

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗАСТОСОВНІСТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ВІДНОСНО Q -ПОХІДНОЇ

Одержано необхідні та достатні умови застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно q -похідної до просторів функцій, аналітичних в кругових областях.

We obtain necessary and sufficient conditions for the applicability of differential operators of infinite order with respect to the q -derivative to the spaces of analytic functions in circular domains.

Нехай q – довільне фіксоване комплексне число, яке відмінне від 1. q -похідною функції f називається функція $(D_q f)(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{qz - z}$. q -похідна є певним різницеvim аналогом звичайної похідної, причому $\lim_{q \rightarrow 1} (D_q f)(z) = f'(z)$. Поняття q -похідної визначене в праці [1] і тому цю похідну іноді називають також похідною Джексона. Починаючи з 80-х років минулого століття значно активізувалися дослідження властивостей q -похідної та її застосувань у різних розділах математики [2].

Через A_R , $0 < R \leq \infty$, позначимо простір усіх аналітичних в крузі $|z| < R$ функцій, що наділений топологією компактної збіжності. При $|q| > 1$ оператор D_q лінійно та неперервно діє в просторі цілих функцій A_∞ , а при $|q| < 1$ – в просторах A_R , де $0 < R \leq \infty$. Нехай $(\psi_n(z))_{n=0}^\infty$ – послідовність функцій з простору A_R . В цій статті вивчаються умови застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно q -похідної виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) (D_q^n f)(z) \quad (1)$$

до простору A_R . Нагадаємо [3],[4], що оператор нескінченного порядку (1) називається застосовним до простору A_R , якщо для довільної функції $f \in A_R$ ряд (1) збігається за топологією простору A_R . Оператор D_q є частинним випадком оператора узагальненого диференціювання. Нехай $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ – послідовність ненульових комплексних чисел. Опе-

ратор узагальненого диференціювання D_α діє на степені z за правилом: $D_\alpha z^n = \frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n} z^{n-1}$, $n \geq 1$ і $D_\alpha 1 = 0$. В [4], [5] вивчені умови застосовності до простору A_R диференціальних операторів нескінченного порядку виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) (D_\alpha^n f)(z). \quad (2)$$

Зокрема, в [4] доведене наступне твердження.

Теорема А [4]. *Нехай оператор узагальненого диференціювання D_α лінійно та неперервно діє в просторі A_R . Для того, щоб диференціальний оператор нескінченного порядку (2) був застосовним до простору A_R необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall r_2 < R \exists r_1 < R \exists C > 0 \forall n = 0, 1, \dots \forall k \geq n$$

$$\|\psi_n\|_{r_2} \leq C \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k-n}|} \frac{r_1^k}{r_2^{k-n}}. \quad (3)$$

Тут $\|f\|_r = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$ для $f \in A_R$ і $0 < r < R$. Оскільки $D_q z^n = [n]_q z^{n-1}$, де $[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $n \geq 1$, то $D_q = D_\alpha$ з $\alpha_n = \frac{1}{[n]_q!}$, де $[n]_q! = [1]_q [2]_q \dots [n]_q$. Надалі вважатимемо, що $[0]_q! = 1$. Тому для застосовності оператора нескінченного порядку (1) до простору A_R необхідно і достатньо, щоб

$$\forall r_2 < R \exists r_1 < R \exists C > 0 \forall n = 0, 1, \dots \forall k \geq n$$

$$\|\psi_n\|_{r_2} \leq C \frac{[k-n]_q!}{[k]_q!} \frac{r_1^k}{r_2^{k-n}}. \quad (4)$$

Вивчимо тепер умови застосовності оператора (1) до простору цілих функцій.

Теорема 1. *Нехай $|q| > 1$. Для застосовності оператора (1) до простору A_∞ необхідно і достатньо, щоб цей оператор мав скінченний порядок.*

Доведення. Припустимо, що оператор (1) є застосовним до простору A_∞ . Тоді умова (4) виконується. Зафіксуємо довільне $r_2 < \infty$ і виберемо для нього $r_1 < \infty$ та $C > 0$ за умовою (4). При $k \rightarrow \infty$ маємо

$$\sqrt[k]{|[k]_q!|} = \frac{|q|^{\frac{k+1}{2}}}{|q-1|} (1 + o(1)). \quad (5)$$

Візьмемо довільне η таким, щоб $0 < \eta < 1$. Використовуючи (5), одержимо, що існує число $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що при $k \geq k_0$:

$$\frac{|q|^{\frac{k(k+1)}{2}}}{|q-1|^k} (1-\eta)^k \leq |[k]_q!| \leq \frac{|q|^{\frac{k(k+1)}{2}}}{|q-1|^k} (1+\eta)^k.$$

Тоді для довільного $n \geq 0$ при $k \geq n + k_0$ матимемо

$$\|\psi_n\|_{r_2} \leq C a_n \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{1+\eta}{1-\eta} \frac{1}{|q|^n} \right)^k, \quad (6)$$

де $a_n = \frac{r_2^n |q|^{\frac{n(n-1)}{2}} |q-1|^n}{(1+\eta)^n}$. Нехай $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\frac{r_1}{r_2} \frac{1+\eta}{1-\eta} \frac{1}{|q|^n} < 1$. Тоді для довільного фіксованого $n \geq n_0$ з використанням (6) матимемо, що

$$\|\psi_n\|_{r_2} \leq C a_n \inf_{k \geq k_0+n} \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{1+\eta}{1-\eta} \frac{1}{|q|^n} \right)^k = 0.$$

Тому $\psi_n(z) \equiv 0$ при $n \geq n_0$. Необхідність умов теореми 1 доведено, а їх достатність є очевидною.

Наслідок 1. *Нехай $|q| > 1$. Для того, щоб оператор T лінійно та неперервно діяв у просторі A_∞ і був переставним з оператором D_q необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді*

$$T = \sum_{n=0}^{n_0} c_n D_q^n,$$

де n_0 – деяке натуральне число, а c_n , $n = 0, n_0$, – деякі комплексні числа.

Таким чином, при $|q| > 1$ комутант оператора D_q у просторі A_∞ збігається з множиною многочленів відносно D_q . Тому при $|q| > 1$ оператор D_q у просторі A_∞ є мінімально комутуючим оператором [6].

Розглянемо тепер випадок, коли $|q| < 1$.

Теорема 2. *Нехай $|q| < 1$ і $0 < R \leq \infty$. Для застосовності диференціального оператора нескінченного порядку відносно q – диференціювання (1) до простору A_R необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова:*

$$\forall r_2 < R \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\psi_n\|_{r_2}} < |q-1|R. \quad (7)$$

Доведення. Необхідність. Нехай (1) застосовний до простору A_R . Тоді (4) виконується. Візьмемо довільне $r_2 < R$ і нехай $C > 0$ та $r_1 < R$ знайдені для цього r_2 за умовою (4). Покладаючи в (4) $k = n$, одержимо, що при $n \geq 0$

$$\|\psi_n\|_{r_2} \leq \frac{C}{|[n]_q!|} r_1^n. \quad (8)$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|[n]_q!|} = \frac{1}{|q-1|}, \quad (9)$$

то з (8) випливає, що $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\psi_n\|_{r_2}} \leq |q-1|r_1 < |q-1|R$ і умова (7) виконується.

Достатність. Нехай (7) виконується. Візьмемо довільне число $r_2 < R$. Тоді $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|[n]_q!|} \|\psi_n\|_{r_2} < R$. Виберемо \tilde{r}_2 таким, щоб $\max\{r_2; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|[n]_q!|} \|\psi_n\|_{r_2}\} < \tilde{r}_2 < R$. Тоді існує $C_1 > 0$ таке, що для всіх $n \geq 0$ виконується нерівність $\|\psi_n\|_{r_2} \leq C_1 \frac{\tilde{r}_2^n}{|[n]_q!|}$. Візьмемо $\varepsilon \in (0, 1)$ таким, щоб $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \tilde{r}_2 < R$. Тоді з рівності (9) випливає, що існують сталі $C_2, C_3 > 0$ такі, що для довільного $n \geq 0$ виконуються нерівності

$$C_2 \frac{(1-\varepsilon)^n}{|1-q|^n} < |[n]_q!| < C_3 \frac{(1+\varepsilon)^n}{|1-q|^n}.$$

Тому при $n \geq 0$ матимемо

$$\|\psi_n\|_{r_2} \leq \frac{C_1 \tilde{r}_2^n}{|[n]_q!|} = \frac{C_1 |[k-n]_q!|}{|[k]_q!|} \frac{|[k]_q!| \tilde{r}_2^n}{|[k-n]_q!| |[n]_q!|} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C_1 C_3}{C_2^2} \frac{|[k-n]_q!|}{|[k]_q!|} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^k \frac{\tilde{r}_2^k}{\tilde{r}_2^{k-n}} = \\ &= C \frac{|[k-n]_q!|}{|[k]_q!|} \frac{r_1^k}{\tilde{r}_2^{k-n}} \leq C \frac{|[k-n]_q!|}{|[k]_q!|} \frac{r_1^k}{r_2^{k-n}}, \end{aligned}$$

де $C = \frac{C_1 C_3}{C_2^2}$ і $r_1 = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \tilde{r}_2$. Таким чином, умова (4) виконується. Тому оператор (1) є застосовним до простору A_R .

Наслідок 2. Нехай $|q| < 1$ і $0 < R \leq \infty$. Тоді лінійний неперервний оператор $T : A_R \rightarrow A_R$ буде переставним з оператором q -диференціювання D_q тоді і тільки тоді, коли він зображається у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку відносно оператора D_q зі сталими коефіцієнтами виду

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D_q^n,$$

де $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умову

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < |q-1|R.$$

Використовуючи умови еквівалентності операторів узагальненого диференціювання у просторі A_R [7] отримуються умови еквівалентності двох різних операторів q -диференціювання у просторі A_R .

Твердження 1. Нехай $(|q_1| - 1)(|q_2| - 1) \neq 0$. Для того, щоб оператор D_{q_1} був еквівалентним у просторі A_{∞} до оператора D_{q_2} необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна з наступних умов:

- 1) $|q_1| = |q_2| > 1$;
- 2) $|q_1| < 1$ і $|q_2| < 1$.

Твердження 2. Нехай $|q_1| < 1$, $|q_2| < 1$ і $0 < R < \infty$. Для того, щоб оператор D_{q_1} був еквівалентним у просторі A_R до оператора D_{q_2} необхідно і достатньо, щоб $|q_1 - 1| = |q_2 - 1|$.

Цікаво було б вивчити умови еквівалентності у просторі A_R оператора n -го порядку відносно q -диференціювання до оператора D_q^n .

Якщо через \mathcal{J}_q позначити оператор q -інтегрування, який є правим оберненим до

оператора D_q , то результати цієї статті легко розповсюджуються також для оператора \mathcal{J}_q .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. F. H. Jackson On q -functions and a certain difference operator // Trans. Roy. Soc. Edin. – 1908. – №46. – Р. 253-281.
2. G. Bangerezako An Introduction to q -Difference Equations. – Preprint, Miramare-Trieste. 2011. – 79 p.
3. Ю.Ф. Коробейник Операторы сдвига на числовых семействах. – Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та. – 1983. – 155с.
4. С.С. Линчук О применимости дифференциальных и интегральных операторов бесконечного порядка // Деп. в ВИНТИ 13 апреля 1982, №1799-82. – Черновцы, 1982. – 25 с.
5. С. С. Линчук О представлении линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций многих переменных. – 1984. – **35**. – №5. – С.721-727.
6. I. Rajchinov On some commutation properties of the algebra of the linear operators acting in spaces of analytic functions I. // God. Vissh. Uchebn. Zaved., Prilozhna Mat. – 1979. – **15**. №3. – Р. 27-40.
7. С.С. Линчук, Ю.С. Линчук Операторы у просторах аналітичних функцій. - Чернівці: Рута, 2011. - 147 с.