УДК 517.956.4

©2018 р. **Н. І. Турчина, С. Д. Івасишен**

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МОДЕЛЬНОЇ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА

Розглядається загальна модельна $\overrightarrow{2b}$-параболічна крайова задача. Доведено теорему про коректну розв'язність такої задачі в просторах Гельдера, при цьому отримано точні оцінки норм розв'язку через відповідні норми правих частин задачі. Встановлено, що для правильності таких оцінок умови $\overrightarrow{2b}$-параболічності задачі є не тільки достатніми, але й необхідними.

Ключові слова: $2b$-параболічна крайова задача, коректна розв'язність, простір Гельдера, точні оцінки.

The general model $\overrightarrow{2b}$-parabolic boundary value problem is considered. The theorem on the correct solvability of such a problem in the Höelder spaces is proved. Exact estimates of the norms of the solution through the corresponding norms of the right parts of the problem are obtained. It is established that for the correctness of such estimates the conditions of $\overrightarrow{2b}$-parabolicity of the problem are not only sufficient but also necessary.

Keywords: $2b$-parabolic boundary value problem, correct solvability, correct solvability of such a problem in the Hölder space, exact estimates.

У працях авторів [1, 2] розглянуто загальну модельну крайову задачу для параболічної за Ейдельманом системи рівнянь векторного порядку $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$. Для такої задачі сформульовано умову доповняльності, яку мають задовольняти крайові диференціальні вирази, щоб задача була коректно поставлена, побудовано матрицю Ґріна, отримано точні оцінки всіх її компонент разом з їх похідними та встановлено для компонент дивергентне зображення. За допомогою цих результатів у даній статті встановлюється коректна розв'язність указаної задачі в просторах Гельдера, отримуються оцінки норм розв'язків, для правильності яких умови $\overrightarrow{2b}$-параболічності задачі є не тільки достатніми, але й необхідними. У доведеннях використовується методика з праць [3, 4].

1. Постановка задачі P та допоміжні відомості. Нехай $n, N, b_1, \ldots, b_n$ – задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$; s – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_j := s/b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $\|k\| := \sum_{j=1}^{n} m_j k_j$ і $\|k'\| := \sum_{j=1}^{n-1} m_j k_j$, якщо $k := (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ і $k' := (k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ – відповідно n-вимірний і $(n-1)$-вимірний мультиіндекси; $\|\bar{k}\| := 2sk_0 + \|k\|$ і $\|\bar{k}'\| := 2sk_0 + \|k'\|$, якщо $\bar{k} := (k_0, k)$ і $\bar{k}' := (k_0, k')$, де $k_0 \in \mathbb{Z}_+^1$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$ і $k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$; $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x' := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$; $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$, $\Pi := (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\Pi^+ := (0, \infty) \times \mathbb{R}_+^n$, $\Pi_T := (0, T] \times \mathbb{R}^n$, $\Pi_T^+ := (0, T] \times \mathbb{R}_+^n$, $\Pi_T' := (0, T] \times \mathbb{R}^{n-1}$, де T – задане додатне число; $\partial_{t,x}^{\bar{k}} := \partial_t^{k_0} \partial_x^k$.

В області Π_T^+ розглядатимемо таку крайову задачу:

$$A^0 u(t,x) := (I_N \partial_t - \sum_{\|k\|=2s} a_k \partial_x^k) u(t,x) =$$

$$= f(t,x), (t,x) \in \Pi_T^+, \qquad (1)$$

$$B_j^0 u(t,x)|_{x_n=0} := \sum_{\|\bar{k}\|=r_j} b_{j\bar{k}} \partial_{t,x}^{\bar{k}} u(t,x)|_{x_n=0} =$$

$$= g_j(t,x'), (t,x') \in \Pi_T', j \in \{1, \ldots, m\}, \qquad (2)$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}_+^n, \qquad (3)$$

де u, f і φ – матриці-стовпчики висоти N; a_k і $b_{j\bar{k}}$ – сталі матриці відповідно розміру $N \times N$ і $1 \times N$; I_N – одинична матриця порядку

N; $g_1,\dots,g_m$ – скалярні функції; $r_1,\dots,r_m$ – невід'ємні цілі числа.

Будемо припускати, що система рівнянь (1) є $\overrightarrow{2b}$-параболічною за Ейдельманом [5, 6], число крайових умов (2) $m=b_nN$ і ці крайові умови задовольняють умову доповняльності з [1]. Задачу (1)–(3), яка задовольняє ці умови, називатимемо $\overrightarrow{2b}$-параболічною крайовою задачею або коротко *задачею P*.

Щоб дослідити коректну розв'язність задачі P, потрібні відомості з [1, 2, 5, 6], що стосуються фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) для системи (1), матриці Ґріна задачі P, означення просторів Гельдера, лем про продовження функцій з цих просторів та ін. Наведемо необхідні відомості.

Крім наведених вище, використовуватимемо ще такі позначення:

$$\begin{gathered}M:=\sum_{j=1}^n m_j/(2s),\ M':=\sum_{j=1}^{n-1} m_j/(2s);\\ q_j:=2b_j/(2b_j-1), j\in\{1,\dots,n\};\\ E_c'(t,x'):=\exp\{-c\sum_{j=1}^{n-1}t^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\},\\ E_c^{(n)}(t,x_n):=\exp\{-ct^{1-q_n}|x_n|^{q_n}\},\\ E_c(t,x):=E_c'(t,x')E_c^{(n)}(t,x_n),\\ E_c^{(n)}(t,x_n,\xi_n):=E_c^{(n)}(t,x_n)E_c^{(n)}(t,\xi_n), t>0,\\ x:=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ \{x_n,\xi_n\}\subset\mathbb{R},\\ c>0;\ \Delta_{t,x}^{\beta,y}f(t,x):=f(t,x)-f(\beta,y),\\ \Delta_t^{\beta}f(t,\cdot):=f(t,\cdot)-f(\beta,\cdot),\\ \Delta_x^{y}f(\cdot,x):=f(\cdot,x)-f(\cdot,y),\\ \Delta_{x_j}^{y_j}f(\cdot,x):=\Delta_x^{x(y_j)}f(\cdot,x),\\ x(y_j):=(x_1,\dots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\dots,x_n),\\ j\in\{1,\dots,n\},\ \Delta_{x_j}^{y_j}f(\cdot,x'):=\Delta_{x'}^{x'(y_j)}f(\cdot,x'),\\ x'(y_j):=(x_1,\dots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\dots,x_{n-1}),\\ j\in\{1,\dots,n-1\};\end{gathered}$$

$\mathbb{C}_{rp}$ – множина всіх матриць розміру $r\times p$, елементи яких належать до множини $\mathbb{C}$ комплексних чисел.

У статті різні сталі, величини яких нас не цікавлять, позначаються однаковими літерами.

Користуватимемося рівностями

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M}E_c(t,x-\xi)d\xi=D, t>0, x\in\mathbb{R}^n, \quad (4)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} t^{-M'}E_c'(t,x'-\xi')d\xi'=D',$$
$$t>0, x'\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad (5)$$

в яких D і D' – додатні числа.

Нехай функція $Z:\Pi\to\mathbb{C}_{NN}$ є ФМРЗК для системи (1). Для неї справджуються оцінки

$$|\partial_{t,x}^{\bar k}Z(t,x)|\le C_{\bar k}t^{-M-\|\bar k\|/(2s)}E_c(t,x),$$
$$(t,x)\in\Pi, \quad (6)$$

та рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{t,x}^{\bar k}Z(t,x-\xi)d\xi=\delta_{\|\bar k\|,0}I_N,$$
$$(t,x)\in\Pi, \quad (7)$$

де $\bar k$ – довільний мультиіндекс з $\mathbb{Z}^{n+1}$, $C_{\bar k}$ і c – додатні сталі, $\delta_{r,p}$ – символ Кронекера.

Згідно з [2] *матрицею Ґріна* задачі (1)–(3) називається така матриця $G:=(G_0,G_1,\dots,G_m)$, що для довільних гладких і фінітних функцій $f,g_1,\dots,g_m$ і φ розв'язок задачі зображується у вигляді

$$u(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}G_0(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$
$$+\sum_{j=1}^m\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}G_j(t-\tau,x-\xi')g_j(\tau,\xi')d\xi'+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}G_0(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, (t,x)\in\Pi^+, \quad (8)$$

при цьому G_0 називається однорідною матрицею Ґріна, а $G_j, j\in\{1,\dots,m\}$, – ядрами Пуассона.

Потрібна далі інформація про матриці $G_j, j\in\{0,1,\dots,m\}$, міститься в наступних лемах, у яких

$$L(\partial_t,\partial_{x'}):=\partial_t+a\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{b_j}\partial_{x_j}^{2b_j}, a>0.$$

Лема 1. *Матриця G_0 визначається формулою*

$$G_0(t,x,\xi)=Z(t,x-\xi)-V(t,x,\xi),$$

$$t>0,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n_+, \qquad (9)$$

де Z – ФМРЗК для системи (1). Справджуються оцінки

$$|\partial^{\bar{k}}_{t,x}\partial^l_\xi G_0(t,x,\xi)|\le C_{\bar{k}l}t^{-M-(\|\bar{k}\|+\|l\|)/(2s)}\times$$
$$\times E_c(t,x-\xi), \qquad (10)$$
$$|\partial^{\bar{k}}_{t,x}\partial^l_\xi V(t,x,\xi)|\le C_{\bar{k}l}t^{-M-(\|\bar{k}\|+\|l\|)/(2s)}\times$$
$$\times E_c(t,x-\xi)E^{(n)}_c(t,x_n,\xi_n), \qquad (11)$$
$$t>0,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n_+,\bar{k}\in\mathbb{Z}^{n+1},l\in\mathbb{Z}^n_+,$$

та правильне зображення

$$G_0(t,x,\xi)=L^r(\partial_t,\partial_{x'})G^{(r)}_0(t,x,\xi),$$
$$t>0,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n_+, \qquad (12)$$

де r – будь-яке натуральне число і для $G^{(r)}_0$ справджуються оцінки, які відрізняються від оцінок (10) лише тим, що в них M замінено на $M-r$.

Лема 2. *Для довільного числа $r\in\mathbb{Z}^1_+$ правильні дивергентні зображення*

$$G_j(t,x)=L^r(\partial_t,\partial_{x'})G^{(r)}_j(t,x),(t,x)\in\Pi^+,$$
$$j\in\{1,\dots,m\}, \qquad (13)$$

в яких для функцій $G^{(r)}_j$ справджуються оцінки

$$|\partial^{\bar{k}}_{t,x}G^{(r)}_j(t,x)|\le C_{\bar{k}}t^{-M'+r-1+(r_j-\|\bar{k}\|)/(2s)}\times$$
$$\times E_c(t,x),(t,x)\in\Pi^+,\bar{k}\in\mathbb{Z}^{n+1}_+,$$
$$j\in\{1,\dots,m\}. \qquad (14)$$

Оцінки самих ядер G_j випливають з (14) при $r=0$.

Зауваження 1. Згідно з означенням матриці Ґріна розв'язки задачі (1)–(3) з фінітними функціями f,g_j і φ зображуються у вигляді (8). Можна довести, що це зображення правильне також, коли f не є фінітною, але порядки всіх диференціальних виразів B^0_j $r_j<2s$. Якщо $r_j\ge 2s$, $\varphi=0$ і гладка функція f разом зі своїми похідними обмежена та дорівнює нулю при $t=0$, то розв'язки задачі (1)–(3) з $\varphi=0$ зображуються формулою

$$u(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}G_0(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$
$$+\sum_{j=1}^m\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}G_j(t-\tau,x-\xi')(g_j(\tau,\xi')-$$
$$-C_j(\partial_\tau,\partial_\xi)f(\tau,\xi)|_{\xi_n=0})d\xi',(t,x)\in\Pi^+, \quad (15)$$

в якій диференціальний вираз C_j має порядок r_j-2s і не містить диференціювання за ξ_n порядку, вищого за r_j-2b_n, при цьому $C_j=0$, якщо найбільший порядок похідних за x_n у B^0_j менший за $2b_n$.

Перейдемо до означення просторів Гельдера. У цих означеннях l і λ – задані числа відповідно з множин $\mathbb{Z}^1_+$ і $(0,1)$; область Q – це будь-яка з областей Π, Π_T або Π^+_T, а Ω – це область $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{R}^n_+$; $\bar{Q}$, $\bar{\Pi}'_T$ і $\bar{\Omega}$ – замикання відповідних множин. Користуватимемося такими просторами:

- $H^{l+\lambda}(\bar{Q},\mathbb{C}_{N1})$ – простір неперервних функцій $u:\bar{Q}\to\mathbb{C}_{N1}$, які мають неперервні похідні $\partial^{\bar{k}}_{t,x}u$, $\|\bar{k}\|\le l$, і скінченну норму

$$\|u\|^{l+\lambda}_{N,\bar{Q}}:=\sum_{\|\bar{k}\|\le l}\sup_{(t,x)\in\bar{Q}}|\partial^{\bar{k}}_{t,x}u(t,x)|+$$
$$+\sum_{\substack{0\le l-\|\bar{k}\|<\\<2s}}\sup_{\substack{\{(t,x),(\beta,x)\}\subset\\ \subset\bar{Q},t\ne\beta}}\left(\frac{|\Delta^\beta_t\partial^{\bar{k}}_{t,x}u(t,x)|}{|t-\beta|^{(l-\|\bar{k}\|+\lambda)/(2s)}}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^n\sum_{\substack{0\le l-\|\bar{k}\|<\\<m_j}}\sup_{\substack{\{(t,x),\\(t,x(y_j))\}\subset\\ \subset\bar{Q},x_j\ne y_j}}\left(\frac{|\Delta^{y_j}_{x_j}\partial^{\bar{k}}_{t,x'}u(t,x)|}{|x_j-y_j|^{(l-\|\bar{k}\|+\lambda)/m_j}}\right);$$

- $H^{l+\lambda}(\bar{\Pi}'_T,\mathbb{C}_{11})$ – простір неперервних функцій $u:\bar{\Pi}'_T\to\mathbb{C}_{11}$, які мають неперервні похідні $\partial^{\bar{k}'}_{t,x'}u$, $\|\bar{k}'\|\le l$, і скінченну норму

$$\|u\|^{l+\lambda}_{1,\bar{\Pi}'_T}:=\sum_{\|\bar{k}'\|\le l}\sup_{(t,x')\in\bar{\Pi}'_T}|\partial^{\bar{k}'}_{t,x'}u(t,x')|+$$
$$+\sum_{\substack{0\le l-\|\bar{k}'\|<\\<2s}}\sup_{\substack{\{t,\beta\}\subset[0,T],\\ t\ne\beta,x'\in\mathbb{R}^{n-1}}}\left(\frac{|\Delta^\beta_t\partial^{\bar{k}'}_{t,x'}u(t,x')|}{|t-\beta|^{(l-\|\bar{k}\|+\lambda)/(2s)}}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^n\sum_{\substack{0\le l-\|\bar{k}'\|<\\<m_j}}\sup_{\substack{\{(t,x'),\\(t,x'(y_j))\}\subset\\ \subset\bar{\Pi}'_T,x_j\ne y_j}}\left(\frac{|\Delta^{y_j}_{x_j}\partial^{\bar{k}'}_{t,x'}u(t,x')|}{|x_j-y_j|^{(l-\|\bar{k}'\|+\lambda)/m_j}}\right);$$

• $C^{l+\lambda}(\bar{\Omega},\mathbb{C}_{N1})$ – простір неперервних функцій $v:\Omega\to\mathbb{C}_{N1}$, для яких існують неперервні похідні $\partial_x^k v$, $\|k\|\le l$, і є скінченною норма

$$\|v\|_{N,\bar{\Omega}}^{l+\lambda} := \sum_{\|k\|\le l}\sup_{x\in\bar{\Omega}}|\partial_x^k v(x)|+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{0\le l-\|k\|< \\ <m_j}}\sup_{\substack{\{x,x(y_j)\}\subset\\ \subset\bar{\Omega},x_j\ne y_j}}\left(\frac{|\Delta_{x_j}^{y_j}v(x)|}{|x_j-y_j|^{(l-\|k\|+\lambda)/m_j}}\right);$$

• $H_0^{l+\lambda}(\bar{Q},\mathbb{C}_{N1)}$ і $H_0^{l+\lambda}(\bar{\Pi}'_T,\mathbb{C}_{11})$ – підпростори відповідно просторів $H^{l+\lambda}(\bar{Q},\mathbb{C}_{N1})$ і $H^{l+\lambda}(\bar{\Pi}'_T,\mathbb{C}_{11})$, елементи яких разом з усіма своїми похідними дорівнюють нулеві при $t=0$.

Подібні до вищенаведених анізотропних стосовно просторових змінних просторів Гельдера використовувалися раніше в [7].

Наведемо деякі твердження про продовження функцій з цих просторів, які є узагальненнями відповідних тверджень з [4] для ізотропних просторів, і вони доводяться аналогічно.

Лема 3. *Нехай $\varphi\in C^{l+\lambda}(\bar{\mathbb{R}}_+^n,\mathbb{C}_{N1})$. Тоді існує продовження φ^* функції φ на $\mathbb{R}^n$ таке, що $\varphi^*\in C^{l+\lambda}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}_{N1})$ і виконується нерівність*

$$\|\varphi^*\|_{N,\mathbb{R}^n}^{l+\lambda}\le C\|\varphi\|_{N,\bar{\mathbb{R}}_+^n}^{l+\lambda},$$

де додатна стала C не залежить від φ.

Лема 4.*Для будь-якої функції $u\in H_0^{l+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+,\mathbb{C}_{N1})$ існує продовження u^* на Π^+, яке належить до простору $H_0^{l+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+,\mathbb{C}_{N1)}$, дорівнює нулеві при $t\ge(2+[\frac{l}{2s}])T$, $x\in\mathbb{R}_+^n$ і задовольняє нерівність*

$$\|u^*\|_{N,\bar{\Pi}^+}^{l+\lambda}\le C\|u\|_{N,\bar{\Pi}_T^+}^{l+\lambda}$$

зі сталою $C>0$, яка не залежить від u.

Лема 5.*Нехай задано функції $\varphi_j\in C^{l-2sj+\lambda}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}_{N1})$, $j\in\{0,\dots,[\frac{l}{2s}]\}$. Тоді для будь-якого фіксованого $T>0$ існує функція $u\in H^{l+\lambda}(\bar{\Pi}_T,\mathbb{C}_{N1})$ така, що*

$$\partial_t^j u|_{t=0}=\varphi_j, j\in\{0,\dots,[l/(2s)]\},$$

і

$$\|u\|_{N,\bar{\Pi}_T}^{l+\lambda}\le C\sum_{j=0}^{[\frac{l}{2s}]}\|\varphi_j\|_{N,\mathbb{R}^n}^{l-2sj+\lambda},$$

де $C>0$ не залежить від $\varphi_j, j\in\{0,\dots,[\frac{l}{2s}]\}$.

Тут і далі символ $[a]$ означає цілу частину числа a.

2. Оператори Ґріна. Згідно з наведеним у п. 1, розв'язки задачі P виражаються через інтеграли, ядрами яких є матриці $G_j, j\in\{0,1,\dots,m\}$. Тому з'ясування питання про коректну розв'язність задачі P почнемо з вивчення властивостей операторів $W_j, j\in\{0,\dots,m\}$, які називатимемо *операторами Гріна* і які діють за такими формулами:

$$v(t,x)=(W_0f)(t,x):=$$

$$=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}_+^n}G_0(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi_T^+, \tag{16}$$

$$w_j(t,x)=(W_jf)(t,x):=$$

$$=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}G_j(t-\tau,x-\xi')f(\tau,\xi')d\xi',$$

$$(t,x)\in\Pi_T^+, j\in\{1,\dots,m\}. \tag{17}$$

Лема 6. *Для будь-яких цілого числа $l\ge 0$ і числа $\lambda\in(0,1)$ є обмеженим оператор*

$$W_0: H_0^{l+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+,\mathbb{C}_{N1})\to H_0^{2s+l+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+,\mathbb{C}_{N1}).$$

Доведення. Проведемо його для $l=0$. При $l>0$ потрібно використовувати зображення (12) і методику, аналогічну використаній нижче.

Необхідно довести, що для будь-якої функції $f\in H_0^{\lambda}(\bar{\Pi}_T^+,\mathbb{C}_{N1})$ функція v із (16) належить до простору $H_0^{2s+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+,\mathbb{C}_{N1})$ і справджується оцінка

$$\|v\|_{N,\bar{\Pi}_T^+}^{2s+\lambda}\le CF, F:=\|f\|_{N,\bar{\Pi}_T^+}^{\lambda}, \tag{18}$$

де стала $C>0$ не залежить від f.

З того, що функція f належить до вказаного простору випливають нерівності

$$|f(t,x)|=|\Delta_t^0 f(t,x)|\le Ft^{\lambda/(2s)},$$

$$|\Delta^{\tau,\xi}_{t,x} f(t,x)| \le F(|t-\tau|^{\lambda/(2s)} + \sum_{p=1}^{n} |x_p-\xi_p|^{\lambda/m_p}),$$

$$\{(t,x),(\tau,\xi)\} \subset \bar{\Pi}^+_T. \qquad (19)$$

Похідні від функції v в точці $(t,x) \in \Pi^+_T$ знаходяться за формулами

$$\partial^k_x v(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} \partial^k_x G_0(t-\tau,x,\xi) \times$$

$$\times f(\tau,\xi) d\xi, \|k\| < 2s, \qquad (20)$$

$$\partial^k_x v(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} \partial^k_x G_0(t-\tau,x,\xi) \times$$

$$\times \Delta^{t,x}_{\tau,\xi} f(\tau,\xi) d\xi + \delta_{k,k''} a^{-1}_{k''} w(t,x) f(t,x),$$

$$\|k\| = 2s, \qquad (21)$$

$$\partial_t v(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} \partial_t G_0(t-\tau,x,\xi) \times$$

$$\times \Delta^{t,x}_{\tau,\xi} f(\tau,\xi) d\xi + (I_N + w(t,x)) f(t,x). \qquad (22)$$

Тут $k'' := (0,\ldots,0,2b_n)$, $a^{-1}_{k''}$ – матриця, обернена до матриці $a_{k''}$, яка є коефіцієнтом при $\partial^{2b_n}_{x_n}$ у диференціальному виразі A^0, і

$$w(t,x) := -\int_{\mathbb{R}^n_-} Z(t,x-\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^n_+} V(t,x,\xi) d\xi, \qquad (23)$$

де $\mathbb{R}^n_- := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n < 0\}$, а Z і V – функції з виразу (9).

Легко з'ясувати за допомогою оцінок (6), (10), (11) і (19), що інтеграли в правих частинах рівностей (20)–(22) збігаються на множині Π^+_T, причому рівномірно на кожній її компактній підмножині.

Правильність рівностей (20) очевидна. Доведемо формули (21) і (22). Для цього розглянемо при $h \in (0,t)$ функції

$$v_h(t,x) := \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau,x,\xi) f(\tau,\xi) d\xi.$$

Очевидно, що $\lim_{h\to 0} v_h(t,x) = v(t,x)$, $(t,x) \in \Pi^+_T$. Доведемо існування границь $\lim_{h\to 0} \partial^k_x v_h(t,x)$, $\|k\| = 2s$, і $\lim_{h\to 0} \partial_t v_h(t,x)$, які дорівнюють відповідно правим частинам формул (21) і (22). На підставі рівномірної збіжності звідси буде випливати правильність цих формул.

Маємо

$$\partial^k_x v_h(t,x) =$$

$$\int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} \partial^k_x G_0(t-\tau,x,\xi) \Delta^{t,x}_{\tau,\xi} f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} \partial^k_x G_0(t-\tau,x,\xi) d\xi f(t,x). \qquad (24)$$

Позначимо останній інтеграл з (24) через J_h. Оскільки $\partial_{x_j} G_0(t,x,\xi) = -\partial_{\xi_j} G_0(t,x,\xi)$, $j \in \{1,\ldots,n-1\}$, то за допомогою інтегрування частинами і оцінок (10) отримуємо, що при $k \ne k''$ і будь-якому $h \in (0,t)$ $J_h = 0$. Якщо $k = k''$, то на підставі зауваження 1 з [2] $\partial^{2b_n}_{x_n} G_0$ зображується у вигляді лінійної комбінації похідних $\partial_t G_0$ і $\partial^k_x G_0$ з $\|k\| = 2s$ і $k_n < 2b_n$, при цьому коефіцієнт при $\partial_t G_0$ дорівнює $a^{-1}_{k''}$. Тому в цьому випадку

$$J_h = -a^{-1}_{k''} \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} \partial_\tau G_0(t-\tau,x,\xi) d\xi =$$

$$= a^{-1}_{k''} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t,x,\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(h,x,\xi) d\xi \right).$$

Використовуючи рівності (7) і (9), отримуємо, що

$$J_h = a^{-1}_{k''} (w(t,x) - w(h,x)).$$

Оскільки при фіксованому $x_n > 0$ і будь-якому $\xi_n < 0$ $x_n - \xi_n > x_n$, то за допомогою оцінок (6) і (11) та рівності (4) маємо

$$|w(h,x)| \le C \int_{\mathbb{R}^n_-} h^{-M} E_c(h,x-\xi) d\xi +$$

$$+ C \int_{\mathbb{R}^n_+} h^{-M} E_c(h,x-\xi) E^{(n)}_c(h,x_n,\xi_n) d\xi \le$$

$$\leq C\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n_-} h^{-M}E_{c'}(h,x-\xi)E^{(n)}_{c-c'}(h,x_n-\xi_n)d\xi+$$

$$+E^{(n)}_c(h,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h^{-M}E_c(h,x-\xi)d\xi\Bigg)\leq$$

$$\leq CE^{(n)}_{c-c'}(h,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^n} h^{-M}E_{c'}(h,x-\xi)d\xi=$$

$$=CDE^{(n)}_{c-c'}(h,x_n)\xrightarrow[h\to 0]{}0,0<c'<c. \quad (25)$$

Тому $\lim_{h\to 0} J_h = a^{-1}_{k''}w(t,x)$. З цього випливає, що границя при $h\to 0$ виразу (24) дорівнює правій частині рівності (21).

Аналогічно знаходимо, що

$$\partial_t v_h(t,x)=\int\limits_0^{t-h}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\partial_t G_0(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\Delta^{t,x}_{\tau,\xi}f(\tau,\xi)d\xi+(I_N+w(t,x))f(t,x)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}G_0(h,x,\xi)\Delta^{t,x}_{t-h,\xi}f(t-h,\xi)d\xi.$$

При $h\to 0$ границя цього виразу дорівнює правій частині формули (22).

З виразів (16) і (20)–(22) видно, що функція v і всі похідні від неї дорівнюють нулеві при $t=0$. Нагадаємо, що $f|_{t=0}=0$.

Доведемо оцінку (18). Будемо користуватися оцінками (10) і (19), а також такими нерівностями для функції (23):

$$|w(t,x)|\leq C,(t,x)\in\Pi^+_T, \quad (26)$$

$$|\Delta^\beta_t w(t,x)|\leq C(\beta-t)^{\lambda/(2s)}t^{-\lambda/(2s)},$$
$$0<t<\beta\leq T,x\in\mathbb{R}^n_+, \quad (27)$$

$$|\Delta^{y_j}_{x_j}w(t,x)|\leq C|x_j-y_j|^{\lambda/(m_j)}t^{-\lambda/(2s)},$$

$$\{(t,x),(t,x(y_j))\}\subset\Pi^+_T,j\in\{1,\ldots,n\}. \quad (28)$$

Нерівність (26) випливає з (25) при $h=t$. У випадку, коли $\beta-t>t$ і $|x_j-y_j|>t^{1/(2b_j)}$, нерівності (27) і (28) є наслідками нерівності (26). Якщо $\beta-t\leq t$ і $|x_j-y_j|\leq t^{1/(2b_j)}$, то за допомогою оцінки (6) та теореми Лагранжа про середнє значення маємо

$$|\Delta^\beta_t Z(t,x-\xi)|=|(\beta-t)\partial_\gamma Z(\gamma,x-\xi)|\leq$$

$$\leq C(\beta-t)\gamma^{-M-1}E_c(\gamma,x-\xi)\leq$$

$$\leq C(\beta-t)^{\lambda/(2s)}(\beta-t)^{1-\lambda/(2s)}t^{-M-1}\times$$

$$\times E_c(\beta,x-\xi)\leq C(\beta-t)^{\lambda/(2s)}t^{M-\lambda/(2s)}\times$$

$$\times E_c(2t,x-\xi),\gamma\in(t,\beta),0<t<\beta\leq T,$$

$$x\in\mathbb{R}^n_+,\xi\in\mathbb{R}^n_-,$$

$$|\Delta^{y_j}_{x_j}Z(t,x-\xi)|=|(x_j-y_j)\partial_{z_j}Z(t,x(z_j)-\xi)|\leq$$

$$\leq C|x_j-y_j|t^{-M-m_j/(2s)}E_c(t,x(z_j)-\xi)\leq$$

$$\leq C|x_j-y_j|^{\lambda/m_j}t^{-M-\lambda/(2s)}\times$$

$$\times E_c(t,x(z_j)-\xi)\leq C|x_j-y_j|^{\lambda/m_j}t^{-M-\lambda/(2s)}\times$$

$$\times E_{c_1}(t,x-\xi),\{(t,x),(t,x(y_j))\}\subset\Pi^+_T,$$

$$\xi\in\mathbb{R}^n_-,0<c_1<c,$$

де z_j – середня точка між x_j і y_j. Тут використана нерівність

$$E_c(t,x(z_j)-\xi)\leq E_{c_1}(t,x-\xi), \quad (29)$$

в якій $C:=e^c,c_1:=2^{1-q_j}c<c$ і яка за допомогою елементарної нерівності $|a+b|^p\geq 2^{1-p}|a|^p-|b|^p,\{a,b\}\subset\mathbb{R},p>1$, та умови $|x_j-y_j|\leq t^{1/(2b_j)}$ доводиться таким чином:

$$E_c(t,x(z_j)-\xi)=\exp\{-c\sum_{p=1(p\neq j)}^n t^{1-q_p}\times$$

$$\times|x_p-\xi_p|^{q_p}-ct^{1-q_j}|z_j-\xi_j|^{q_j}\leq$$

$$\times\exp\{-c\sum_{p=1(p\neq j)}^n t^{1-q_p}|x_p-\xi_p|^{q_p}-ct^{1-q_j}\times$$

$$\times(2^{1-q_j}|x_j-\xi_j|^{q_j}-|x_j-y_j|^{q_j})\}\leq$$

$$\leq\exp\{-c_1\sum_{p=1}^n t^{1-q_p}|x_p-\xi_p|^{q_p}+ct^{1-q_j}\times$$

$$\times t^{(1/(2b_j))q_j}\leq CE_{c_1}(t,x-\xi).$$

Аналогічно за допомогою оцінки (11) отримуємо

$$|\Delta^\beta_t V(t,x,\xi)|\leq C(\beta-t)^{\lambda/(2s)}t^{-M-\lambda/(2s)}\times$$

$$\times E_c(2t,x-\xi),0<t<\beta\leq T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n_+;$$

$$|\Delta^{y_j}_{x_j}V(t,x,\xi)|\leq C|x_j-y_j|^{\lambda/m_j}t^{-M-\lambda/(2s)}\times$$

$$\times E_{c_1}(t,x-\xi),\{(t,x),(t,x(y_j))\}\subset\Pi^+_T,\xi\in\mathbb{R}^n_+.$$

Із знайдених оцінок приростів функцій Z і V так само, як у (25), випливають оцінки (27) і (28).

Використовуючи формули (20)–(22), оцінки (10), (19), (26)–(28), рівність (4), а також очевидну нерівність

$$|x_j-\xi_j|^{\mu}E_c(t-\tau,x-\xi)\le C_{\mu}(t-\tau)^{\mu/(2b_j)}\times$$
$$\times E_{c_1}(t-\tau,x-\xi), 0\le\tau<t, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$
$$j\in\{1,\dots,n\}, \mu>0, \qquad (30)$$

де $C_{\mu}>0, 0<c_1<c$, для $(t,x)\in\Pi_T^+$ отримуємо

$$\partial_x^k v(t,x)\le\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|\partial_x^k G_0(t-\tau,x,\xi)|\times$$
$$\times|f(\tau,\xi)|d\xi\le C\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(t-\tau)^{-M-\|k\|/(2s)}\times$$
$$\times E_c(t-\tau,x-\xi)\tau^{\lambda/(2s)}Fd\xi\le$$
$$\le CF\int\limits_0^t(t-\tau)^{-\|k\|/(2s)}\tau^{\lambda/(2s)}d\tau\le$$
$$\le CFt^{1-(\|k\|-\lambda)/(2s)}, \|k\|<2s;$$
$$\partial_{t,x}^{\bar{k}}v(t,x)\le CF\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(t-\tau)^{-\|\bar{k}\|/(2s)}\times$$
$$\times E_c(t-\tau,x-\xi)((t-\tau)^{\lambda/(2s)}+$$
$$+\sum_{p=1}^n|x_p-\xi_p|^{\lambda/m_p})d\xi+CFt^{\lambda/(2s)}\le$$
$$\le CF(\int\limits_0^t(t-\tau)^{-1+\lambda/(2s)}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(t-\tau)^{-M}\times$$
$$\times E_{c_1}(t-\tau,x-\xi)d\xi+t^{\lambda/(2s)})\le CFt^{\lambda/(2s)},$$
$$\|\bar{k}\|=2s. \qquad (31)$$

Якщо $\beta-t\ge t/2$ і $|x_j-y_j|\ge t^{1/(2b_j)}/2$, то з (31) безпосередньо випливають нерівності

$$|\Delta_t^{\beta}\partial_{t,x}^{\bar{k}}v(t,x)|\le CF(\beta-t)^{1-(\|\bar{k}\|-\lambda)/(2s)},$$
$$0<\|\bar{k}\|\le 2s,$$
$$|\Delta_{x_j}^{y_j}\partial_{t,x}^{\bar{k}}v(t,x)|\le CF|x_j-y_j|^{(2s-\|\bar{k}\|+\lambda)/m_j},$$
$$2s-m_j<\|\bar{k}\|\le 2s, j\in\{1,\dots,n\}. \qquad (32)$$

Ці нерівності справджуються також, коли $0<\beta-t<t/2$ і $|x_j-y_j|<t^{1/(2b_j)}/2$. Доведемо це для випадку, коли $k_0=1$. Для решти випадків доведення аналогічне.

Використовуючи формулу (22) та позначення $\gamma:=\beta-t$ і $\eta_j:=|x_j-y_j|^{2b_j}, j\in\{1,\dots,n\}$, запишемо зображення

$$\Delta_t^{\beta}\partial_t v(t,x)=\int\limits_0^{t-\gamma}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\Delta_t^{\beta}\partial_t G_0(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\Delta_{\tau,\xi}^{t,x}f(\tau,\xi)d\xi+\int\limits_{t-\gamma}^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\partial_t G_0(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\Delta_{\tau,\xi}^{t,x}f(\tau,\xi)d\xi-\int\limits_{t-\gamma}^{\beta}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\partial_{\beta}G_0(\beta-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\Delta_{\tau,\xi}^{\beta,x}f(\tau,\xi)d\xi+(I_N+w(\beta-t+\gamma,x))\Delta_t^{\beta}f(t,x)+$$
$$+\Delta_t^{\beta}w(t,x)f(t,x), \qquad (33)$$
$$\Delta_{x_j}^{y_j}\partial_t v(t,x)=\int\limits_0^{t-\eta_j}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\Delta_{x_j}^{y_j}\partial_t G_0(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\Delta_{\tau,\xi}^{t,x}f(\tau,\xi)d\xi+\int\limits_{t-\eta_j}^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\partial_t G_0(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\Delta_{\tau,\xi}^{t,x}f(\tau,\xi)d\xi-\int\limits_{t-\eta_j}^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\partial_t G_0(t-\tau,x(y_j),\xi)\times$$
$$\times\Delta_{\tau,\xi}^{t,x(y_j)}f(\tau,\xi)d\xi+(I_N+w(\eta_j,x(y_j)))\Delta_{x_j}^{y_j}f(t,x)+$$
$$+\Delta_{x_j}^{y_j}w(t,x)f(t,x), \qquad (34)$$

Усі доданки з формул (33) і (34) легко оцінюються за допомогою нерівностей (10), (19), (26)–(30) і рівності (4). Оцінимо, наприклад, два перші інтеграли з (34), які позначимо відповідно через P_1 і P_2. Маємо

$$|P_1|\le CF\eta_j^{1/(2b_j)}\int\limits_0^{t-\eta_j}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(t-\tau)^{-M-1-1/(2b_j)}\times$$

$$\times(E_c(t-\tau,x-\xi)+E_c(t-\tau,x(y_j)-\xi))\times$$
$$\times((t-\tau)^{\lambda/(2s)}+\sum_{p=1}^{n}|x_p-\xi_p|^{\lambda/m_p})d\xi\le$$
$$\le CF\eta_j^{1/(2b_j)}\int\limits_0^{t-\eta_j}(t-\tau)^{-1-1/(2b_j)+\lambda/(2s)}d\tau\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(t-\tau)^{-M}E_{c_1}(t-\tau,x-\xi)d\xi\le$$
$$\le CDF\eta_j^{1/(2b_j)}\int\limits_0^{t-\eta_j}(t-\tau)^{-1-1/(2b_j)+\lambda/(2s)}d\tau=$$
$$=CDF\eta_j^{m_j/(2s)}\int\limits_0^{t-\eta_j}(t-\tau)^{-1+(\lambda-m_j)/(2s)}d\tau=$$
$$=CDF\eta_j^{m_j/(2s)}\frac{2s}{m_j-\lambda}(\eta_j^{(\lambda-m_j)/(2s)}-$$
$$-t^{(\lambda-m_j)/(2s)})\le CDF\eta_j^{m_j/(2s)}\frac{2s}{m_j-\lambda}\times$$
$$\times\eta_j^{(\lambda-m_j)/(2s)}=C_1F\eta_j^{\lambda/(2s)}=$$
$$=C_1F|x_j-y_j|^{\lambda/m_j},$$
$$|P_2|\le CF\int\limits_{t-\eta_j}^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(t-\tau)^{-M-1}E_c(t-\tau,x-\xi)\times$$
$$\times((t-\tau)^{\lambda/(2s)}+\sum_{p=1}^{n}|x_p-\xi_p|^{\lambda/m_p})d\xi\le$$
$$\le CF\int\limits_{t-\eta_j}^{t}(t-\tau)^{-1+\lambda/(2s)}d\tau\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(t-\tau)^{-M}E_c(t-\tau,x-\xi)d\xi\le$$
$$\le\frac{2s}{\lambda}CD\eta_j^{\lambda/(2s)}=C_2F|x_j-y_j|^{\lambda/m_j}.$$

З нерівностей (31) і (32) та означення норми $\|v\|^{2s+\lambda}_{N,\bar{\Pi}^+_T}$ випливає потрібна оцінка (18).

Лема 7. *Для будь-яких цілого числа $l\ge 0$ і числа $\lambda\in(0,1)$ є обмеженими оператори*

$$W_j:H_0^{l+\lambda}(\bar{\Pi}'_T,\mathbb{C}_{11})\to H_0^{r_j+l+\lambda}(\bar{\Pi}^+_T,\mathbb{C}_{N1}),$$
$$j\in\{1,\ldots,m\}.\qquad(35)$$

Доведення. Нехай $f\in H_0^{l+\lambda}(\bar{\Pi}'_T,\mathbb{C}_{11})$. Доведемо, що тоді функція w_j з (17) належить до простору $H_0^{r_j+l+\lambda}(\bar{\Pi}^+_T,\mathbb{C}_{N1})$ і справджується оцінка

$$\|w_j\|^{r_j+l+\lambda}_{N,\bar{\Pi}^+_T}\le CF,F:=\|f\|^{l+\lambda}_{1,\bar{\Pi}'_T},\qquad(36)$$

де стала C не залежить від f.

Припустимо спочатку, що $l<2s$. Функція f та її похідні дорівнюють нулю при $t=0$ і задовольняють нерівності

$$|\Delta_t^\tau\partial_{x'}^{k'}f(t,x')|\le F|t-\tau|^{(l-\|k'\|+\lambda)/(2s)},\|k'\|\le l,$$
$$|\Delta_{x_i}^{\xi_i}\partial_{x'}^{k'}f(t,x')|\le F|x_i-\xi_i|^{(l-\|k'\|+\lambda)/m_j},$$
$$l-m_i<\|k'\|\le l,$$
$$\{(t,x'),(\tau,x'),(t,x(\xi))\}\subset\bar{\Pi}'_T,$$
$$i\in\{1,\ldots,n-1\}.\qquad(37)$$

Для $(t,x)\in\Pi^+_T$ маємо

$$\partial^{\bar{k}}_{t,x}w_j(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial^{\bar{k}}_{t,x}G_j(t-\tau,x-\xi')\times$$
$$\times\Delta^t_\tau f(\tau,\xi')d\xi'+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial^{\bar{k}}_{t,x}G_j(t-\tau,x-\xi')\times$$
$$\times f(\tau,\xi')d\xi'=:J_1(t,x)+J_2(t,x),$$
$$\|\bar{k}\|\le r_j+l.\qquad(38)$$

Перетворимо інтеграл J_2 до вигляду, зручного для оцінювання. Якщо скористатися зображенням (13) при $r=1$, то за допомогою інтегрування частинами та оцінок (14) отримаємо, що

$$J_2(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial^{\bar{k}}_{t,x}G_j^{(1)}(t-\tau,x-\xi')f(\tau,\xi')d\xi'+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial^{\bar{k}}_{t,x}\partial^{2b_i-\nu_i}_{x_i}G_j^{(1)}(t-\tau,x-\xi')\times$$
$$\times\Delta^{x_i}_{\xi_i}\partial^{\nu_i}_{\xi_i}f(t,\xi')d\xi',$$

де $l/m_i - 1 < \nu_i \leq l/m_i$ і c_i – деякі сталі. Зауважимо, що при цьому використана рівність

$$\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{t,x}^{\bar{k}} \partial_t G_j^{(1)}(t-\tau, x-\xi') f(t,\xi') d\xi' =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{t,x}^{\bar{k}} G_j^{(1)}(t, x-\xi') f(t,\xi') d\xi',$$

а також рівність

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{t,x}^{\bar{k}} \partial_{x_i}^{2b_i-\nu_i} G_j^{(1)}(t, x-\xi') \times$$

$$\times \partial_{\xi_i}^{\nu_i} f(t,\xi')|_{\xi_i=x_i} d\xi' = 0,$$

оскільки

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_{t,x}^{\bar{k}} \partial_{x_i}^{2b_i-\nu_i} G_j^{(1)}(t, x-\xi') d\xi_i = 0.$$

На підставі нерівностей (14), (30) і (37) та рівності (5) всі інтеграли з (38) і (39) легко оцінити та отримати оцінки

$$|\partial_{t,x}^{\bar{k}} w_j(t,x)| \leq CFt^{(r_j+l-\|\bar{k}\|+\lambda)/(2s)},$$

$$(t,x) \in \Pi_T^+, \|\bar{k}\| \leq r_j + l. \tag{40}$$

Для w_j справджуються також такі оцінки різниць:

$$|\Delta_t^{\beta} \partial_{t,x}^{\bar{k}} w_j(t,x)| \leq CF\gamma^{(r_j+l-\|\bar{k}\|+\lambda)/(2s)},$$

$$0 \leq r_j + l - \|\bar{k}\| < 2s,$$

$$|\Delta_{x_p}^{y_p} \partial_{t,x}^{\bar{k}} w_j(t,x)| \leq CF\eta_p^{(r_j+l-\|\bar{k}\|+\lambda)/m_p},$$

$$0 \leq r_j + l - \|\bar{k}\| < m_p, p \in \{1, \dots, n\}, \tag{41}$$

де величини γ і η_p такі самі, як у доведенні леми 6.

Якщо $\gamma \geq t/2$ і $\eta_p \geq t/2$, то оцінки (41) безпосередньо випливають з оцінок (40). Для інших значень γ і η_p так само, як і при доведенні леми 6, треба отримати зручні зображення відповідних різниць, а потім оцінити вирази з цих зображень за допомогою нерівностей (14) і (37).

Випишемо потрібні зображення різниць для випадку $\bar{k} \neq 0$, запровадивши для скорочення записів такі позначення:

$$H(t,x) := \partial_{t,x}^{\bar{k}} G_j(t,x),$$

$$H^{(\mu_i)} := \partial_{t,x}^{\bar{k}} \partial_{x_i}^{\mu_i} G_j^{(1)}(t,x),$$

$$f^{(\nu_i)}(t,x') := \partial_{x_j}^{\nu_i} f(t,x').$$

Маємо

$$\Delta_t^{\beta} \partial_{t,x}^{\bar{k}} w_j(t,x) = \int_0^{t-\gamma} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_t^{\beta} H(t-\tau, x-\xi') \times$$

$$\times \Delta_{\tau}^t f(\tau,\xi') d\xi' + \int_{t-\gamma}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H(t-\tau, x, \xi') \times$$

$$\times \Delta_{\tau}^t f(\tau,\xi') d\xi' - \int_{t-\gamma}^{\beta} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H(\beta-\tau, x-\xi') \times$$

$$\times \Delta_{\tau}^{\beta} f(\tau,\xi') d\xi' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_t^{\beta} H^{(0)}(t, x-\xi') f(t,\xi') d\xi' +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} c_i \Bigg(\int_0^{t-\gamma} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_t^{\beta} H^{(2b_i-\nu_i)}(t-\tau, x-\xi') \times$$

$$\times \Delta_{\xi_i}^{x_i} f^{(\nu_i)}(t,\xi') d\xi' +$$

$$+ \int_{t-\gamma}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H^{(2b_i-\nu_i)}(t-\tau, x-\xi') \Delta_{\xi_i}^{x_i} f^{(\nu_i)}(t,\xi') d\xi' -$$

$$- \int_{t-\gamma}^{\beta} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H^{(2b_i-\nu_i)}(\beta-\tau, x-\xi') \Delta_{\xi_i}^{x_i} f^{(\nu_i)}(\beta,\xi') d\xi' \Bigg),$$

$$\Delta_{x_p}^{y_p} \partial_{t,x}^{\bar{k}} w_j(t,x) = \int_0^{t-\eta_p} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_{x_p}^{y_p} H(t-\tau, x-\xi') \times$$

$$\times \Delta_{\tau}^t f(\tau,\xi') d\xi' +$$

$$+ \int_{t-\eta_p}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H(t-\tau, x-\xi') \Delta_{\tau}^t f(\tau,\xi') d\xi' -$$

$$- \int_{t-\eta_p}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H(t-\tau, x(y_p)-\xi') \Delta_{\tau}^t f(\tau,\xi') d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_{x_p}^{y_p} H^{(0)}(t, x-\xi') f(t,\xi') d\xi' +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} c_i\Big(\int\limits_0^{t-\eta_p} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_{x_p}^{y_p} H^{(2b_i-\nu_i)}(t-\tau, x-\xi')\times$$

$$\times\Delta_{\xi_i}^{x_i} f^{(\nu_i)}(t,\xi')d\xi'+$$

$$+\int\limits_{t-\eta_p}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} H^{(2b_i-\nu_i)}(t-\tau, x-\xi')\times$$

$$\times\Delta_{\xi_i}^{x_i} f^{(\nu_i)}(t,\xi')d\xi'-$$

$$-\int\limits_{t-\eta_p}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} H^{(2b_i-\nu_i)}(t-\tau, x(y_p)-\xi')\times$$

$$\times\Delta_{\xi_i}^{z_i} f^{(\nu_i)}(\beta,\xi')d\xi'\Big),$$

де $z_i = x_i$, якщо $i \neq p$, а $z_p = y_p$.

Оцінювання доданків, що містять інтегрування за τ, аналогічні до оцінювань інтегралів P_1 і P_2 при доведенні леми 6. Оцінювання решти доданків труднощів не викликають.

Оцінок (40) і (41) достатньо, щоб зробити висновок про істинність оцінки (36) і, отже, твердження леми для випадку $l < 2s$.

Якщо $l \geq 2s$, то, використовуючи зображення (13) з $r = [l/(2s)]$ та властитвості функції f, інтегруванням частинами одержуємо

$$w_j(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j^{(r)}(t-\tau, x-\xi')\times$$

$$\times L^r(\partial_\tau, \partial_{\xi'})f(\tau,\xi')d\xi', (t,x)\in \Pi_T^+. \qquad (42)$$

Оскільки $l - 2rs < 2s$, то доведення леми для випадку $l \geq 2s$ зводиться до повторення попереднього доведення для інтегралів (42).

3. Задача P з нульовими початковими даними. Розглянемо задачу (1)–(3) за спеціальних припущень щодо її правих частин, а саме таку задачу в області Π_T^+:

$$A^0 u = f, B_j^0 u|_{x_n=0} = g_j, j\in\{1,\ldots,m\},$$

$$u|_{t=0} = 0, \qquad (44)$$

де

$$f \in H_0^{l+\lambda}(\bar\Pi_T^+, \mathbb{C}_{N1}), g_j \in H_0^{2s+l-r_j+\lambda}(\bar\Pi_T', \mathbb{C}_{11}),$$

$$j\in\{1,\ldots,m\}, \qquad (45)$$

l – ціле число таке, що $l \geq r_0 := \max\{0, r_1 - 2s, \ldots, r_m - 2s\}$, $\lambda \in (0,1)$.

Ця задача називається *крайовою задачею з нульовими початковими даними.*

Згідно з формулами (15)–(17) розв'язок задачі (44) записується у вигляді

$$u = W_0 f + \sum_{j=1}^m W_j(g_j -$$

$$-C_j f|_{x_n=0}) =: u_1 + u_2. \qquad (46)$$

На підставі лем 6 і 7 $u \in H_0^{2s+l+\lambda}(\bar\Pi_T^+, \mathbb{C}_{N1})$ та справджується оцінка

$$\|u\|_{N,\bar\Pi_T^+}^{2s+l+\lambda} \leq C(\|f\|_{N,\bar\Pi_T^+}^{l+\lambda}+$$

$$+\sum_{j=1}^m \|g_j\|_{1,\bar\Pi_T'}^{2s+l-r_j+\lambda}), \qquad (47)$$

де стала $C > 0$ не залежить від f і $g_j, j \in \{1,\ldots,m\}$.

Зауважимо, що розв'язок (46) задачі (44) єдиний у просторі $H_0^{2s+l+\lambda}(\bar\Pi_T^+, \mathbb{C}_{N1})$. Щоб це встановити, спочатку, як і в [4], доводимо єдиність фінітного розв'язку, що випливає з наступної леми, доведення якої подібне до доведення леми 6 в [4].

Лема 8. *Якщо $u \in H_0^{2s+l+\lambda}(\bar\Pi_T^+, \mathbb{C}_{N1})$ – розв'язок задачі (44), який дорівнює нулю для досить великих $|x|$, то для нього правильне зображення (46).*

Далі доведемо, що всякий розв'язок $u \in H_0^{2s+l+\lambda}(\bar\Pi_T^+, \mathbb{C}_{N1})$ задачі (44) зображується у вигляді (46). Для цього розглянемо функцію $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ таку, що $\zeta(t) = 1$ для $t \in (0, 1/2)$ і $\zeta(t) = 0$ для $t \geq 1$. Функція $u_R(t,x) := \zeta(|x|/R)u(t,x)$, $(t,x)\in\Pi_T^+, R\geq 1$, є фінітним розв'язком задачі (44), в якій f замінено на f_R, а g_j – на g_{jR}, де

$$f_R(t,x) := \zeta(|x|/R)f(t,x) + (A^0\zeta(|x|/R)-$$

$$-\zeta(|x|/R)A^0)u(t,x),$$

$$g_{jR}(t,x') := \zeta(|x'|/R)g_j(t,x') + (B_j^0\zeta(|x|/R)-$$

$$-\zeta(|x|/R)B_j^0)u(t,x)|_{x_n=0}.$$

На підставі леми 8 маємо рівність

$$u_R = W_0 f_R + \sum_{j=1}^{m} W_j (g_{jR} -$$

$$-C_j f_R|_{x_n=0}), R \geq 1.$$

Використовуючи властивості функції ζ і абсолютну збіжність інтегралів з (46), перейдемо в останній рівності до границі при $R \to \infty$, у результаті чого отримаємо для розв'язку u зображення (46).

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 1. *Для будь-яких функцій f і $g_j, j \in \{1, \ldots, m\}$, що задовольняють умови (45), формула (46) визначає єдиний розв'язок задачі (44), який належить до простору $H_0^{2s+l+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+, \mathbb{C}_{N1})$ і для якого справджується оцінка (47).*

4. Загальний випадок задачі Р. Нехай u – розв'язок задачі (1)–(3), який належить до простору $H_0^{2s+l+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+, \mathbb{C}_{N1})$, де $l \geq r_0, \lambda \in (0,1)$. Тоді на підставі означення просторів Гельдера

$$f \in H_0^{l+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+, \mathbb{C}_{N1}), g_j \in H_0^{2s+l-r_j+\lambda}(\bar{\Pi}'_T, \mathbb{C}_{11}),$$

$$j \in \{1, \ldots, m\}, \varphi \in C^{2s+l+\lambda}(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{C}_{N1}), \quad (48)$$

при цьому існує така стала $C > 0$, яка не залежить від u, що

$$\|f\|_{N,\bar{\Pi}_T^+}^{l+\lambda} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{1,\bar{\Pi}'_T}^{2s+l-r_j+\lambda} + \|\varphi\|_{N,\bar{\mathbb{R}}_+^n}^{2s+l+\lambda} \leq$$

$$\leq C\|u\|_{N,\bar{\Pi}_T^+}^{2s+l+\lambda}. \quad (49)$$

Функції f, g_j і φ, крім того, зв'язані умовами узгодження при $t = 0$ і $x_n = 0$. Щоб сформулювати ці умови, введемо позначення

$$\varphi_j := \partial_t^j u|_{t=0}, P(\partial_x) := \sum_{\|k\|=2s} a_k \partial_x^k.$$

З системи (1) і початкової умови (3) визначимо функції $\varphi_j, j \in \{1, \ldots, [\frac{l}{2s} + 1]\}$. Очевидно, що

$$\varphi_0 = \varphi, \varphi_1 = P(\partial_x)\varphi + f|_{t=0},$$

$$\varphi_j = P(\partial_x)\varphi_{j-1} + \partial_t^{j-1} f|_{t=0},$$

$$j \in \{2, \ldots, [l/(2s) + 1]\}. \quad (50)$$

Умови узгодження полягають у тому, що функції $\varphi_j, j \in \{0, 1, \ldots, [\frac{l}{2s} + 1]\}$, задовольняють такі співвідношення, отримані з рівності (2):

$$\sum_{\|\bar{k}\|=2s} b_{j\bar{k}} \partial_x^k \varphi_{k_0+i}|_{x_n=0} = \partial_t^i g_j|_{t=0},$$

$$i \in \{0, 1, \ldots, [(l-r_j)/(2s)+1]\}, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Ці умови називаються *умовами узгодження порядку* $[\frac{l}{2s} + 1]$.

Отже, якщо $u \in H^{2s+l+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+, \mathbb{C}_{N1})$ є розв'язком задачі (1)–(3), то праві частини задовольняють умови (48) та умови узгодження порядку $[\frac{l}{2s} + 1]$. Виявляється, що ці умови є і достатніми для існування розв'язку з указаного простору.

Теорема 2. *Нехай* $l \geq r_0, \lambda \in (0,1)$. *Якщо праві частини f, g_j, і φ задачі P (1)–(3) задовольняють умови (48) та умови узгодження порядку $[\frac{l}{2s} + 1]$, то ця задача має єдиний розв'язок $u \in H^{2s+l+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+, \mathbb{C}_{N1})$. При цьому існує така стала $C > 0$, яка не залежить від f, g_j, і φ, що справджується оцінка*

$$\|u\|_{N,\bar{\Pi}_T^+}^{2s+l+\lambda} \leq C(\|f\|_{N,\bar{\Pi}_T^+}^{l+\lambda} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{1,\bar{\Pi}'_T}^{2s+l-r_j+\lambda} + \|\varphi\|_{N,\bar{\mathbb{R}}_+^n}^{2s+l+\lambda}). \quad (51)$$

Доведення. Теорему 2 можна вивести з теореми 1. Щоб це зробити, потрібно звести задачу (1)–(3) до задачі з нульовими початковими даними (44). Для цього розглянемо функції $\varphi_j, j \in \{0, 1, \ldots, [\frac{l}{2s} + 1]\}$, які визначені формулами (50). На підставі умов (48) $\varphi_j \in C^{2s(1-j)+l+\lambda}(\bar{\mathbb{R}}_+^n, \mathbb{C}_{N1})$ і виконуються нерівності

$$\|\varphi_j\|_{N,\bar{\mathbb{R}}_+^n}^{2s(1-j)+l+\lambda} \leq C(\|f\|_{N,\bar{\Pi}_T^+}^{l+\lambda} + \|\varphi\|_{N,\bar{\mathbb{R}}_+^n}^{2s+l+\lambda}),$$

$$j \in \{0, 1, \ldots, [l/(2s) + 1]\}. \quad (52)$$

Користуючись лемою 3, продовжимо функції φ_j на $\mathbb{R}^n$ так, щоб для їх продовжень φ_j^* виконувались нерівності

$$\|\varphi_j^*\|_{N,\mathbb{R}^n}^{2s(1-j)+l+\lambda} \leq C\|\varphi_j\|_{N,\bar{\mathbb{R}}_+^n}^{2s(1-j)+l+\lambda}),$$

$$j \in \{0,1,\dots,[l/(2s)+1]\}. \tag{53}$$

На підставі леми 5 можна побудувати функцію $v \in H^{2s+l+\lambda}(\bar{\Pi}_T, \mathbb{C}_{N1})$, яка задовольняє умови

$$\partial_t^j v|_{t=0} = \varphi_j, j \in \{0,1,\dots,[l/(2s)+1]\},$$

і нерівність

$$\|v\|^{2s+l+\lambda}_{N,\bar{\Pi}_T} \le C \sum_{j=0}^{[\frac{l}{2s}+1]} \|\varphi_j^*\|^{2s(1-j)+l+\lambda}_{N,\mathbb{R}^n} \le$$

$$\le C \sum_{j=0}^{[\frac{l}{2s}+1]} \|\varphi_j\|^{2s(1-j)+l+\lambda}_{N,\bar{\mathbb{R}}^n_+}) \le$$

$$\le C(\|f\|^{l+\lambda}_{N,\bar{\Pi}_T} + \|\varphi\|^{2s+l+\lambda}_{N,\bar{\mathbb{R}}^n_+}). \tag{54}$$

Тут ми використали також нерівності (52) і (53).

Якщо ввести нову невідому функцію $u' = u - v$, то задача (1)–(3) перейде в задачу

$$A^0 u' = f', B_j^0 u'|_{x_n=0} = g_j', j \in \{1,\dots,m\},$$

$$u'|_{t=0} = 0, \tag{55}$$

де $f' = f - A^0 v$, $g_j' = g_j - B_j^0 v|_{x_n=0}$. З властивостей функції v, умов (48) та узгодження випливає, що $f' \in H_0^{l+\lambda}(\bar{\Pi}_T^+, \mathbb{C}_{N1}), g_j' \in H_0^{2s+l-r_j+\lambda}(\bar{\Pi}'_T, \mathbb{C}_{11})$, $j \in \{1,\dots,m\}$. Крім того, на підставі нерівності (54) маємо

$$\|f'\|^{l+\lambda}_{N,\bar{\Pi}^+_T} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j'\|^{2s+l-r_j+\lambda}_{1,\bar{\Pi}'_T} \le$$

$$\le C(\|f\|^{l+\lambda}_{N,\bar{\Pi}^+_T} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|^{2s+l-r_j+\lambda}_{1,\bar{\Pi}'_T} + \|\varphi\|^{2s+l+\lambda}_{N,\bar{\mathbb{R}}^n_+}).$$

Отже, (55) є задачею з нульовими початковими даними та для неї виконуються твердження теореми 1, з яких випливає існування розв'язку задачі (1)–(3) з усіма потрібними властивостями.

Зауваження 2. З теореми 2 випливає, що виконання умов $2\vec{b}$-параболічності задачі (1)–(3) достатньо, щоб справджувалася оцінка (51) для будь-якого розв'язку цієї задачі з простору $H^{2s+l+\lambda}(\bar{\Pi}^+_T, \mathbb{C}_{N1})$. Виявляється, що ці умови є необхідними для справдження оцінки (51), так що є правильною така теорема.

Теорема 3. *Для того щоб задача вигляду (1)–(3), в якій число крайових умов $m = b_n N$, була $2\vec{b}$-параболічною, необхідно й досить, щоб для деякого цілого числа $l \ge r_0$ і числа $\lambda \in (0,1)$ існувала така стала $C > 0$, що для будь-якої функції $u \in H^{2s+l+\lambda}(\bar{\Pi}^+_T, \mathbb{C}_{N1})$ справджується нерівність*

$$\|u\|^{2s+l+\lambda}_{N,\bar{\Pi}^+_T} \le$$

$$\le C(\|A^0 u\|^{l+\lambda}_{N,\bar{\Pi}^+_T} + \sum_{j=1}^{m} \|B_j^0 u|_{x_n=0}\|^{2s+l-r_j+\lambda}_{1,\bar{\Pi}'_T} +$$

$$+ \|u|_{t=0}\|^{2s+l+\lambda}_{N,\bar{\mathbb{R}}^n_+}).$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 3 в [4].

Зауваження 3. Для цілого числа $l \ge r_0$ і числа $\lambda \in (0,1)$ через $\mathcal{U}^{l+\lambda}$ позначимо простір усіх функцій $u \in H^{2s+l+\lambda}(\bar{\Pi}^+_T, \mathbb{C}_{N1})$, а через $\mathcal{F}^{l+\lambda}$ – простір усіх наборів функцій $F := (f, g_1, \dots, g_m, \varphi)$ таких, що f, g_j і φ задовольняють умови (48) та умови узгодження порядку $[\frac{l}{2s}+1]$. Норми в цих просторах означимо рівностями

$$\|u\|_{\mathcal{U}^{l+\lambda}} := \|u\|^{2s+l+\lambda}_{N,\bar{\Pi}^+_T},$$

$$\|F\|_{\mathcal{F}^{l+\lambda}} := \|f\|^{l+\lambda}_{N,\bar{\Pi}^+_T} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|^{2s+l-r_j+\lambda}_{1,\bar{\Pi}'_T} + \|\varphi\|^{2s+l+\lambda}_{N,\bar{\mathbb{R}}^n_+}.$$

Запишемо задачу (1)–(3) у вигляді $Lu = F$, де L – оператор, який діє на функцію u за таким правилом: $A^0 u = f$, $B_j^0 u|_{x_n=0} = g_j$, $j \in \{1,\dots,m\}$, $u|_{t=0} = \varphi$. Основним результатом цієї статті є таке твердження: *для довільних цілого числа $l \ge r_0$ і числа $\lambda \in (0,1)$ оператор L здійснює гомеоморфне відображення простору $\mathcal{U}^{l+\lambda}$ на простір $\mathcal{F}^{l+\lambda}$, при цьому існує така стала $C > 0$, що для довільного $u \in \mathcal{U}^{l+\lambda}$ справджуються оцінки*

$$C^{-1}\|Lu\|_{\mathcal{F}^{l+\lambda}} \le \|u\|_{\mathcal{U}^{l+\lambda}} \le C\|Lu\|_{\mathcal{F}^{l+\lambda}}.$$

Ці оцінки є наслідками з оцінок (49) і (51).

Отже, існує неперервний оператор

$$L^{-1} : \mathcal{F}^{l+\lambda} \to \mathcal{U}^{l+\lambda},$$

обернений до оператора L. Можна довести, що цей оператор є інтегральним і для довільних $F=(f,g_1,\dots,g_m,\varphi)\in\mathcal{F}^{l+\lambda}$ правильне зображення

$$(L^{-1}F)(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\tilde{G}_0(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^m\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}G_j(t-\tau,x-\xi')g_j(\tau,\xi')d\xi'+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\tilde{G}_{m+1}(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\,(t,x)\in\Pi_T^+,$$

в якому

$$\tilde{G}_0(t,x;\tau,\xi):=G_0(t-\tau,x,\xi)+G_0'(t-\tau,x,\xi)+$$

$$+G_0''(t,x;\tau,\xi),$$

$$\tilde{G}_{m+1}(t,x,\xi):=G_0(t,x,\xi)+G_0'(t,x,\xi)+$$

$$+G_{m+1}'(t,x,\xi),$$

де G_0', G_0'' і G_{m+1}' є лінійними комбінаціями похідних від дельта-функцій, зосереджених у точках $\xi_n=0$ і $\tau=0$. Матрицю $\tilde{G}:=(\tilde{G}_0,G_1,\dots,G_m,\tilde{G}_{m+1})$ природно назвати *узагальненою матрицею Ґріна* задачі Р.

Зауважимо, що $G_0'=G_0''=0$ і $G_{m+1}'=0$, коли в диференціальні вирази B_j^0 не входять диференціювання за t, а також диференціювання за x_n порядків, більших $2b_n-1$. Детально цьому буде присвячена наступна публікація.

Висновки. У статті для модельної $\overrightarrow{2b}$-параболічної крайової задачі досліджено властивості операторів Ґріна та з їх допомогою встановлено коректну розв'язність задачі в анізотропних за всіма змінними просторах Гельдера. При цьому доведено, що породжений задачею оператор є гомеоморфізмом у відповідних просторах. Ці результати можна використовувати для встановлення коректної розв'язності загальних півпросторових $\overrightarrow{2b}$-параболічних крайових задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Турчина Н. І., Івасишен С. Д.* Про модельну крайову задачу з векторною вагою // Буковинський мат. журн. – 2017. – **5**, N 3-4. – С. 163-167.

2. *Івасишен С.Д., Турчина Н. І.* Матриця Ґріна модельної крайової задачі з векторною параболічною вагою // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, N 4. – С. 25-39.

3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

4. *Ивасишен С. Д.* Линейные параболические граничные задачи. – Киев: Выща школа, 1987. – 72 с. – (Современные достижения математики и её приложений).

5. *Ивасишен С. Д., Ейдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3–175, 271–273.

6. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Advances and Applications. – 2004. –**152**. –390 p.

7. *Івасишен С. Д., Івасюк Г. П.* Коректна розв'язність параболічних початкових задач Солонникова–Ейдельмана // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, N 5. – С. 650–671.