УДК 511.72

©2014 р. М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ $\Delta^{\sharp}$–ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Вказуються застосування $\Delta^{\sharp}$–зображення чисел з $(0;1]$: $x = \sum_k (-1)^{k-1} 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_k} \equiv \Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$, яке є їх кодуванням засобами нескінченного алфавіту $A = \{1, 2, \ldots\}$, у теорії фрактальної розмірності, у фрактальній геометрії, метричній та ймовірнісній теоріях чисел.

We study the $\Delta^{\sharp}$-representation of numbers belonging to $(0;1]$: $x = \sum_k (-1)^{k-1} 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_k} \equiv \Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$. This is an encoding of numbers by means of infinite alphabet $A = \{1, 2, \ldots\}$. Its applications in the theory of fractal dimension, fractal geometry, metric and probabilistic theory of numbers are proposed.

Вступ. Сьогодні в математиці та її застосуваннях використовують різні моделі дійсного числа (різні системи представлення та зображення дійсних чисел). Це є особливо ефективним при дослідженні різних математичних об'єктів зі складними локальними властивостями і багатими множинами «особливостей». Одні з систем кодування дійсних чисел використовують скінченний, інші — нескінченний алфавіти. Ця робота присвячена найпростішим застосуванням одного з зображень чисел, алфавітом A якого є множина всіх натуральних чисел.

Твердження A ([1]). *Для будь-якого числа $x \in (0;1]$ існує скінченна або нескінченна послідовність натуральних чисел (a_n), така, що*

$$x = \sum_k (-1)^{k-1} 2^{1-a_1-\ldots-a_k} \equiv \Delta^{\sharp}_{a_1 \ldots a_n \ldots}. \quad (1)$$

Подання числа x у вигляді суми (1) називається його $\Delta^{\sharp}$*–представленням*, а символічний запис $\Delta^{\sharp}_{a_1 \ldots a_n \ldots}$ у випадку нескінченної суми (1) та $\Delta^{\sharp}_{a_1 \ldots a_n (0)}$ у випадку скінченного розкладу називається $\Delta^{\sharp}$-*зображенням* цього числа. При цьому число (і символ алфавіту A) $a_n = a_n(x)$ називається *n-ою цифрою (символом)* цього зображення.

Твердження B ([1]). *Для того щоб число $x \in (0,1]$ було раціональним, необхідно і достатньо, щоб його $\Delta^{\sharp}$-зображення було скінченним або періодичним.*

Твердження C ([1]). *При довільних натуральному n і наборі натуральних чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ число*

$$x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_k} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n (0)} \quad (2)$$

є раціональним числом з півінтервалу $(0; 2^{1-a_1}]$, причому, якщо $a_n = 1$, то

$$x = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-2} 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_{n-2}-a'_{n-1}} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_{n-2} a'_{n-1} (0)}, \quad (3)$$

де $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$.

Число x називається $\Delta^{\sharp}$*–раціональним*, якщо його $\Delta^{\sharp}$–зображення є скінченним.

Отже, згідно з твердженням C $\Delta^{\sharp}-$раціональне число має два $\Delta^{\sharp}-$зображення і є раціональним числом. Таким чином, $\Delta^{\sharp}-$раціональні числа утворюють зліченну підмножину множини раціональних чисел, а доповнення першої до другої — це множина чисел, що мають періодичні $\Delta^{\sharp}-$зображення. Для $\Delta^{\sharp}-$ірраціональних чисел $k-$та цифра $\Delta^{\sharp}-$зображення числа є функцією числа, що розкладається (розгортається) в ряд (1).

Представлення числа у формі (1) уперше фігурувало у роботі Г. Мінковського [2] у виразі значення сингулярної строго зростаючої функції (сьогодні так званої функції Мінковського (див., наприклад, [3–7])), яка в ірраціональних точках відрізка $[0;1]$ виражається рівністю:

$$?(x) = ?([0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) =$$
$$= 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + 2^{1-a_1-a_2-a_3} + \dots +$$
$$+(-1)^{n+1} 2^{1-a_1-\dots-a_n} + \dots,$$

де $x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \equiv [0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$–

а в раціональних точках доозначується за неперервністю і виражається скінченною сумою.

1. Задача, яка приводить до поняття $\Delta^\sharp$–зображення. Розглядяється випадкова величина ξ, представлена елементарним ланцюговим дробом:

$$\xi = [0; \eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...]$$

елементи η_n якого утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $1, 2, 3, \dots, k, \dots$ з ймовірностями $\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^k}, \dots$ відповідно. Знайдемо вираз функції розподілу F_ξ випадкової величини ξ. Оскільки згідно з означенням

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\},$$

то проаналізуємо подію $\{\xi < x\}$ і виразимо її ймовірність.

Враховуючи геометрію ланцюгового представлення (зображення) чисел, маємо

$$\{\xi < x\} = \{\eta_1 > a_1(x)\} \cup$$
$$\cup \{\eta_1 = a_1(x) \ \wedge \ \eta_2 < a_2(x)\} \cup \dots$$
$$\cup \{\eta_i = a_i(x),$$
$$\text{при}\, i = \overline{1, 2k-1} \ \wedge \ \eta_{2k} < a_{2k}(x)\} \cup$$
$$\cup \{\eta_i = a_i(x),$$
$$\text{при } i = \overline{1, 2k} \ \wedge \ \eta_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\} \cup \dots,$$

де події в правій частині рівності попарно несумісні.

Враховуючи незалежність випадкових величин η_n, знайдемо вирази ймовірностей подій, які беруть участь в останньому об'єднанні:

$$P\{\eta_1 > a_1(x)\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\eta_1 = a_1(x) + n\} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_1+n}} = \frac{1}{2^{a_1}};$$
$$P\{\eta_i = a_i(x),$$
$$\text{при } i = \overline{1, 2k-1} \ \wedge \ \eta_{2k} < a_{2k}(x)\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{2k-1} P\{\eta_i = a_i(x)\} \cdot \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} P\{\eta_{2k} = j\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{2k-1} \frac{1}{2^{a_i(x)}} \cdot \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} \frac{1}{2^j} =$$
$$= \frac{1}{2^{a_1+a_2+\dots+a_{2k-1}}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2+\dots+a_{2k}-1}};$$
$$P\{\eta_i = a_i(x),$$
$$\text{при } i = \overline{1, 2k} \ \wedge \ \eta_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{2k} P\{\eta_i = a_i(x)\} \times$$
$$\times \sum_{j=a_{2k+1}(x)+1}^{\infty} P\{\eta_{2k+1} = j\} =$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{2k} \frac{1}{2^{a_i(x)}} \right) \cdot \frac{1}{2^{a_{2k+1}}} =$$
$$= \frac{1}{2^{a_1+a_2+\dots+a_{2k}+a_{2k+1}}}.$$

Тоді

$$P\{\xi < x\} = \frac{1}{2^{a_1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{2^{a_1+a_2+\dots+a_{2k-1}}} -$$
$$\frac{1}{2^{a_1+a_2+\dots+a_{2k}-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\dots+a_{2k}+a_{2k+1}}} \Big] =$$
$$= \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3-1}} - \dots +$$
$$+ \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1+a_2+\dots+a_k-1}} + \dots = F_\xi(x).$$

Зауваження. Вираз значення функції розподілу $F_\xi(x)$ в ірраціональній точці x інтервалу $(0;1)$ є $\Delta^\sharp$–представленням. Оскільки розподіл випадкової величини ξ є неперервним, то $F_\xi(x)$ є неперервною функцією, значення якої в раціональних точках теж має відповідне $\Delta^\sharp$–зображення.

2. Геометрія $\Delta^\sharp$–зображення: циліндри та їхні властивості. Під *геометрією зображення дійсного числа* [8, с. 190] ми розуміємо геометричний зміст цифр та метричні співвідношення, ним породжені, які індукують тополого-метричні та фрактальні властивості множин чисел, визначених умовами на використання цифр (наприклад, заборонами вживати символи алфавіту або їх комбінації). Це відносно нова галузь досліджень, яка продиктована в першу чергу потребами, задачами та проблемами теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу), усвідомленою необхідністю дослідження математичних об'єктів з просторово–неоднорідною локальною структурою.

Центральними поняттями геометрії $\Delta^\sharp$–зображення дійсних чисел є поняття циліндра, напівциліндра, хвостової множини [1].

Означення. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — впорядкований набір натуральних чисел.

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$ всіх чисел $x \in (0,1]$, які мають $\Delta^\sharp$–зображення таке, що

$$a_i(x) = c_i,\ i = \overline{1,m}.$$

Внутрішність множини (циліндра) $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$ позначатимемо через $\nabla^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$.

Циліндри мають наступні властивості [1].

1. $\bigcup\limits_{c_1=1}^{\infty}\bigcup\limits_{c_2=1}^{\infty}\ldots\bigcup\limits_{c_m=1}^{\infty}\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = (0,1]$, для будь-якого натурального m;
2. $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}$;
3. $\inf \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}i} = \sup \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}(i+1)}$;
   $\sup \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_{2k}i} = \inf \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_{2k}(i+1)}$;
4. Циліндр $\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком, причому
   $$\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = [a-\delta; a],\ \text{коли } m = 2k-1, \text{ і}$$
   $$\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = [a; a+\delta],\ \text{коли } m = 2k,$$
   де $\delta = 2^{-c_1-c_2-\ldots-c_m}$,
   $$a = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}2^{1-c_1-c_2-\ldots-c_i};$$
5. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають (рівні), причому
   $$\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^\sharp_{c'_1c'_2\ldots c'_m} \Leftrightarrow c_i = c'_i \quad i = \overline{1,m};$$
6. Для довільної послідовності (c_m), $c_m \in \mathbb{N}$, переріз
   $$\bigcap_{m=1}^{\infty}\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m} = x \equiv \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$$
   є точкою півінтервала $(0;1]$.
7. Для довжини циліндра рангу m мають місце співвідношення
   $$|\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}| = \frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} \le \frac{1}{2^m} \to 0$$
   при $m \to \infty$.
8. Основне метричне відношення (наслідок властивості 7):
   $$\frac{|\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{1}{2^i}.$$

Вкажемо кілька застосувань геометрії $\Delta^\sharp$–зображення чисел.

3. Фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича і $\Delta^\sharp$–циліндри. Нагадаємо деякі теоретичні відомості з теорії фракталів [9, с. 53–56], які ми будемо використовувати далі.

Діаметр $d(E)$ множини $E \subset \mathbb{R}^1$ означується рівністю

$$d(E) \equiv \sup_{x,y\in E}|x-y|.$$

Нехай Φ — така система підмножин простору $\mathbb{R}^1$, що для довільної підмножини $E \subset \mathbb{R}^1$

і для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зліченне ε-покриття $\{E_j\}$ множини E:

$$E \subseteq \bigcup_j E_j, \; E_j \in \Phi, \; d(E_j) \leq \varepsilon.$$

Для заданої обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}^1$, довільних $\alpha > 0$ і $\varepsilon > 0$ означимо величину

$$m^\alpha_\varepsilon(E, \Phi) = \inf_{d(E_j)\leq\varepsilon} \left\{ \sum_j d^\alpha(E_j) \right\},$$

де інфімум береться за всіма не більш ніж зліченним ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Означення. Невід'ємне число або нескінченність

$$H^\alpha(E, \Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} m^\alpha_\varepsilon(E, \Phi) = \sup_{\varepsilon>0} m^\alpha_\varepsilon(E, \Phi)$$

називається *α-мірною мірою Гаусдорфа* (або *H^α-мірою Гаусдорфа*) обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}^1$ відносно сім'ї покриттів Φ.

Міра Гаусдорфа має властивості:

1) $H^\alpha\left(\bigcup\limits_i E_i, \Phi\right) \leq \sum\limits_i H^\alpha(E_i, \Phi)$;
2) Якщо $\alpha_1 < \alpha_2$, то $H^{\alpha_1}(E, \Phi) \geq H^{\alpha_2}(E, \Phi)$;
3) Якщо $H^{\alpha_1}(E, \Phi) = 0$, то $H^{\alpha_2}(E, \Phi) = 0$ при $\alpha_1 < \alpha_2$;
4) Якщо $H^{\alpha_2}(E, \Phi) = \infty$, то $H^{\alpha_1}(E, \Phi) = \infty$ при $0 < \alpha_1 < \alpha_2$.

Означення. Невід'ємне число

$$\alpha_0(E, \Phi) = \sup\{\alpha : H^\alpha(E, \Phi) = +\infty\} =$$
$$= \inf\{\alpha : H^\alpha(E, \Phi) = 0\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа–Безиковича* множини E відносно сім'ї покриттів Φ.

Зауважимо, що розмірність Гаусдорфа–Безиковича для множини з $\mathbb{R}^1$ може набувати всіх значень з $[0; 1]$ і має наступні властивості.

1) $\alpha_0(E, \Phi) = 0$ для довільної не більш ніж зліченної множини E.
2) $\alpha_0(E_1, \Phi) \leq \alpha_0(E_2, \Phi)$, якщо $E_1 \subset E_2$.
3) $\alpha_0(\bigcup\limits_n E_n, \Phi) = \sup\limits_n \alpha_0(E_n, \Phi)$.
4) Якщо E_1 і E_2 — геометрично подібні множини, то $\alpha_0(E_1, \Phi) = \alpha_0(E_2, \Phi)$.
5) Якщо Φ_1 — ширший клас множин, ніж Φ_2, то $\alpha_0(E, \Phi_1) \leq \alpha_0(E, \Phi_2)$.

Якщо Φ — сім'я всіх інтервалів або відрізків, то $\alpha_0(E, \Phi)$ ми позначаємо через $\alpha_0(E)$ і називаємо просто розмірністю Гаусдорфа–Безиковича.

Однією з традиційних задач теорії розмірності Гаусдорфа–Безиковича є задача [10–12] про те, чи достатньо класу множин Φ для того, щоб $\alpha_0(E, \Phi) = \alpha_0(E)$.

Нехай W — клас усіх зв'язних множин, що є об'єднаннями циліндрів однакового рангу, які належать одному і тому ж циліндру попереднього рангу, тобто множин вигляду

$$(1)\quad \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m}, \qquad (2)\quad \bigcup_{i=n}^{\infty} \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i},$$

$$(3)\quad \bigcup_{i=1}^{n} \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}, \qquad (4)\quad \bigcup_{i=k}^{n} \Delta^\sharp_{c_1c_2\ldots c_m i}$$

для всіх $k, m, n \in \mathbb{N}$ і наборів натуральних чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

Позначимо через W_ε клас множин з W, діаметри яких не перевищують ε.

Лема 2. *Для довільного інтервалу $u \subset (0, 1]$ існує не більше чотирьох множин з $\mathrm{W}_{|u|}$, які покривають u і мають діаметри не більші за $|u|$.*

Доведення. Нехай $u = (a, b)$. Точки a і b можуть належати: 1) різним циліндрам 1-го рангу; 2) одному циліндру 1-го рангу.

1. Нехай $a \in \Delta^\sharp_{a_1}$, $b \in \Delta^\sharp_{b_1}$, $c = \max \Delta^\sharp_{a_1}$, $d = \min \Delta^\sharp_{b_1}$. Оскільки $a < b$, то $a_1 > b_1$ і $a < d < b$.

Можливі підвипадки: 1) $a_1 - b_1 > 1$ і 2) $a_1 - b_1 = 1$.

1.1. Нехай $a_1 - b_1 > 1$. Тоді

$$(a, b) = (a, d] \cup (d, b).$$

Якщо $a = \min \Delta^\sharp_{a_1}$, то

$$[a, d] = \bigcup_{i=b_1+1}^{a_1} \Delta^\sharp_i \subset \mathrm{W}_{d-a} \subset \mathrm{W}_{b-a}.$$

Якщо $a \in \nabla^\sharp_{a_1}$, то (a,d) покривається двома множинами з W_{d-a}, а саме:

$$\Delta^\sharp_{a_1} \quad \text{і} \quad \bigcup_{j=b_1+1}^{a_1-1} \Delta^\sharp_j.$$

Таким чином, для покриття $[a,d]$ достатньо двох множин з W_{d-a}, а отже, і з W_{b-a}.

Розглянемо $[d,b]$. Якщо $b = \max \Delta^\sharp_{b_1}$, то

$$[d,b] = \Delta^\sharp_{b_1} \subset \mathrm{W}_{b-d} \subset \mathrm{W}_{b-a}.$$

Якщо $b \in \nabla^\sharp_{b_1}$, то розглянемо циліндри 2-го рангу $\Delta^\sharp_{b_1 j}$, які належать $\Delta^\sharp_{b_1}$.

Якщо $b = \max \Delta^\sharp_{b_1 n}$, то

$$[d,b] = \bigcup_{j=1}^{n} \Delta^\sharp_{b_1 j} \subset \mathrm{W}_{b-d}.$$

Якщо $b \in \nabla^\sharp_{b_1 n}$, то $[d,b]$ покривають:
а) дві множини з W_{b-a}:

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} \Delta^\sharp_{b_1 j} \quad \text{і} \quad \Delta^\sharp_{b_1 n}, \quad \text{якщо } n > 1,$$

б) одна множина $\Delta^\sharp_{b_1 1}$, якщо $n = 1$, оскільки

$$|\Delta^\sharp_{b_1 1}| < |\Delta^\sharp_{b_1+1}|, \ \ \Delta^\sharp_{b_1+1} \subset [a,b].$$

Отже, для покриття $[d,b]$ досить двох множин з W_{b-a} і не більше чотирьох множин для покриття $[a,b]$.

1.2. Нехай $a_1 - b_1 = 1$. Тоді $c = d$, $a \in \nabla^\sharp_{a_1}$.

Розглянемо $[a,d]$. Якщо $a = \min \Delta^\sharp_{a_1 k}$, то

$$[a,d] = \bigcup_{j=k}^{\infty} \Delta^\sharp_{a_1 j} \subset \mathrm{W}_{d-a} \subset \mathrm{W}_{b-a}.$$

Якщо $a \in \nabla^\sharp_{a_1 k}$, то $[a,d]$ покривається двома множинами з W_{b-a}, а саме:

$$\Delta^\sharp_{a_1 k} \quad \text{і} \quad \bigcup_{j=k+1}^{\infty} \Delta^\sharp_{a_1 j},$$

оскільки згідно з рівністю

$$|\Delta^\sharp_{c_1 c_2 \ldots c_m s}| = \sum_{j=s+1}^{\infty} |\Delta^\sharp_{c_1 c_2 \ldots c_m j}|$$

маємо $|\Delta^\sharp_{a_1 k}| = \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} |\Delta^\sharp_{a_1 j}|$.

Отже, для покриття $[a,d]$ досить двох множин з W_{b-a}.

Тепер розглянемо $[d,b]$.

Якщо $b = \max \Delta^\sharp_{b_1 n}$, то

$$[d,b] = \bigcup_{j=1}^{n} \Delta^\sharp_{b_1 j} \subset \mathrm{W}_{b-d}.$$

Якщо $b \in \nabla^\sharp_{b_1 n}$ і $n > 1$, то $[d,b]$ покривається двома множинами з W_{b-a}, а саме:

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} \Delta^\sharp_{b_1 j} \quad \text{і} \quad \Delta^\sharp_{b_1 n},$$

оскільки $|\Delta^\sharp_{b_1 n}| < |\Delta^\sharp_{b_1 1}|$, $\Delta^\sharp_{b_1 1} \subset [d,b]$.

Якщо ж $b \in \nabla^\sharp_{b_1 1}$, то розглянемо циліндри $\Delta^\sharp_{b_1 1 j}$ 3-го рангу, які належать $\Delta^\sharp_{b_1 1}$. В цьому випадку $[d,b]$ покривається не більш ніж двома множинами з W_{b-a}, а саме:
а) якщо $b = \max \Delta^\sharp_{b_1 1 s}$, то однією множиною:

$$\bigcup_{j=s}^{\infty} \Delta^\sharp_{b_1 1 j},$$

б) якщо $b \in \nabla^\sharp_{b_1 1 s}$, то двома множинами:

$$\bigcup_{j=s+1}^{\infty} \Delta^\sharp_{b_1 1 j} \quad \text{і} \quad \Delta^\sharp_{b_1 1 s},$$

оскільки довжина останньої є меншою діаметра першої. Отже, для покриття $[d,b]$ досить двох множин з W_{b-a} і чотирьох множин для покриття всього $[a,b]$.

2. Якщо a і b належать одному циліндру 1-го рангу, то існує циліндр $\Delta^\sharp_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ деякого рангу m, якому належать числа a і b, але не існує циліндра рангу $m+1$, якому б вони належали.

У випадку, коли m парне, для доведення леми досить повторити міркування випадку 1, де роль $(0,1]$ буде відігравати циліндр $\Delta^\sharp_{c_1 c_2 \ldots c_m}$.

Якщо ж m — число непарне, дійти до висновку можна аналогічними міркуваннями. При цьому числа a і b, c і d обмінюються ролями. Лему 2 доведено.

Теорема 3. *Класу множин* W *достатньо для визначення розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної борелівської множини $E \subset [0,1]$, тобто*

$$\alpha_0(E, \mathrm{W}) = \alpha_0(E). \qquad (4)$$

Доведення. З леми 2 випливає

$$m_\varepsilon^\alpha(E, \mathrm{W}) \leq 4m_\varepsilon^\alpha(E).$$

Справді, для довільного відрізка u, що бере участь в покритті E, існує не більше чотирьох множин ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 з W, для яких

$$|\omega_i|^\alpha \leq |u|^\alpha \quad \text{при довільному } \alpha \in (0,1).$$

З іншого боку,

$$m_\varepsilon^\alpha(E) \leq m_\varepsilon^\alpha(E, \mathrm{W}),$$

оскільки у визначенні $m_\varepsilon^\alpha(E)$ інфімум береться за ширшим класом покриттів, який включає і множини з W. Таким чином,

$$m_\varepsilon^\alpha(E) \leq m_\varepsilon^\alpha(E, \mathrm{W}) \leq 4m_\varepsilon^\alpha(E)$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$. Звідки перехід до границь дає

$$H^\alpha(E) \leq H^\alpha(E, \mathrm{W}) \leq 4H^\alpha(E),$$

тобто $H^\alpha(E)$ і $H^\alpha(E, \mathrm{W})$ одночасно по α набувають значень 0 та ∞. А це означає, що має місце рівність 4. Теорему 3 доведено.

4. Метричні задачі: фрактали канторівського типу.

З виразу довжини циліндра і формул для геометричної прогресії випливає наступне твердження.

Лема 3. *Для міри Лебега λ мають місце наступні рівності:*

1. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_{c_1\ldots c_m i}\right) = \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)|\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m}| =$
$= \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)\dfrac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}}$;

2. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_m i}\right) = \dfrac{1}{2^k}|\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m}| =$
$= \dfrac{1}{2^k}\dfrac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}}$;

3. $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=k+1}^{n} \Delta_{c_1\ldots c_m i}\right) = \left(1 - \dfrac{1}{2^{n-k}}\right)|\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m}| =$
$= \left(1 - \dfrac{1}{2^{n-k}}\right)\dfrac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}}$.

Теорема 4. *Множина $C \equiv C[\Delta^\sharp, V] = \{x : x = \Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\ a_n \in V \neq N\}$ є:*
1) досконала;
2) ніде не щільна;
3) має нульову міру Лебега;
4) самоподібна, якщо V — скінченна множина, і N-самоподібна, якщо V — нескінченна множина, її фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича є розв'язком рівняння

$$\sum_{v\in V}\left(\frac{1}{2^v}\right)^x = 1.$$

Доведення. 1. Нехай $x_0 = \Delta^\sharp_{c_1\ldots c_n\ldots}$ — гранична точка множини C, тобто така, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ інтервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ містить нескінченну кількість точок множини C.

Доведемо, що $x_0 \in C[\Delta^\sharp, V]$, тобто покажемо, що всі c_j належать V, $j \in \mathbb{N}$. Припустимо, що це не так, тобто існує $c_i \in \mathbb{N} \setminus V$. Тоді $x_0 \in \Delta^\sharp_{c_1\ldots c_{i-1}c_i}$. Але $\nabla^\sharp_{c_1\ldots c_{i-1}c_i} \cap C = \varnothing$ і тому $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \cap C = \varnothing$ при $\varepsilon < \dfrac{1}{2^{i+1}}$, що суперечить тому, що x_0 є граничною для C. Тобто всі $c_j \in V$ і $x_0 \in C$. Отже, C є замкненою множиною.

Тепер покажемо, що C не містить ізольованих точок. Припустимо супротивне. Нехай $x_1 = \Delta^\sharp_{c_1\ldots c_n\ldots}$ — ізольована точка множини C $(c_j \in V)$, тобто існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x_1 - \varepsilon; x_1) \cap C = \varnothing = C \cap (x_1; x_1 + \varepsilon).$$

Але, взявши m достатньо великим, а саме: $\dfrac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} < \varepsilon$, матимемо

$$\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m} \subset (x_1 - \varepsilon; x_1 + \varepsilon).$$

Тоді точка

$$x_2 = \Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m i(v)} \in C \cap (x_1 - \varepsilon; x_1 + \varepsilon),$$

де $i \in V \setminus \{c_{m+1}\}$, $v \in V$, що суперечить припущенню, оскільки $x_2 \neq x_1$.

Таким чином, множина C є замкненою і не містить ізольованих точок, тобто є досконалою.

2. Скористаємось означенням ніде не щільної множини. Для цього покажемо, що для довільного інтервалу $(a,b) \subseteq (0,1)$ існує підінтервал $(a',b') \subseteq (a,b)$, який не містить точок множини C. Не порушуючи загальності, можна вважати, що числа a і b мають нескінченні зображення. Нехай

$$a = \Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{m-1}c_m c_{m+1}\ldots},\ b = \Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{m-1}c'_m c'_{m+1}\ldots},$$

де $c_m \neq c'_m$.

1) Якщо m — число непарне, то $c_m > c'_m$ і $c_j = c'_j$ при $j < m$. Тоді

$$(a',b') = \nabla_{c_1\ldots c_{m-1}c_m[c_{m+1}+1]j},$$

де $j \in \mathbb{N} \setminus V$.

2) Якщо ж m — парне, то $c_m < c'_m$ і $c_j = c'_j$ при $j < m$. І тоді

$$(a',b') = \nabla_{c_1\ldots c_{m-1}c'_m[c'_{m+1}+1]j},$$

де $j = \mathbb{N} \setminus V$.

3. Якщо $V_1 \subseteq V_2$, то очевидно, що $C[\Delta^{\sharp}, V_1] \subset C[\sharp, V_2]$. Тоді міркування досить провести для випадку, коли множина $N \setminus V = \{u\}$ складається з одного елемента.

Нехай F_k — це об'єднання всіх циліндрів k-го рангу, серед внутрішніх точок яких є точки множини C. Тоді $C \subset F_{k+1} \subset F_k$. А отже,

$$\lambda(C) \leq \lambda(F_k) \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки

$$F_k = \bigcup_{i_1\neq u}\bigcup_{i_2\neq u}\ldots\bigcup_{i_k\neq u}\Delta_{i_1 i_2\ldots i_k}, \text{ то}$$

$$\lambda(F_k) = \sum_{i_1\neq u}\sum_{i_2\neq u}\ldots\sum_{i_k\neq u}|\Delta_{i_1 i_2\ldots i_k}| =$$

$$= \sum_{i_1\neq u}\sum_{i_2\neq u}\cdots\sum_{i_{k-1}\neq u}|\Delta_{i_1 i_2\ldots i_{k-1}}|\sum_{i_k\neq u}\frac{1}{2^{i_k}} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^u}\right)\sum_{i_1\neq u}\sum_{i_2\neq u}\cdots\sum_{i_{k-1}\neq u}|\Delta_{i_1 i_2\ldots i_{k-1}}| =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^u}\right)\sum_{i_1\neq u}\cdots\sum_{i_{k-2}\neq u}|\Delta_{i_1\ldots i_{k-2}}|\sum_{i_{k-1}\neq u}\frac{1}{2^{i_{k-1}}} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^u}\right)^2\sum_{i_1\neq u}\cdots\sum_{i_{k-2}\neq u}|\Delta_{i_1\ldots i_{k-2}}| = \ldots =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^u}\right)^{k-1}\sum_{i_1\neq u}|\Delta_{i_1}| =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^u}\right)^{k-1}\sum_{i_1\neq u}\frac{1}{2^{i_1}} = \left(1-\frac{1}{2^u}\right)^{k}.$$

Тоді $\lambda(C) \leq \lambda(F_k) = \left(1-\frac{1}{2^u}\right)^{k} \to 0$, коли $k \to \infty$. А отже, $\lambda(C) = 0$.

4. Оскільки

$$C = \bigcup_n C_n \ \text{ і } \ C \overset{2^{-c_n}}{\sim} C_n = \Delta^{\sharp}_{c_n} \cap C,$$

то множина C є самоподібною у випадку скінченного об'єднання і N-самоподібною, якщо $n \to \infty$. Її самоподібна ($N-$самоподібна) розмірність набуває значень з нескінченної множини і є розв'язком рівняння

$$\sum_{c_n \in V}\left(\frac{1}{2^{c_n}}\right)^x = 1.$$

Теорему 4 доведено.

Наслідок 1. *Якщо* $V = \mathbb{N}\backslash\{1\}$, *то* $\alpha_0(C) = \log_2\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$.

Теорема 5. *Нехай c і s — фіксовані натуральні числа. Множина*

$$C \equiv C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}] =$$

$$= \{x:\ x = \Delta^{\sharp}_{a_1\ldots a_n\ldots},\ \textit{де}\ \overline{a_n a_{n+1}} \neq \overline{cs}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Доведення. Доведемо, що $C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}]$ є ніде не щільною множиною згідно з означенням.

Нехай (a,b) — довільний інтервал, що належить $(0,1]$. Легко вказати циліндр $\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_m} \subseteq (a,b)$.

Справді, оскільки $a < b$, то існує k таке, що $a_k(a) \neq a_k(b)$, але $a_i(a) = a_i(b)$ при $i < k$. Тоді можливі випадки: 1) k – непарне; 2) k – парне.

1) $\Delta^{\sharp}_{a_1(a)\ldots a_k(a)[a_{k+1}(a)+1]} \subseteq (a,b)$, а

$\Delta^{\sharp}_{a_1(a)\ldots a_k(a)[a_{k+1}(a)+1]cs} \cap C = \varnothing.$

2) $\Delta^{\sharp}_{a_1(b)\ldots a_k(b)[a_{k+1}(b)+1]} \subseteq (a,b)$, а

$\Delta^{\sharp}_{a_1(b)\ldots a_k(b)[a_{k+1}(b)+1]cs} \cap C = \varnothing.$

Тому множина $C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}]$ є ніде не щільною за означенням.

Доведемо, що міра Лебега множини $C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}]$ рівна нулю. Можливі випадки: 1) $c = s$; 2) $c \neq s$.

Нехай $\overline{\Delta}^{\sharp}_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_m} \cap C$. Тоді у першому випадку

$$C = \left[\bigcup_{i\neq c} \overline{\Delta}^{\sharp}_{i}\right] \cup \left[\bigcup_{i\neq c} \overline{\Delta}^{\sharp}_{ci}\right].$$

У другому випадку

$$C = \left[\bigcup_{i\neq c} \overline{\Delta}^{\sharp}_{i}\right] \cup \left[\bigcup_{c\neq i\neq s} \overline{\Delta}^{\sharp}_{ci}\right] \cup \left[\bigcup_{c\neq i\neq s} \overline{\Delta}^{\sharp}_{cci}\right] \cup \ldots \cup$$

$$\cup \left[\bigcup_{c\neq i\neq s} \overline{\Delta}^{\sharp}_{\underbrace{c\ldots c}_{k}i}\right] \cup \ldots \cup \Delta^{\sharp}_{(c)}.$$

Нехай $F_0 = (0,1]$, F_{2k} — об'єднання циліндрів рангу $2k$, які містять точки множини $C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}]$,

$$\overline{F}_{2(k+1)} = F_{2k} \setminus F_{2(k+1)}. \tag{5}$$

Очевидно, що

$$F_{2k} \supseteq F_{2(k+1)} \supseteq C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}] \ \ \forall k \in N,$$

$$C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}] = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \lim_{k\to\infty} F_{2k}.$$

За неперервністю міри Лебега зверху

$$\lambda(C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}]) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k}).$$

Тоді

$$\lambda(C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}]) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})} \cdot \frac{\lambda(F_{2(k-1)})}{\lambda(F_{2(k-2)})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_0)}\right] =$$

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{m=1}^{k} \frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})}. \tag{6}$$

З (5) маємо

$$\lambda(F_{2(k+1)}) = \lambda(F_{2k}) - \lambda(\overline{F}_{2(k+1)})$$

і

$$\frac{\lambda(F_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} = 1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}.$$

Підставивши в (6) отриманий вираз, одержимо

$$\lambda(C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}]) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}).$$

Останній нескінченний добуток розбігається до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\overline{F}_{2(k+1)})/\lambda(F_{2k}) = \infty. \tag{7}$$

Знайдемо оцінки останнього відношення.

Нехай $\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}}$ — циліндр з F_{2k}. Можливі випадки: 1)$c_{2k} = c$, 2)$c_{2k} \neq c$.

Якщо $c_{2k} = c$, то

$$\nabla^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}s} \bigcap C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}] = \varnothing \quad \text{і}$$

$$\frac{|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}s}|}{|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}}|} = \frac{1}{2^s}.$$

Якщо $c_{2k} \neq c$, то

$$\nabla^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}cs} \bigcap C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}] = \varnothing \quad \text{і}$$

$$\frac{|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}cs}|}{|\Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_{2k}}|} = \frac{1}{2^{c+s}}.$$

Тому, враховуючи це, маємо

$$0 < \frac{1}{2^{c+s}} \leq \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} \leq \frac{1}{2^s} < 1.$$

Отже, ряд (7) розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності і тому $\lambda(C[\Delta^{\sharp}, \overline{cs}]) = 0$. Теорему 5 доведено.

5. Деякі задачі ймовірнісної теорії чисел. У традиційному розумінні ймовірнісна теорія чисел займається теоретико-числовими проблемами з використанням ймовірнісних засобів (моделей, прийомів та методів). Ймовірнісна теорія зображень дійсних чисел розв'язує ймовірнісні проблеми (задачі) з використанням різних систем зображення чисел. Її важливою складовою є вивчення розподілів ймовірностей на множинах дійсних чисел, визначених умовами на їх зображення у тій чи іншій системі, зокрема випадкових величин, символи (цифри) зображення яких є випадковими величинами з наперед заданими розподілами.

Використаємо $\Delta^\sharp$-зображення чисел для моделювання і дослідження розподілів випадкових величин.

Теорема 6. *Якщо випадкова величина $\tau = \Delta^\sharp_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k\ldots}$ має рівномірний на $(0,1]$ розподіл, то символи τ_k її $\Delta^\sharp$-зображення є незалежними випадковими величинами, що мають однакові розподіли*

$$P\{\tau_k = i\} = \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Доведення. Оскільки τ має рівномірний розподіл на $(0,1]$, то

1. $P\{\tau = a\} = 0$ для довільного $a \in (0,1]$;

2. $P\{\tau \in (a,b)\} = P\{\tau \in [a,b]\} = P([a,b]) = = b - a$, зокрема для довільного циліндра $\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m}$, враховуючи вираз його довжини, має місце рівність

$$P(\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m}) = |\Delta^\sharp_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_m}} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{c_i}}.$$

Скористаємось методом математичної індукції, тобто доведемо, що для довільного $k \in N$ випадкова величина τ_k не залежить від τ_j, де $j < k$ і мають місце рівності (8).

Враховуючи неперервність розподілу випадкової величини τ та властивості циліндрів, маємо

$$P\{\tau_1 = i\} = P\{\tau \in \Delta^\sharp_i\} = P(\Delta^\sharp_i) = |\Delta^\sharp_i| = \frac{1}{2^i};$$

$$P\{\tau_1 = i, \tau_2 = j\} = P\{\tau \in \Delta^\sharp_{ij}\} =$$

$$= P(\Delta^\sharp_{ij}) = |\Delta^\sharp_{ij}| = \frac{1}{2^{i+j}} = |\Delta^\sharp_i| \cdot |\Delta^\sharp_j| =$$

$$= P(\Delta^\sharp_i) P(\Delta^\sharp_j) = P\{\tau_1 = i\} \cdot P\{\tau_2 = j\} = \frac{1}{2^{i+j}};$$

$$P\{\tau_2 = i\} = P\{\tau \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta^\sharp_{ji}\} = P(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta^\sharp_{ji}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta^\sharp_{ji}| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^i}.$$

Аналогічно,

$$P\{\tau_{k+1} = i\} = P\{\tau \in \bigcup_{j_1=1}^{\infty} \ldots \bigcup_{j_k=1}^{\infty} \Delta^\sharp_{j_1\ldots j_k i}\} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{j_k=1}^{\infty} |\Delta^\sharp_{j_1\ldots j_k i}| =$$

$$= \frac{1}{2^i} \sum_{j_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{j_k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j_1+j_2+\ldots+j_k}} = \frac{1}{2^i}.$$

Оскільки остання ймовірність не залежить від k, а лише від i, то τ_k є незалежними і однаково розподіленими. Теорему доведено.

Теорема 7. *Якщо символи ξ_k $\Delta^\sharp-$зображення випадкової величини*

$$\xi = \Delta^\sharp_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$$

є незалежними випадковими величинами, які набувають значень $1, 2, \ldots, i, \ldots$ з ймовірностями $p_{1k}, p_{2k}, \ldots p_{ik}, \ldots$ відповідно ($p_{1k} + \ldots + p_{ik} + \ldots = 1, \quad k \in \mathbb{N}$), то розподіл ξ є або чисто дискретним, або чисто неперервним (неатомарним), причому чисто дискретним — тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0.$$

Точковий спектр (множина атомів) дискретно розподіленої випадкової величини ξ складаєтьcя з точки x_0 такої, що

$$p_{a_j(x_0)j} = \max_i \{p_{ik}\},$$

і всіх точок x, які мають властивість $p_{a_j(x)j} > 0$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ і існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $a_j(x) = a_j(x_0)$ при $j \geq m$.

Доведення. Зауважимо, що випадкова величина ξ не набуває значень з множини точок, які мають скінченні $\Delta^\sharp-$зображення. Тому у подальших міркуваннях ми нехтуємо точками цієї множини. А решта точок $(0;1]$ мають єдине $\Delta^\sharp-$зображення.

З незалежності ξ_k і єдиності $\Delta^\sharp$-зображення випливає, що

$$P\{\xi = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{c_k k},$$

тобто $\quad P\{\xi = x\} = \prod\limits_{j=1}^{\infty} p_{a_j(x)j}$.

Спочатку доведемо *необхідність*: якщо $M > 0$, то розподіл ξ є чисто дискретним. Оскільки $P\{\xi = x_0\} = M$, то $P\{\xi = x_0\} > 0$.

Якщо $p_{a_k(x')k} > 0$ для будь-якого $k \in N$ і $\Delta^{\sharp}$–зображення точки x' відрізняється від зображення точки x_0 не більше, ніж першими $(m-1)$ $\Delta^{\sharp}$–символами, то

$$P\{\xi = x'\} = \prod_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x_0)k} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{a_k(x_0)k}}.$$

Нехай A_m — множина всіх точок x', $\Delta^{\sharp}$-символи яких співпадають з $\Delta^{\sharp}$-символами точки x_0, починаючи з m. Тоді послідовність множин A_m має властивості:

1. $\{x_0\} = A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_m \subset A_{m+1} \subset \ldots$;
2. $P\{\xi \in A_m\} =$

$$= \sum_{a_1 \in N} \cdots \sum_{a_{m-1} \in N} \left(\prod_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{a_k(x_0)k}} \right) =$$

$$= \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{a_k(x_0)k}} \to 1, \text{ коли } m \to \infty.$$

Отже, зліченна множина

$$A = \lim_{m\to\infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

є носієм розподілу випадкової величини ξ, тобто розподіл є дискретним.

Достатність. Якщо ξ має дискретний розподіл, то існує x' таке, що

$$0 < P\{\xi = x'\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x')k} \le \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = M,$$

тобто $M > 0$. Теорему 7 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Працьовитий М. В., Ісаєва Т. М.* Кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і основою 2 // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — **№ 15.** — С. 6-23.

2. *Minkowski H.* Gesammeine Abhandlungen. — Berlin, 1911. — **Vol. 2.** — P. 50-51.

3. *Paradis J., Viader P., Bibiloni L.* The derivative of Minkowski's $?(x)$ function // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — **Vol. 253.** — P. 107-125.

4. *Alkauskas G.* Semi–regular continued fractions and an exact formula for the moments of the Minkowski question mark function // Ramanujan J. — 2011. — **Vol. 25**, no. 3. — P. 359-367.

5. *Dushistova A. A., Kan I. D., Moshchevitin N. G.* Differentiability of the Minkowski Question mark function // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — **Vol. 401**, no. 2. — P. 774-794.

6. *Працьовитий М. В., Калашніков А. В., Безбородов В. К.* Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2010. — **№ 11.** — С. 207-213.

7. *Калашніков А. В., Працьовитий М. В.* Сингулярність функцій однопараметричного класу, який містить функцію Мінковського // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2011. — **№ 12.** — С. 59-65.

8. *Працьовитий М.В.* Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — **№ 14.** — С. 189-216.

9. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

10. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. — М. : Мир, 1969. — 238 с.

11. *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їхні застосування. — Київ : Наукова думка, 2013. — 268 с.

12. *Працьовитий М. В., Задніпряний М. В.* Геометрія і основи метричної теорії зображення дійсних чисел рядами Сільвестера // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2011. — **№ 12.** — С. 65-73.