_s}, \omega[$, така, що існує $t_1 \in [t_{\varphi_s}, \omega[$, для якого $\lim_{t \uparrow \omega} z(t) = Z_s$ і $z(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_1, \omega[$. Отже, маємо

$$\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)[1+o(1)])) =$$
$$= \varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))[1+o(1)] \quad (36)$$

при $t \uparrow \omega$ $(i = \overline{1, l})$. Якщо ж $i \in \{l+1, ..., m\} \setminus \{s\}$, то кожна із функцій $\varphi_i$ задовольняє умови леми 2.5 із роботи В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [9] і у якості їх доповнюючих функцій можуть бути обрані відповідно функції $g_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{\varphi_i'(y)}$. Тоді, згідно з цією лемою, враховуючи умови $\lim\limits_{t \uparrow \omega} H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) = Y_0$, $H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) \in \Delta_{Y_0}(b)$ при $t \in [t_1, \omega[$ і (21), отримаємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\varphi_i\Big(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) + \frac{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} o(1)\Big)}{\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} =$$

$$= \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_i\Big(y+g_i(y)\frac{\varphi_i'(y)\varphi_s(y)}{\varphi_i(y)\varphi_s'(y)}o(1)\Big)}{\varphi_i(y)} =$$

$$= \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_i\Big(y+g_i(y)O(1)o(1)\Big)}{\varphi_i(y)} =$$

$$= \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_i\Big(y+g_i(y)o(1)\Big)}{\varphi_i(y)} = 1.$$

Тому при $i\in\{l+1,...,m\}\setminus\{s\}$

$$\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))+\tfrac{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}o(1)\right)=$$

$$=\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

звідки, зважаючи на (7) і (28), маємо

$$\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)[1+o(1)]))=$$
$$=\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))[1+o(1)] \tag{37}$$

при $t\uparrow\omega$ ($i=\overline{l+1,m}$).

Із (28), (36) і (37) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))[1+o(1)]}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))[1+o(1)]}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} \quad (i=\overline{1,m}).$$

Із останньої рівності та (11) випливає справедливість умов (27). Теорема доведена.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови (19)-(27) і*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_s'(t)}{J_s(t)}=\gamma_s, \quad \text{де} \quad \gamma_s\in\mathbb{R}. \tag{38}$$

*Тоді: 1) якщо $\gamma_s>0$ або $\gamma_s=0$ і $\alpha_s\mu_s=1$, то рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,0)$– розв'язків, які допускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (28), (29); 2) якщо $\gamma_s<0$ або $\gamma_s=0$ і $\alpha_s\mu_s=-1$, то при $\omega<+\infty$ рівняння (1) має двопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,0)$– розв'язків, які допускають асимптотичні при $t\uparrow\omega$ зображення (28), (29), а при $\omega=+\infty$ – щонайменш один такий розв'язок.*

**Доведення.** Враховуючи (14), (15), (16), (23) і (24), підберемо число $t_{\varphi_s}\in[a,\omega[$ так, щоб $-\alpha_s J_s(t)\in\Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t\in[t_{\varphi_s},\omega[$. При такому виборі $t_{\varphi_s}$ на проміжку $[t_{\varphi_s},\omega[$ визначена функція $J_{\varphi_s}$, а також функції

$$H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)), \quad \varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))),$$
$$\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))),$$

причому

$$\lim_{t\uparrow\omega}H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))=Y_0 \tag{39}$$

і в силу (7)

$$\lim_{t\uparrow\omega}G_s(t)=\pm\infty. \tag{40}$$

Застосовуючи до рівняння (1) перетворення

$$\begin{aligned} y(t)&=H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\left[1+\tfrac{y_1(t)}{G_s(t)}\right],\\ y'(t)&=\alpha_s J_{\varphi_s}(t)[1+y_2(t)], \end{aligned} \tag{41}$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1'=h_1(t)[1+q_1(t)-q_2(t)y_1+q_1(t)y_2],\\ y_2'=h_2(t)[y_1-y_2+R(t,y_1)+f(t,y_1)], \end{cases} \tag{42}$$

в якій

$$h_1(t)=\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))),$$

$$h_2(t)=\frac{J_{\varphi_s}'(t)}{J_{\varphi_s}(t)}, \quad q_1(t)=\frac{J_{\varphi_s}(t)}{\pi_\omega(t)J_{\varphi_s}'(t)},$$

$$q_2(t)=\left.\frac{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\right|_{y=H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))},$$

$$f(t,y_1)=(1+y_1+R(t,y_1))\times$$
$$\times(R_1(t,y_1)+r_s(t)(1+R_1(t,y_1))),$$

$$R(t,y_1)=\frac{\varphi_s(Y(t,y_1))}{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}-1-y_1,$$

$$R_1(t,y_1)=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{p_i(t)\varphi_i(Y(t,y_1))}{p_s(t)\varphi_s(Y(t,y_1))},$$

$$Y(t,y_1)=H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))+$$
$$+\frac{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}y_1.$$

Функція $R(t, y_1)$ така, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують $\delta \in ]0, 1[$ і $t_1 \in [t_{\varphi_s}, \omega[$ такі, що

$$|R(t, y_1)| \le (1 + \varepsilon)|y_1|^2$$

при $t \in [t_1, \omega[$ і $y_1 \in D_{1\delta}$, де

$$y_1 \in D_{1\delta} = \{y_1 : |y_1| \le \delta\}.$$

Обираючи довільним чином число $\varepsilon > 0$, далі систему рівнянь (42) розглянемо на множині

$$\Omega = [t_1, \omega[ \times D_{1\delta} \times D_{2\delta},$$

де

$$D_{i\delta} = \{y_i : |y_i| \le \delta\} \quad (i = 1, 2).$$

Покажемо, що функція $R_1(t, y_1)$ така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_1(t, y_1) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad y_1 \in D_{1\delta}.$$

Так як функції $\varphi_i$ при $i \in \{1, ..., l\}$ є правильно змінними при $y \to Y_0 \quad (y \in \Delta_{Y_0}(b))$ порядків $\sigma_i$, то в силу зображень (6), враховуючи властивості повільно змінних функцій і умови (40), маємо

$$\varphi_i(Y(t, y_1)) =$$
$$= \varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) \left[1 + \frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right) =$$
$$= \left|H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) \left[1 + \frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right|^{\sigma_i} \times$$
$$\times L_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) \left[1 + \frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right) =$$
$$= \left|H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) \left[1 + \frac{y_1}{G_s(t)}\right]\right|^{\sigma_i} \times$$
$$\times L_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))(1 + r_i(t, y_1)) =$$
$$= \varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))) \left[1 + \frac{y_1}{G_s(t)}\right]^{\sigma_i} \times$$
$$\times (1 + r_i(t, y_1)), \quad (i = \overline{1, l})$$

де функції $r_i(t, y_1)$ такі, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t, y_1) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad y_1 \in D_{1\delta}.$$

Оскільки функція $\varphi_s$ належить класу $\Gamma_{Y_0}(Z_s)$ і в якості її доповнюючої функції може бути обрана функція $g_s(y) = \frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$, то з леми 2.3 із роботи В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [9] отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi_s\Big(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) + \frac{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} y_1\Big)}{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} =$$
$$= \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_s\Big(y + \frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)} \cdot y_1\Big)}{\varphi_s(y)} = e^{y_1}.$$

Тому

$$\varphi_s(Y(t, y_1)) =$$
$$\varphi_s\Big(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) + \frac{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{\varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} y_1\Big) =$$
$$= e^{y_1}\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))[1 + r_s(t, y_1)]$$

при $t \uparrow \omega$, де функція $r_s(t, y_1)$ така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_s(t, y_1) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad y_1 \in D_{1\delta}.$$

В силу вищесказаного і (27) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \sum_{i=1}^{l} \frac{p_i(t)\varphi_i(Y(t, y_1))}{p_s(t)\varphi_s(Y(t, y_1))} = 0 \qquad (43)$$

рівномірно за $y_1 \in D_{1\delta}$.

Якщо ж $i \in \{l + 1, ..., m\} \setminus \{s\}$, то в силу виконання умов (21) для будь-якого $C_i > 1$ існує $t_{2i} \in [t_1, \omega[$ таке, що при $t \in [t_{2i}, \omega[$, зважаючи на монотонність функції $\varphi_i$ на проміжку $\Delta_{Y_0}(b)$

$$\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) - \frac{\varphi_i\big(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\big)}{\varphi_i'\big(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\big)} C_i|y_1|\right) \le$$
$$\le \varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) + \frac{\varphi_s\big(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\big)}{\varphi_s'\big(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\big)} y_1\right) \le$$
$$\le \varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)) + \frac{\varphi_i\big(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\big)}{\varphi_i'\big(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\big)} C_i|y_1|\right).$$

Так як функція $\varphi_i$ при $i \in \{l + 1, ..., m\}$ належить класу $\Gamma_{Y_0}(Z_i)$ і має доповнюючу функцію виду $g_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{\varphi_i'(y)}$, то, переходячи в останній нерівності до границі при $t \uparrow \omega$, враховуючи властивості функцій із класу $\Gamma_{Y_0}(Z_i)$ (див. роботу В.М. Євтухова, А.Г. Черникової [9]), отримаємо

$$e^{-C_i|y_1|} \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right) \le$$
$$\le \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_i(Y(t, y_1)) \le$$

$$\leq e^{C_i|y_1|} \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_i \left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right).$$

В силу останньої нерівності та раніше записаного зображення функції $\varphi_s(Y(t,y_1))$ для кожного $i \in \{l+1,...,m\} \setminus \{s\}$ маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)e^{-C_i|y_1|}\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right)}{p_s(t)e^{y_1}\varphi_s\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right)(1+r_s(t,y_1))} \leq$$

$$\leq \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(Y(t,y_1))}{p_s(t)\varphi_s(Y(t,y_1))} \leq$$

$$\leq \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)e^{C_i|y_1|}\varphi_i\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right)}{p_s(t)e^{y_1}\varphi_s\left(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))\right)(1+r_s(t,y_1))},$$

звідки, зважаючи на (27), випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \sum_{\substack{i=l+1\\ i\neq s}}^{m} \frac{p_i(t)\varphi_i(Y(t,y_1))}{p_s(t)\varphi_s(Y(t,y_1))} = 0$$

рівномірно за $y_1 \in D_{1\delta}$. Із останнього співвідношення і (43) маємо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_1(t,y_1) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad y_1 \in D_{1\delta}.$$

В силу (25), рівності

$$\frac{\varphi_s''(y)\varphi_s(y)}{\varphi_s'^2(y)} = \frac{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2} + 1$$

і умови (5), а також (39)

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_2(t) = 0. \tag{44}$$

Крім того, з використанням (15) і (25), маємо

$$\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \frac{\alpha_s \pi_\omega(t) J_{\varphi_s}(t) \varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} \sim$$

$$\sim \frac{\pi_\omega(t) J_{\varphi_s}(t)}{J_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} \sim \frac{J_s'(t)}{J_s(t)} \cdot \frac{J_{\varphi_s}(t)}{J_{\varphi_s}'(t)} \sim$$

$$\sim -\frac{\pi_\omega(t) J_s'(t)}{J_s(t)} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Таким чином, враховуючи (38),

$$\frac{h_1(t)}{h_2(t)} \sim -\gamma_s \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{45}$$

Тепер розглянемо окремо випадки, коли $\gamma_s \neq 0$, і коли $\gamma_s = 0$.

Для початку припустимо, що $\gamma_s \neq 0$. У цьому випадку систему (42) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} y_1' = h_2(t)\Big[(1+q_1(t))\frac{h_1(t)}{h_2(t)} - q_2(t)\frac{h_1(t)}{h_2(t)}y_1 + \\ \qquad +q_1(t)\frac{h_1(t)}{h_2(t)}y_2\Big], \\ y_2' = h_2(t)[y_1 - y_2 + R(t,y_1) + f(t,y_1)]. \end{cases}$$

Тут, в силу умов (44) і (45)

$$\lim_{t\uparrow\omega}(1+q_1(t))\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_1(t)\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \gamma_s, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_2(t)\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0.$$

Тому ця система рівнянь має вид

$$\begin{cases} y_1' = h_2(t)[F(t,y_1,y_2) + \gamma_s y_2] \\ y_2' = h_2(t)[y_1 - y_2 + R(t,y_1) + f(t,y_1)], \end{cases} \tag{46}$$

де функція $F$ така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} F(t,y_1,y_2) = 0$$

рівномірно за $y_1, y_2 \in [-\delta, \delta]$.

Характеристичне рівняння матриці коефіцієнтів, що стоять в квадратних дужках системи при $y_1$ та $y_2$, виглядає наступним чином

$$\lambda^2 + \lambda - \gamma_s = 0.$$

Це рівняння при $\gamma_s > 0$ має один додатній корінь та один від'ємний, а при $\gamma_s < 0$ – два кореня з від'ємною дійсною частиною. Крім того, враховуючи вид функції $J_{\varphi_s}$ і (25), маємо, що при $t\uparrow\omega$

$$\int_{t_0}^{t} h_2(\tau)\,d\tau = \ln|J_{\varphi_s}(\tau)|\Big|_{t_0}^{t} \to \pm\infty \tag{47}$$

і при $t \in [t_0, \omega[$

$$\mathrm{sign} h_2(t) = -\mathrm{sign}\pi_\omega(t). \tag{48}$$

Крім того, в силу раніше вказаних властивостей функцій $R$, $R_1$ та формули (20), маємо

$$\lim_{y_1\to 0} \frac{R(t,y_1)}{|y_1|} = 0 \tag{49}$$

рівномірно за $t \in [t_0, \omega[$,

$$\lim_{t\uparrow\omega} f(t,y_1) = 0 \tag{50}$$

рівномірно за $y_1 \in D_{1\delta}$.

Тим самим показано, що для системи диференціальних рівнянь (46) виконуються всі умови теореми 2.2 із роботи В.М. Євтухова, А.М. Самойленка [10]. Згідно з цією теоремою система рівнянь (46) має щонайменш один розв'язок $(y_1, y_2) : [t_*, \omega[ \to \mathbb{R}^2$ ($t_* \in [t_0, \omega[$), який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$, причому при $\gamma_s > 0$ існує однопараметрична сім'я таких розв'язків, а при $\gamma_s < 0$ і $\omega < +\infty$ – двопараметрична сім'я розв'язків, що прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Кожному із них в силу заміни (41) відповідає розв'язок $y : [t_*, \omega[ \to \mathbb{R}$ ($t_* \in [a, \omega[$) диференціального рівняння (1), який припускає асимптотичні зображення (28), (29), причому з використанням умов (23)-(25) легко впевнитись у тому, що вони є $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язками.

Таким чином, справедливість теореми 2 при $\gamma_s \neq 0$ встановлена.

Припустимо тепер, що $\gamma_s = 0$. У цьому випадку, в силу асимптотичного співвідношення (45), умови (25) і нерівності (23), маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0, \tag{51}$$

$$\int_{t_0}^{t} h_1(\tau)\, d\tau \to \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{52}$$

$$\operatorname{sign} h_1(t) = \alpha_s \mu_s \operatorname{sign} \pi_\omega(t) \tag{53}$$

при $t \in [t_0, \omega[$.

Крім того, маємо

$$h_1^{-1}(t) \left( \frac{h_1(t)}{h_2(t)} \right)' =$$

$$= \frac{1}{\alpha_s \pi_\omega(t) p_{0s}(t) \varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} \times$$

$$\times \left( \frac{\alpha_s \pi_\omega(t) J_{\varphi_s}(t) \varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))} \right)' =$$

$$= \frac{J_{\varphi_s}(t)}{\pi_\omega(t) J'_{\varphi_s}(t)} + 1 -$$

$$- \frac{\alpha_s J_s'(t) J_{\varphi_s}(t) \varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t)))}{J'_{\varphi_s}(t)} q_2(t) =$$

$$= \frac{J_{\varphi_s}(t)}{\pi_\omega(t) J'_{\varphi_s}(t)} + 1 + \frac{J_s'(t)}{J_s(t)} \frac{J_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)} \times$$

$$\times q_2(t)[1 + o(1)] \to 0 \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{54}$$

Далі, враховуючи умови (44), перепишемо систему (46) у вигляді

$$\begin{cases} y_1' = h_1(t)[F_1(t, y_1, y_2) - y_2] \\ y_2' = h_2(t)[y_1 - y_2 + R(t, y_1) + f(t, y_1)], \end{cases} \tag{55}$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} F_1(t, y_1, y_2) = 0$$

рівномірно за $y_1,\ y_2 \in [-\delta, \delta]$.

Тут коефіцієнт при $y_2$ у другому рівнянні системи (55) відмінний від нуля (дорівнює -1) і визначник постійної матриці коефіцієнтів, які стоять при $y_1$ та $y_2$ в квадратних дужках рівнянь цієї системи також відмінний від нуля (дорівнює 1). В силу цих властивостей, а також умов (47)–(54), для системи диференціальних рівнянь (55) виконані всі умови теореми 2.6 із роботи В.М. Євтухова, А.М. Самойленка [10]. Згідно з цією теоремою система диференціальних рівнянь (55) має щонайменш один розв'язок $(y_1, y_2) : [t_*, \omega[ \to \mathbb{R}^2$ ($t_* \in [t_0, \omega[$), який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$, причому при $\omega < +\infty$ існує однопараметрична сім'я таких розв'язків у випадку, коли $\alpha_s \mu_s = 1$, і двопараметрична сім'я – у випадку, коли $\alpha_s \mu_s = -1$, а при $\omega = +\infty$ у неї існує однопараметрична сім'я таких розв'язків у випадку, коли $\alpha_s \mu_s = 1$. Кожному із них в силу заміни змінних (41) і умов (23)–(25) відповідає $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язок $y : [t_0, \omega[ \to \mathbb{R}$ ($t_* \in [a, \omega[$) диференціального рівняння (1), який припускає асимптотичні зображення (28), (29). Отже, теорема 2 повністю доведена.

В подальшому разом з введеними раніше будемо використовувати також позначення

$$E_s(t) = \alpha_s \pi_\omega^2(t) p_{0s}(t) \varphi_s'(H_s^{-1}(-\alpha_s J_s(t))),$$

$$\eta_s = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{E_s(t) \Phi_s(t)}{G_s(t)},$$

$$\psi_s(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{|E_s(\tau)|^{\frac{1}{2}}}{|\pi_\omega(\tau)|} d\tau,$$

де $t_0$ – деяке число із проміжку $[a, \omega[$.

**Теорема 3.** *Нехай для деякого* $s \in \{l+1, ..., m\}$ *функція* $p_s$ *зображена у вигляді*

(19). *Нехай, крім того, виконуються умови* (20)-(27),

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'_s(t)}{J_s(t)}=\pm\infty \tag{56}$$

*та існують скінчені або рівні* $\pm\infty$ *границі*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}, \tag{57}$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\left(\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\cdot\sqrt{\left|\frac{y\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right|}, \tag{58}$$

$$\eta_s=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{E_s(t)\Phi_s(t)}{G_s(t)},\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\psi''_s(t)\psi_s(t)}{\psi'^2_s(t)}. \tag{59}$$

*Тоді: 1) якщо* $\alpha_s\mu_s=1$, *то у диференціального рівняння* (1) *існує однопараметрична сім'я* $P_\omega(Y_0,0)$ *– розв'язків з асимптотичними зображеннями* (28), (29), *причому таких, що їх похідна задовольняє асимптотичне співвідношення*

$$y'(t)=-\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))\times$$
$$\times[1+|E_s(t)|^{-\frac{1}{2}}\cdot o(1)]\quad \textit{при}\quad t\uparrow\omega; \tag{60}$$

*2) якщо* $\alpha_s\mu_s=-1$ *і виконуються умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\psi_s(t)}{E_s(t)}=0\quad \textit{при}\quad \eta_s=0\quad, \tag{61}$$

$$\eta_s\neq\frac{1}{3};\quad \lim_{t\uparrow\omega}\psi_s(t)r_s(t)=0, \tag{62}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\psi_s^2(t)\left[r_s(t)+2+\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}\right]=0, \tag{63}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\psi_s^2(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}=0, \tag{64}$$

*то у диференціального рівняння* (1) *існують* $P_\omega(Y_0,0)$*–розв'язки, які припускають асимптотичні при* $t\uparrow\omega$ *зображення*

$$y(t)=H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\left[1+\frac{o(1)}{G_s(t)\psi_s(t)}\right], \tag{65}$$

$$y'(t)=-\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))\times$$
$$\times[1+|E_s(t)|^{-\frac{1}{2}}\psi_s^{-1}(t)\cdot o(1)], \tag{66}$$

*причому у випадку, коли* $\eta_s\in(0,1/3)$ *або* $\eta_s=0$ *і* $\alpha_s\nu_1=1$, *існує двопараметрична сім'я таких розв'язків.*

**Доведення.** У роботі В.М. Євтухова та А.Г. Черникової [8] з заміною в ній функції $\varphi$ на $\varphi_s$ було показано, що якщо границі (57) та (58) існують, то

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}=-2, \tag{67}$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\left(\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\cdot\sqrt{\left|\frac{y\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right|}=0. \tag{68}$$

Крім того, в силу (15),(16) і (56) маємо

$$E_s(t)\sim-\frac{\alpha_s\pi^2_\omega(t)p_{0s}(t)}{H_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))}=$$
$$=\frac{\pi_\omega(t)J'_s(t)}{J_s(t)}\to\pm\infty\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{69}$$

Рівняння (1) за допомогою перетворення

$$\begin{aligned}&y(t)=H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t))\left[1+\tfrac{y_1(t)}{G_s(t)}\right],\\ &y'(t)=-\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\times\\ &\times\varphi_s(H_s^{-1}(-\alpha_sJ_s(t)))[1+y_2(t)]\end{aligned} \tag{70}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\left\{\begin{aligned}&y'_1=-\tfrac{E_s(t)}{\pi_\omega(t)}[q_2(t)y_1+y_2]\\ &y'_2=-\tfrac{1}{\pi_\omega(t)}\Big[r_s(t)+2+\tfrac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}+\\ &+(1+r_s(t))y_1+\Big(1+\tfrac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}\Big)y_2+\\ &+R(t,y_1)+((1+r_s(t))(1+y_1)+\\ &+R(t,y_1))R_1(t,y_1)\Big],\end{aligned}\right. \tag{71}$$

в якій функції $R$ і $R_1$ визначаються таким же чином, як і при доведенні теореми 2.

Розглянемо систему (71) на множині $\Omega$, яке визначено при доведенні попередньої теореми.

Щоб довести існування у диференціального рівняння (1) розв'язків, які допускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (28), (29), достатньо в силу заміни (70) встановити, що у системи диференціальних рівнянь (71) існують розв'язки, які прямують до нуля при $t\uparrow\omega$. Застосуємо до системи (71) наступні перетворення

$$y_1(t) = v_1(t), \quad y_2(t) = |E_s(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t) \quad (72)$$

і

$$\tau = \psi_s(t),\ v_1(t) = z_1(\tau),\ v_2(t) = z_2(\tau). \quad (73)$$

В результаті, враховуючи умову (22), отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} z_1' = c_{11}(\tau)z_1 + c_{12}(\tau)z_2 \\ z_2' = f(\tau) + c_{21}(\tau)z_1 + c_{22}(\tau)z_2 + \\ +Z_1(\tau, z_1) + Z_2(\tau, z_1), \end{cases} \quad (74)$$

в якій

$$c_{11}(\tau(t)) = \nu_1\mu_s|E_s(t)|^{\frac{1}{2}} q_2(t),$$

$$c_{12}(\tau(t)) = \nu_1\mu_s,$$

$$c_{21}(\tau(t)) = \alpha_s\nu_1(1 + r_s(t)),$$

$$c_{22}(\tau(t)) = \alpha_s\nu_1|E_s(t)|^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2}\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)} + E_s(t)q_2(t)\right],$$

$$f(\tau(t)) = \alpha_s\nu_1 \left[r_s(t) + 2 + \frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}\right],$$

$$Z_1(\tau(t), z_1) = \alpha_s\nu_1 R(t, z_1),$$

$$Z_2(\tau(t), z_1) = \alpha_s\nu_1((1+r_s(t))(1+z_1)+R(t, z_1)) \times$$

$$\times R_1(t, z_1).$$

Так як зважаючи на (69)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \int_{t_1}^{t} \frac{|E_s(\tau)|^{\frac{1}{2}}}{|\pi_\omega(\tau)|} d\tau \geq \lim_{t\uparrow\omega} \int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} =$$

$$= \left|\ln \frac{|\pi_\omega(t)|}{\pi_\omega(t_1)}\right| \to +\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

то $\tau(t) \to +\infty$ при $t \uparrow \omega$ і тому в силу (20), (67), (68), (26) і властивостей функцій $R$ і $R_1$ маємо

$$\lim_{\tau\to+\infty} f(\tau) = 0,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} c_{11}(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} c_{12}(\tau) = \nu_1\mu_s,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} c_{21}(\tau) = \alpha_s\nu_1, \quad \lim_{\tau\to+\infty} c_{22}(\tau) = 0,$$

$$|Z_1(\tau, z_1)| \leq \alpha_s\nu_1(1 + \varepsilon)|z_1|^2$$

при $\tau \in [0, +\infty[$ і $|z_1| \leq \delta$,

$$\lim_{\tau\to+\infty} Z_2(\tau, z_1) = 0$$

рівномірно за $z_1 \in [-\delta, \delta]$.

Крім того, характеристичне рівняння граничної матриці коефіцієнтів лінійної частини системи (74) має вигляд

$$\rho^2 - \alpha_s\mu_s = 0. \quad (75)$$

У випадку $\alpha_s\mu_s = 1$ коренями цього рівняння є числа $\rho_{1,2} = \pm 1$. У цьому випадку згідно з теоремою 2.2 із роботи В.М. Євтухова та А.М. Самойленка [10] система диференціальних рівнянь (74) має однопараметричну сім'ю розв'язків $(z_1, z_2) : [\tau_*, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ $(\tau_* \geq 0)$, які прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Кожному із них в силу замін (70), (70), (72), (73) відповідає $P_\omega(Y_0, 0)$ – розв'язок $y : [t_*, \omega[\to \mathbb{R}$ $(t_* \in [a, \omega[)$ диференціального рівняння (1), який припускає асимптотичні зображення (28), (60). Отже, перше твердження теореми вірне.

Нехай тепер $\alpha_s\mu_s = -1$. Тоді корні рівняння (75) є чисто уявними і тому цей випадок є "критичним". Застосовуючи до системи (74) поступово перетворення

$$z_1(\tau) = u_1(\tau),\ z_2(\tau) = \alpha(\tau)u_1(\tau) + u_2(\tau), \quad (76)$$

де

$$\alpha(\tau(t)) = \begin{cases} \frac{\alpha_s\nu_1}{\eta_s\psi_s(t)} & \text{при} \quad \eta_s \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}, \\ -\frac{1}{2|E_s(t)|^{\frac{1}{2}}} & \text{при} \quad \eta_s = 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad \eta_s = \pm\infty, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_1(\tau) &= \cos\tau w_1(\tau) - \alpha_s\nu_1 \sin\tau w_2(\tau), \\ u_2(\tau) &= \alpha_s\nu_1 \sin\tau w_1(\tau) + \cos\tau w_2(\tau), \end{aligned} \quad (77)$$

$$w_i(\tau) = \frac{x_i(\tau)}{\tau} \quad (i = 1, 2), \quad (78)$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь виду

$$x_i' = p(\tau)x_i + g(\tau)\sum_{m=1}^{2} Z_{im}(\tau, x_1, x_2) \quad (i = 1, 2),$$

в якій

$$p(\tau) = \frac{1}{2}(c_{11}(\tau) + c_{22}(\tau)) + \frac{1}{\tau}, \qquad g(\tau) = \frac{1}{\tau},$$

функції $Z_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ неперервні на множині $[\tau_0, +\infty[\times\mathbb{R}_0^2$, де $\mathbb{R}_0^2$ – деякий окіл точки (0,0), і в силу раніше вказаних властивостей

функцій $R$ і $R_1$, а також умов (62)-(64), такі, що
$$Z_{i2}(\tau,0,0)\equiv 0 \quad (i=1,2)$$
на проміжку $[\tau_0,+\infty[$,
$$\lim_{\tau\to+\infty} Z_{i1}(\tau,x_1,x_2)=0 \quad (i=1,2)$$
рівномірно за $x_1,x_2\in[-\delta,\delta]$,
$$\lim_{|x_1|+|x_2|\to 0}\frac{Z_{i2}(\tau,x_1,x_2)}{|x_1|+|x_2|}=0 \quad (i=1,2)$$
рівномірно за $\tau\in[\tau_0,+\infty[$.

Крім того, виконуються умови
$$p(\tau)\neq 0 \quad \text{при} \quad \tau\in[\tau_0,+\infty[,$$
$$\left|\int_{\tau_0}^{+\infty} p(x)\,dx\right|=+\infty,$$
$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{g(\tau)}{p(\tau)}=\frac{\eta_s}{3\eta_s-1}.$$
Тому для системи диференціальних рівнянь (74) виконуються всі умови теореми 1.2 із роботи В.М. Євтухова та А.М. Самойленка [10]. Згідно з цією теоремою система (74) має щонайменш один розв'язок $(x_1,x_2):[\tau_1,+\infty[\to\mathbb{R}^2 \quad (\tau_1\ge\tau_0)$, який прямує до нуля при $\tau\to+\infty$, причому, якщо $\eta_s\in(0,1/3)$ або $\eta_s=0$ і $\alpha_s\nu_1=1$, то існує ціла двопараметрична сім'я таких розв'язків. Кожному такому розв'язку в силу замін (72), (73), (76)–(78) відповідає розв'язок $y:[t_2,\omega[\to\mathbb{R}$ $(t_2\in[a,\omega[)$ диференціального рівняння (1) з асимптотичними зображеннями (65), (66). Теорема повністю доведена.

## Приклади

В якості прикладу, який ілюструє отримані в цій роботі результати, розглянемо диференціальне рівняння вигляду
$$y''=\alpha_1p_1(t)|y|^{\sigma_1}+\alpha_2p_2(t)e^{\sigma_2 y}, \tag{79}$$
в якому $\alpha_i\in\{-1,1\}$ $(i=1,2)$, $\sigma_1\in\mathbb{R}$, $\sigma_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $p_1:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ – неперервна функція, функція $p_2$ зображена у вигляді
$$p_2(t)=p_{02}(t)[1+r_2(t)],$$
де
$$\lim_{t\uparrow\omega} r_2(t)=0,$$
$p_{02}:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ – неперервно диференційовна функція, $r_2:[a,\omega[\to]-1,+\infty[$ – неперервна функція, $-\infty<a<\omega\le+\infty$, і опишемо асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$–розв'язків у випадку, коли $Y_0=\pm\infty$ і $\lambda_0=0$.

Для цього рівняння маємо
$$\varphi_1(y)=|y|^{\sigma_1}, \quad \varphi_2(y)=e^{\sigma_2 y},$$
$$H_2(y)=-\frac{1}{\sigma_2}e^{-\sigma_2 y}+C,$$
$$C=\begin{cases}\frac{1}{\sigma_2}e^{-\sigma_2 b}, & \text{якщо } \nu_0\sigma_2<0,\\ 0, & \text{якщо } \nu_0\sigma_2>0,\end{cases}$$
$$J_2(t)=\int_{A_2}^{t}\pi_\omega(\tau)p_{02}(\tau)d\tau,$$
$$J_{\varphi_2}(t)=\int_{A_{\varphi_2}}^{t}\frac{p_{02}(\tau)}{\sigma_2C+\alpha_2\sigma_2J_2(\tau)}d\tau,$$
$$H_2^{-1}(-\alpha_2J_2(t))=\ln|\sigma_2C+\alpha_2\sigma_2J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma_2}},$$
$$G_2(t)=\ln|\sigma_2C+\alpha_2\sigma_2J_2(t)|^{-1},$$
$$\eta_2=0, \quad E_2(t)=\frac{\pi_\omega(t)J_2'(t)}{\alpha_2C+J_2(t)},$$
$$\psi_2(t)=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{J_2'(\tau)}{\pi_\omega(\tau)(\alpha_2C+J_2(\tau))}\right|^{\frac{1}{2}}d\tau,$$
де $t_0$ – деяке число із проміжку $[a,\omega[$, а $A_2$ і $A_{\varphi_2}$ визначені перед формулюванням теореми 1 при $s=2$.

Із теорем 1, 2 і 3 маємо

**Наслідок 1.** *Нехай функція $p_2$ зображена у вигляді*
$$p_2(t)=p_{02}(t)[1+r_2(t)],$$
*де*
$$\lim_{t\uparrow\omega} r_2(t)=0,$$
$p_{02}:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ *– неперервно диференційовна функція,* $r_2:[a,\omega[\to]-1,+\infty[$ *– неперервна функція та існує скінчена або рівна* $\pm\infty$ *границя*
$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_{\varphi_2}'(t)}{J_{\varphi_2}(t)}.$$

*Для існування у диференціального рівняння (79) $P_\omega(\pm\infty, 0)$ – розв'язків, які задовольняють умову*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_1(t)|y(t)|^{\sigma_1}}{p_2(t)e^{\sigma_2 y(t)}} = 0,$$

*необхідно, щоб виконувались нерівності*

$$\alpha_2\nu_1\pi_\omega(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in ]a, \omega[, \tag{80}$$

$$\alpha_2\sigma_2 J_2(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in ]a, \omega[ \tag{81}$$

*та граничні співвідношення*

$$-\alpha_2 \lim_{t\uparrow\omega} J_2(t) = Z_2, \tag{82}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_{\varphi_2}(t)}{J_{\varphi_2}(t)} = -1, \tag{83}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_2(t)}{J_2(t)\ln|\sigma_2 J_2(t)|} = 0, \tag{84}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_1(t)J_2(t)}{p_2(t)\ln^{-1}|\sigma_2 J_2(t)|} = 0. \tag{85}$$

*Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення*

$$y(t) = \ln|\sigma_2 J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma_2}} + o(1), \tag{86}$$

$$y'(t) = -\frac{J'_2(t)[1 + o(1)]}{\sigma_2 J_2(t)}. \tag{87}$$

**Наслідок 2.** *Нехай виконуються умови* (80)–(85) *і*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_2(t)}{J_2(t)} = \gamma_2, \quad \textit{де} \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

*Тоді: 1) якщо $\gamma_2 > 0$ або $\gamma_2 = 0$ і $\alpha_2\sigma_2 > 0$, то рівняння* (79) *має однопараметричну сім'ю $P_\omega(\pm\infty, 0)$– розв'язків, які припускають асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення* (86), (87)*; 2) якщо $\gamma_2 < 0$ або $\gamma_2 = 0$ і $\alpha_2\sigma_2 < 0$, то при $\omega < +\infty$ рівняння* (79) *має двопараметричну сім'ю $P_\omega(\pm\infty, 0)$– розв'язків, які припускають асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення* (86), (87), *а при $\omega = +\infty$ – щонайменш один такий розв'язок.*

**Наслідок 3.** *Нехай виконуються умови* (80)–(85),

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_2(t)}{J_2(t)} = \pm\infty$$

*та існує скінчена або рівна $\pm\infty$ границя*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_2}(t)}{J'_{\varphi_2}(t)}.$$

*Тоді: 1) якщо $\alpha_2\sigma_2 > 0$, то у диференціального рівняння* (79) *існує однопараметрична сім'я $P_\omega(\pm\infty, 0)$ – розв'язків з асимптотичними зображеннями* (86), (87), *причому таких, що їх похідна задовольняє асимптотичне при $t \uparrow \omega$ співвідношення*

$$y'(t) = -\frac{\alpha_2\pi_\omega(t)p_{02}(t)}{\sigma_2 C + \alpha_2\sigma_2 J_2(t)}[1 + |E_2(t)|^{-\frac{1}{2}} \cdot o(1)];$$

*2) якщо $\alpha_2\sigma_2 < 0$ і виконуються умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\psi_2(t)}{E_2(t)} = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \psi_2(t)r_2(t) = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \psi_2^2(t)\left[r_2(t) + 2 + \frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_2}(t)}{J'_{\varphi_2}(t)}\right] = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\psi_2^2(t)p_1(t)J_2(t)}{p_2(t)\ln^{-1}|\sigma_2 J_2(t)|} = 0,$$

*то у диференціального рівняння* (79) *існують $P_\omega(\pm\infty, 0)$–розв'язки, які припускають асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення*

$$y(t) = \ln|\alpha_2 C + \alpha_2\sigma_2 J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma_2}} + \frac{o(1)}{\psi_2(t)},$$

$$y'(t) = -\frac{J'_2(t)[1 + |E_2(t)|^{-\frac{1}{2}}\psi_2^{-1}(t) \cdot o(1)]}{\alpha_2\sigma_2 C + \sigma_2 J_2(t)},$$

*причому таких розв'язків існує двопараметрична сім'я у випадку, коли $\alpha_2\nu_1 = 1$.*

## Висновки

Для диференціального рівняння (1) встановлено необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків при $\lambda_0 = 0$ у випадку, коли головним в правій частині рівняння (1) є доданок зі швидко змінною нелінійністю. Також знайдено асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) для таких розв'язків та їх похідних першого порядку та вирішено питання про кількість розв'язків зі знайденими зображеннями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. — Cambridge university press. Cambridge, 1987. — 494p.

2. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Дисс. . . .д. физ.-мат. наук.— Киев, 1997. — 295 с.

3. *Евтухов В.М., Колун Н.П.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно и быстро меняющимися нелинейностями //Математические методы и физико-механические поля. – 2017. – **60**, N1. – С. 32-43.

4. *Евтухов В.М., Колун Н.П.* Быстро меняющиеся решения дифференциального уравнения второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями // Український математичний вiсник. – 2018. – **15**, N1. – С. 18-42.

5. *Евтухов В.М., Колун Н.П.* Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка // Нелинейные колебания. – 2018. – **21**, N3. – С. 323-346.

6. *Evtukhov V.M., Kolun N.P.* Asymptotic Behaviour of Solutions of Second-Order Nonlinear Differential Equations // Mem. Differential Equations Math. Phys. Tbilisi : Georgian Academy of Sciences. – 2018. – **75**, P. 105-114.

7. *Евтухов В. М., Черникова А. Г.* Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Нелинейные колебания. – 2016. – **19**, N4. – С. 458-475.

8. *Евтухов В. М., Черникова А. Г.* Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Нелинейные колебания. – 2017. – **20**, N3. – С. 346-360.

9. *Евтухов В. М., Черникова А. Г.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, N10. – С. 1345-1363.

10. *Евтухов В.М., Самойленко А.М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, N1. – С. 52-80.

11. *Касьянова В.А.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, асимптотически близкими к степенным — Дисс. канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 Дифференциальные уравнения, Одесса, 2009.— 154с.

12. *Kusano T., Manojlovic J., Maric V.* Increasing solutions of Thomas-Fermi type differential equations – The sublinear case. // Bull. T. CXLIII de l'Acad. Serbe des Sci. et des Arts.–Classe des Sciences Mathematiques et Naturelles, Sciences mathematiques. – 2011. – **36**, С. 21-36.

13. *Колун Н.П.* Асимптотика медленно меняющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями // Досл. в мат. i мех. – 2018. – **23**, N2(32). – С. 54-67.

14. *Marić V.* Regular Variation and Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics 1726. — Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000. — 128 p.

15. *Manojlovic J., Marić V.* An asymptotic analysis of positive solutions of Thomas-Fermi type sublinear differential equations. // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. – 2012. – **57**, – P. 75-94.

16. *Marić V., Radasin Z.* Asymptotic behavior of solutions of the equation $y'' = f(t)\varphi(\psi(t))$. // Glasnik matematicki. –1988. – **23 (43)**, N1. – P. 27–34.

17. *Marić V., Tomić M.* Asymptotics of solutions of a generalised Thomas-Fermi equations. // J. Differ. Equat. – 1980. –**35**, N1. – P. 36–44.

18. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.

19. *Taliaferro S.D.* Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \varphi(t)f(y)$ // SIAM J. Math. Anal. –1981. –**12**, N6. – P. 853–865.

УДК 517.51


©2018 р. В. К. Маслюченко, В. С. Мельник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича


# НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ПРОМІЖНІ ФУНКЦІЇ І ХРЕСТ-ТОПОЛОГІЯ


Введено поняття нарізної пари Гана $(g,h)$ на добутку $X \times Y$ топологічних просторів і знайдено умови існування проміжної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ для кожної такої пари.



*Ключові слова:* нарізно неперервні функції, апроксимація, теорема Гана, хрест-топологія.



We introduce the notion of separate Hahn's pair $(g,h)$ on the product $X \times Y$ of topological spaces and find the conditions of existance of intermediate separately continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ for each of these pairs.



*Keywords:* separately continuous functions, approcsimation, Hahn theorem, plus-topology.


**Вступ.** Класична теорема Гана про проміжну функцію [1] твердить, що для метричного простору $X$ і напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g : X \to \mathbb{R}$ і $h : X \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \le h(x)$ на $X$, існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на $X$. Пару $(g,h)$ напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g,h : X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі $X$, таких, що $g(x) \le h(x)$ на $X$ ми називаємо [2] *парою Гана* на $X$. Функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на $X$, називається *проміжною* для пари $(g,h)$.

Ця теорема Гана у XX столітті дістала значний розвиток. Після того як Ж. Д'єдонне [3] переніс її на випадок паракомпактного простору $X$, Г. Тонґ [4,5] та М. Катетов [6,7] встановили, що для довільного $T_1$-простору $X$ існування проміжної неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ для кожної пари Гана $(g,h)$ на $X$ є характеристичною ознакою нормальності простору $X$. Це твердження ми називатимемо теоремою Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова.

В останній час з'явилися нові аналоги та модифікації теореми Гана про проміжну функцію. Так, у праці [8] було встановлено, що для кожної пари Гана $(g,h)$ на відрізку $[a,b]$, в якій функції $g$ і $h$ зростають, існує проміжна зростаюча неперервна функція. В роботі [9] досліджувалося питання про існування проміжної афінної функції $f : X \to \mathbb{R}$ на векторному просторі $X$ для опуклих відповідно вгору і вниз функцій $g$ і $h$ на $X$. Нарешті, в статті [2] вивчалося питання про існування на проміжках числової прямої проміжних кусково лінійних чи нескінченно диференційовних функцій, що задовольняють певні додаткові умови.

Аналогічно до пари Гана можна ввести поняття нарізної пари Гана $(g,h)$, в якій $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно напівнеперервна зверху функція, а $h$ — знизу, причому $g(p) \le h(p)$ на $X \times Y$. Виникає природне питання: за яких умов на простори $X$ і $Y$ для кожної нарізної пари Гана $(g,h)$ існує така нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $g(p) \le f(p) \le h(p)$ на $X \times Y$. Тут ми даємо повну відповідь на це питання, з'ясувавши, що для цього необхідно і достатньо, щоб добуток $X \times Y$, наділений так званою хрест-топологією, був нормальним. Ми наводимо також приклад нормального добутку з хрест-топологією.

**Хрест-топологія.**

Нехай $X$ і $Y$ — топологічні простори. Множина $W \subseteq X \times Y$ називається *нарізно відкритою*, якщо для кожної точки $p = (x,y) \in W$ існують околи $U$ та $V$ точок $x$ та $y$ у просторах $X$ та $Y$ відповідно, такі, що $(\{x\} \times V) \cup (U \times \{y\}) \subseteq W$. Легко перевірити, що система $\mathcal{C}$, що складається з нарізно відкритих множин, утворює топологію на добутку $X \times Y$, яка називається хрест-топологією на $X \times Y$.

Ми використовуємо звичні позначення:

$C(X,Y)$ — простір всіх неперервних функцій $f: X \to Y$ і $CC(X \times Y, Z)$ — простір нарізно неперервних функцій $f: X \times Y \to Z$. Ми позначаємо також $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ і $CC(X \times Y, \mathbb{R}) = CC(X \times Y)$ для числової прямої $\mathbb{R}$.

**Лема 1.** Нехай $X$, $Y$ і $Z$ — топологічні простори, $\mathcal{C}$ — хрест-топологія на добутку $X \times Y$ і $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$. Тоді $CC(X \times Y, Z) = C(Q, Z)$.

*Доведення.* $\subseteq$). Нехай $f \in CC(X \times Y, Z)$. Розглянемо відкриту множину $W$ у просторі $Z$, і доведемо, що $f^{-1}(W)$ — відкрита в $Q$. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in f^{-1}(W)$. Тоді $z_0 = f(p_0) = f^{x_0}(y_0) = f_{y_0}(x_0) \in W$. Оскільки $f^{x_0}$ та $f_{y_0}$ — неперервні і $W$ — відкритий окіл точки $z_0$ в $Z$, то існують окіл $U$ точки $x_0$ в $X$ та окіл $V$ точки $y_0$ в $Y$ такі, що $f^{x_0}(V) \subseteq W$ і $f_{y_0}(U) \subseteq W$. Отже, $f((\{x_0\} \times V) \cup (U \times \{y_0\})) = f^{x_0}(V) \cup f_{y_0}(U) \subseteq W$, а звідси $(\{x_0\} \times V) \cup (U \times \{y_0\}) \subseteq f^{-1}(W)$. Таким чином, маємо, що $f^{-1}(W) \in \mathcal{C}$, отже, $f \in C(Q, Z)$.

$\supseteq$). Розглянемо $f \in C(Q, Z)$ та $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Нехай $W$ — відкритий окіл точки $z_0 = f(x_0, y_0)$ в $Z$. Тоді, оскільки $f^{-1}(W) \in \mathcal{C}$ і $p_0 \in f^{-1}(W)$, то існують околи $U$ точки $x_0$ в $X$ та $V$ точки $y_0$ в $Y$, такі, що $(\{x_0\} \times V) \cup (U \times \{y_0\}) \subseteq f^{-1}(W)$. Звідси маємо, що $f^{x_0}(V) \cup f_{y_0}(U) = f((\{x_0\} \times V) \cup (U \times \{y_0\})) \subseteq W$. Таким чином, $f^{x_0}(V) \subseteq W$ і $f_{y_0}(U) \subseteq W$, що дає нам неперервність $f^{x_0}$ в точці $y_0$ та $f_{y_0}$ в точці $x_0$, отже, $f \in CC(X \times Y, Z)$.

**Напівнеперервні функції.**

**Лема 2.** Нехай $\mathcal{T}^u$ /$\mathcal{T}^l$/ — топологія на $\mathbb{R}$, що складається з множин $(-\infty, c)$ /$(c, +\infty)$/, де $-\infty \leq c \leq +\infty$, а $C^u(X)$ /$C^l(X)$/ — простір усіх напівнеперервних зверху /знизу/ функцій $f: X \to \mathbb{R}$. Тоді $C^u(X) = C(X, \mathbb{R}^u)$ /$C^l(X) = C(X, \mathbb{R}^l)$/, де $\mathbb{R}^u = (\mathbb{R}, \mathcal{T}^u)$ /$\mathbb{R}^l = (\mathbb{R}, \mathcal{T}^l)$/.

*Доведення.* $\subseteq$) Нехай $f \in C^u(X)$. Розглянемо $c \in \mathbb{R}$, і доведемо, що множина $E(f < c) = f^{-1}((-\infty, c))$ відкрита в $X$. Нехай $x_0 \in E(f < c)$, тобто $f(x_0) < c$. З напівнеперервності зверху функції $f$ легко вивести, що існує окіл $U$ точки $x_0$ в $X$, такий, що для довільного $x \in U$ виконується $f(x) < c$. Отже, $E(f < c)$ містить окіл кожної своєї точки, а значить, є відкритою множиною для кожного $c \in \mathbb{R}$. Таким чином, $f \in C(X, \mathbb{R}^l)$.

$\supseteq$) Нехай $f \in C(X, \mathbb{R}^u)$, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки множина $U = f^{-1}((-\infty, y_0 + \varepsilon))$ відкрита в $X$ і $x_0 \in U$, то $U$ — це окіл точки $x_0$ в $X$. При цьому $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ для кожного $x \in U$, отже функція $f$ напівнеперервна зверху в точці $x_0$.

Введемо наступні позначення: $C^uC^u(X \times Y)$ — простір усіх нарізно напівнеперервних зверху функцій $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, $C^lC^l(X \times Y)$ — простір усіх нарізно напівнеперервних знизу функцій $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, $C^u(T)$ — це простір напівнеперервних зверху функцій $f: T \to \mathbb{R}$, $C^l(T)$ — це простір напівнеперервних знизу функцій $f: T \to \mathbb{R}$.

**Лема 3.** Для довільних топологічних просторів $X$ та $Y$ маємо, що $C^uC^u(X \times Y) = C^u(Q)$ і $C^lC^l(X \times Y) = C^l(Q)$.

*Доведення.* Нехай $f \in C^uC^u(X \times Y)$, $x \in X$ і $y \in Y$. Оскільки $f^x \in C^u(Y)$ і $f_y \in C^u(X)$, то за лемою 2 $f^x \in C(Y, \mathbb{R}^u)$ і $f_y \in C^u(X, \mathbb{R}^u)$, звідки випливає, що $f_y \in C(X, \mathbb{R}^u)$. Таким чином, врахувавши ще й лему 1, маємо: $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R}^u) = C(Q, \mathbb{R}^u) = C^u(Q)$. Доведення в інший бік аналогічне.

**Проміжна нарізно неперервна функція.**

Пару $(g, h)$ напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g, h: X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі $X$, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на $X$ ми називаємо парою Гана на $X$. Пару $(g, h)$ функцій $g \in C^uC^u(X \times Y)$, $h \in C^lC^l(X \times Y)$ на добутку $X \times Y$, таких, що $g(p) \leq h(p)$ на $X \times Y$ ми називаємо нарізною парою Гана на $X \times Y$.

**Лема 4.** Пара $(g, h)$ функцій на добутку $X \times Y$ є нарізною парою Гана тоді і тільки тоді, коли вона є парою Гана на просторі $Q = (X \times Y, )$.

*Доведення.* Одразу випливає з леми 3, оскільки $g \in C^uC^u(X \times Y) = C^u(Q)$ та $h \in C^lC^l(X \times Y) = C^l(Q)$

**Лема 5.** Нехай $X$, $Y$ — $T_1$-простори, $\mathcal{C}$ — хрест-топологія. Тоді $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$ — $T_1$-простір.

*Доведення.* Доведемо, що одноточктова множина $\{p\}$, $p = (x, y) \in Q$, є замкненою. Нехай $q = (u, v) \in Q$ і $q \neq p$. Тоді $x \neq u$ або $y \neq v$. Припустимо, що $x \neq u$. Тоді існує відкритий окіл $U$ точки $u$, такий, що $x \notin U$. Зрозуміло, що $W = U \times Y$ — це відкритий окіл точки $q$ в $Q$, такий, що $p \notin W$. Отже, $\{p\}$ — замкнена.

**Теорема 1.** Нехай $X$ та $Y$ — $T_1$-простори. Тоді кожна нарізна пара Гана $(g, h)$ на добутку $X \times Y$ має проміжну нарізно неперервну функцію тоді і тільки тоді, коли простір $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$ є нормальним.

*Доведення.* За лемою 5 маємо, що простір $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$ — $T_1$-простір, за лемою 4 маємо, що кожна нарізна пара Гана $(g, h)$ є парою Гана на $Q$ і навпаки. Таким чином, у випадку нормального простору $Q$, за теоремою Гана-Д'єдонне-Катетова-Тонґа, існує проміжна для пари Гана $(g, h)$ неперервна функція $f$, та навпаки, з існування проміжної неперервної функції для кожної пари Гана випливає нормальність простору $Q$.

**Приклад нормальної хрест топології на добутку.**

**Теорема 2.** Нехай $T$ та $S$ — дискретні простори, $X = \alpha T = T \cup \{\infty\}$, та $Y = \alpha S = S \cup \{\infty\}$ — компактифікації Александровва цих просторів, $\mathcal{C}$ — хрест-топологія на $X \times Y$ і $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$. Тоді $Q$ — нормальний топологічний простір.

*Доведення.* Нехай $A$ і $B$ — замкнені множини в $Q$ і $A \cap B = \emptyset$. Доведемо, що існують відкриті в $Q$ множини $U$ і $V$, такі, що $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ і $U \cap V = \emptyset$.

Позначимо $w = (\infty, \infty)$. Розглянемо випадок, коли $w \in A$. Множина $H = Q \setminus B$ — це відкритий окіл точки $w$ в $Q$. Тому існують такі скінченні підмножини $T_0 = \{t_1, ..., t_n\}$ і $S_0 = \{s_1, ..., s_m\}$ множин $S$ і $T$ відповідно, що для їх доповнень $X_0 = X \setminus T_0$ та $Y_0 = Y \setminus S_0$ виконується включення $(\{\infty\} \times Y_0) \cup (X_0 \times \{\infty\}) \subseteq H$. Для $t \in T$ і $s \in S$ покладемо $p_t = (t, \infty)$ і $q_s = (\infty, s)$. Розглянемо множини $T_1 = \{t \in T_0 : p_t \in A\}$, $S_1 = \{s \in S_0 : q_s \in A\}$, $X_1 = X_0 \cup T_1$, $Y_1 = Y_0 \cup S_1$, $T_2 = \{t \in T_0 : p_t \in B\}$ і $S_2 = \{s \in S_0 : q_s \in B\}$. За побудовою $(\{\infty\} \times Y_1) \cup (X_1 \times \{\infty\}) \subseteq H$, адже $A \subseteq H$. Для довільних точок $t \in X_1$ і $s \in Y_1$ існують такі відкриті околи $V_t$ і $U_s$ точки $\infty$ у просторах $Y$ і $X$ відповідно, що $\{t\} \times V_t \subseteq H$, $U_s \times \{s\} \subseteq H$, $V_t \cap S_2 = \emptyset$ і $U_s \cap T_2 = \emptyset$. Покладемо $U' = \bigcup\limits_{t \in X_1} \{t\} \times V_t$, $U'' = \bigcup\limits_{s \in Y_1} \{s\} \times U_s$, $U''' = A \cap (T \times S)$ і $U = U' \cup U'' \cup U'''$. Легко перевірити, що множина $U$ відкрита в $Q$ і $A \subseteq U \subseteq H$.

Оскільки множина $G = Q \setminus A$ відкрита в $Q$ і $(T_2 \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times S_2) \subseteq G$, бо $B \cap A = \emptyset$, то для довільних $t \in T_2$ і $s \in S_2$ існують такі відкриті у просторах $Y$ і $X$ околи $\widetilde{V}_t$ і $\widetilde{U}_t$ точки $\infty$ відповідно, що виконуються включення $V' = \bigcup\limits_{t \in T_2} \{t\} \times \widetilde{V}_t \subseteq G$ і $V'' = \bigcup\limits_{s \in S_2} \{s\} \times \widetilde{U}_s \subseteq G$. Множини $V'$ і $V''$ будуть відкритими в $Q$, як і множина $V''' = B \cap (T \times S)$, а з ними і множина $V = V' \cup V'' \cup V'''$. При цьому $B \subseteq V$. Доведемо, що $U \cap V = \emptyset$. По перше, $U' \cap V'$ і $U'' \cap V'' = \emptyset$, адже $X_1 \cap T_2 = \emptyset$ і $Y_1 \cap S_2 = \emptyset$. Далі, $U''' \cap V''' = \emptyset$, бо $A \cap B = \emptyset$, а $U''' \subseteq A$ і $V''' \subseteq B$. Крім того, $U' \cap V'' = \emptyset$, бо $V_t \cap S_2 = \emptyset$ при $t \in X_1$, так само $V' \cap U'' = \emptyset$, бо $T_2 \cap U_s = \emptyset$ при $s \in Y_1$. Нарешті, $(U' \cup U'') \cap V''' = \emptyset$, бо $U' \cap U'' \subseteq H = Q \setminus B$, а $V''' \subseteq B$. Подібно до цього $(V' \cup V'') \cap U''' = \emptyset$, бо $V' \cap V'' \subseteq G = Q \setminus A$, а $U''' \subseteq A$. Таким чином, множини $U$ і $V$ шукані.

У випадку $w \in B$ множини $A$ і $B$ міняються місцями. Нарешті, нехай $w \notin A \cup B$. Тоді існують такі скінченні підмножини $T_0 = \{t_1, ..., t_n\}$ і $S_0 = \{s_1, ..., s_n\}$ множин $T$ і $S$ відповідно, що $(\{\infty\} \times Y_0) \cup (X_0 \times \{\infty\}) \cap A \cup B = \emptyset$, де $X_0 = X \setminus T_0$ і $Y_0 = Y \setminus S_0$. Розглянемо множини $T_1 = \{t \in T_0 : p_t = (t, \infty) \in A\}$, $T_2 = \{t \in T_0 : p_t = (t, \infty) \in B\}$, $S_1 = \{s \in S_0 : q_s = (s, \infty) \in A\}$ і $S_2 = \{s \in S_0 : q_s = (s, \infty) \in B\}$. Для кожного $t \in T_1$ існує такий відкритий окіл $V_t$ точки $\infty$ у просторі $Y$, що $\{t\} \times V_t \subseteq H = Q \setminus B$ і $V_t \cap S = \emptyset$. А для кожного $s \in S_1$ існує такий відкритий окіл $U_s$ точки $\infty$ у просторі $X$, що $U_s \times \{s\} \subseteq H$ і $U_s \cap T_2 = \emptyset$. Так само будуються відкриті околи $\widetilde{U}_s$ і $\widetilde{V}_t$ точки $\infty$ у просторах $X$ і $Y$ відповідно, що $\{t\} \times \widetilde{V}_t \subseteq G = Q \setminus A$, $\widetilde{U}_s \times \{s\} \subseteq G$,

$\widetilde{V}_t \cap S_1 = \emptyset$ і $\widetilde{U}_s \cap T_1 = \emptyset$ для довільних $t \in T_2$ і $s \in S_2$. Легко перевірити, що множини $U = (\bigcup_{t \in T_1} (\{t\} \times V_t)) \cup (\bigcup_{s \in S_1} U_s \times \{s\}) \cup (A \cap (T \times S))$ та $V = (\bigcup_{t \in T_2} (\{t\} \times \widetilde{V}_t)) \cup (\bigcup_{s \in S_2} \widetilde{U}_s \times \{s\}) \cup (B \cap (T \times S))$ будуть шуканими.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Hahn H.* Uber halbstetige und unstetige Functionen // Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien. Math. - naturwiss.Kl.Abt.IIa. — 1917. — **126**. — S.91-110.

2. *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Мельник В.С.* Існування проміжних кусково лінійних та нескінченно диференційовних функцій// Бук. мат. журн. — 2016. — **4**, №3-4. — С.93-100.

3. *Dieudonne J.* Une généralisation des espaces compacts // J. de Math. Pyres et Appl. — 1944. — **23**. — P.65-76.

4. *Tong H.* Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Bull.Amer.Math.Soc. — 1948. — **54**. — P.65.

5. *Tong H.* Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Duke Math.J. — 1952. — **19**. — P.289-292.

6. *Katetov M.* On real-valued functions in topological spaces // Fund.Math. — 1952. — **38**. — P.85-91.

7. *Katetov M.* Correction to 'On real-valued functions in topological spaces' // Fund.Math. — 1953. — **40**. — P.203-205.

8. *Маслюченко В.К., Петей С.П.* Поточкові границі неперервних монотонних функцій та функцій обмеженої варіації // Бук. мат. журн. — 2015. — **3**,№ 2. — С.64-71.

9. *Маслюченко В.К., Мельник В.С.* Теореми про проміжну афінну функцію для опуклої і вгнутої функцій // Бук. мат. журн. — 2016. — **4**,№1. — С.110-116.