

ЗАКОНИ КЕПЛЕРА І ЗАДАЧА ДВОХ ТІЛ ЗІ СКІНЧЕННОЮ ШВИДКІСТЮ ГРАВІТАЦІЇ

У класичній небесній механіці кінематична картина руху тіл визначається трьома законами Кеплера.

Із моменту відкриття І. Ньютоном закону всесвітнього тяжіння для дослідження руху тіл використовувалися звичайні диференціальні рівняння, оскільки вважалося, що швидкість гравітації є нескінченною і гравітаційне поле поширюється миттєво від джерела, як би далеко від нього не знаходиться.

І. Ньютон за допомогою диференціальних рівнянь дослідив рух двох тіл і показав, що траєкторіями руху одного тіла відносно другого і відносно центра маси є конічні перерізи.

У реальному світі швидкість гравітації не може бути нескінченною, що узгоджується з теорією відносності А. Ейнштейна, в якій постулюється, що швидкість гравітації збігається зі швидкістю світла, та з дослідженнями С.М. Копейкіна й Е. Фомалонта про фундаментальну межу швидкості гравітації. Тому для дослідження динаміки руху тіл у реальному просторі недостатньо методів теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Завдяки запізнюванню гравітаційного поля для дослідження руху тіл найбільш прийнятним є математичний апарат, в основу якого покладено диференціальні рівняння із запізнювальним аргументом.

У статті побудовано математичну модель руху двох тіл зі скінченною швидкістю гравітації з використанням цих рівнянь.

Показано, що рух цих тіл не здійснюється за законами Кеплера. При дослідженні руху тіл суттєвим є використання системи нелінійних диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом та закону зростання секторної швидкості відносного руху тіл, спричинене скінченною швидкістю гравітації.

Ключові слова: закони Кеплера, задача двох тіл, задача двох тіл зі скінченною швидкістю гравітації, математична модель Сонячної системи.

In classical celestial mechanics the kinematic picture of the motion of bodies is determined by Kepler's three laws.

From the moment of the opening of the law of universal gravitation by I. Newton, ordinary differential equations were used to study the motion of bodies, since it was assumed that the velocity of gravity is infinite and the gravitational field extends instantaneously from the source, however far from it.

In the real world, the velocity of gravitation can not be infinite, which is consistent with the theory of relativity A. Einstein, in which it is postulated that the rate of gravity coincides with the speed of light, and with the research S. Kopeikin and E. Fomalont on the fundamental limit of the velocity of gravity. Therefore, in order to study the dynamics of the motion of bodies in real space, methods of the theory of ordinary differential equations are insufficient.

Due to the delay of the gravitational field for studying the motion of bodies, the mathematical apparatus based on which is laid differential equations with delay argument.

In the article a mathematical model of motion of two bodies with finite velocity of gravity with the use of these equations is constructed.

It is shown that the motion of these bodies is not carried out in accordance with Kepler's laws. In the study of body motion, the use of the system of nonlinear differential equations with a lagging argument and the law of increasing the sector velocity of the relative motion of bodies due to the finite velocity of gravity is essential.

Keywords: Kepler's laws, the problem of two bodies, the problem of two bodies with a finite speed of gravity, mathematical model of the solar system.

Вступ

Стаття присвячена застосуванню диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом до побудови математичної моделі Сонячної системи та дослідження руху двох тіл під дією сил закону всесвітнього тяжіння з урахуванням скінченної швидкості гравітації.

Завдяки тому, що гравітаційний вплив одного тіла на інше не може відбуватися миттєво, а потрібний час, за який гравітаційне поле проходить відстань між цими тілами, то природним є те, що математичними моделями руху системи матеріальних точок мають бути рівняння з післядією. Тому для дослідження таких систем найбільш прийнятним є математичний апарат, в основу якого покладено теорію диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом.

Результати цієї статті були представлені на науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича [1], і детально викладені в публікаціях [2]– [4].

1. Закони Кеплера Рух тіл (зокрема, рух планет) у класичній небесній механіці [5, 6] здійснюється за трьома законами Кеплера (1571–1630):

1. *Всі планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких (спільному для всіх планет) знаходиться Сонце.*

2. *Площі, що описуються радіусами-векторами планет, проведеними із Сонця, зростають пропорційно часу.*

3. *Квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей їх орбіт.*

У небесній механіці зі скінченною швидкістю гравітації *рух тіл не може здійснюватися за цими законами.* Це ми покажемо в подальшому.

2. Задача двох тіл у класичній небесній механіці. Із моменту відкриття І. Ньютоном (1643–1727) закону всесвітньо-

го тяжіння в 1687 р. для дослідження руху тіл використовувалися звичайні диференціальні рівняння, оскільки вважалося, що швидкість гравітації є нескінченною і гравітаційне поле поширюється миттєво від джерела, як би далеко від нього не знаходиться.

Найпростішою задачею класичної небесної механіки є задача двох тіл. За другим законом Ньютона та законом всесвітнього тяжіння диференціальні рівняння руху тіл цієї задачі в деякій нерухомій декартовій системі координат мають вигляд

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1(t) = \frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)), \\ \ddot{\vec{r}}_2(t) = \frac{Gm_1}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)), \end{cases} \quad (1)$$

де G – гравітаційна стала, m_1 і m_2 – маси тіл і $|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|$ – евклідова довжина вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$.

Дослідження системи (1) наведено в багатьох працях (див., наприклад, [7]– [9]).

І. Ньютоном знайдено загальний розв'язок системи (1) і цьому розв'язку надано геометричної форми (траєкторіями руху одного тіла відносно другого і відносно центра маси є конічні перерізи).

3. Математична модель руху скінченного числа тіл у класичній небесній механіці. Будемо розглядати рух матеріальних точок M_0, M_1, \dots, M_n з масами m_0, m_1, \dots, m_n відповідно в прямокутній системі координат x, y, z з початком координат у точці O . Систему координат вважатимемо інерціальною. Положення точок M_i , $i = \overline{0, n}$, в момент часу t визначаються їх радіусами-векторами $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{0, n}$.

Рівняння руху точок на підставі законів Ньютона має вигляд

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = \\ = \sum_{j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)|^3} (\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)), \\ i = \overline{0, n}, \end{cases} \quad (2)$$

де $\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)|^3} (\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t))$ – сила, з якою

точка M_j притягує точку M_i , і G – гравітаційна стала.

При $n = 9$ система (2) використовується в небесній механіці для вивчення руху Сонця і планет, якщо не враховувати дію на них інших складових Сонячної системи (астероїдів, комет тощо) та Галактики.

Для визначення функцій $\bar{r}_i(t)$, $i = \overline{0, n}$, потрібно використовувати початкові умови:

$$\bar{r}_i^{(0)} = \bar{r}_i(t_0), \quad \frac{d\bar{r}_i^{(0)}}{dt} = \frac{d\bar{r}_i(t_0)}{dt}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (3)$$

де t_0 – початковий момент часу, або значення цих функцій у моменти часу t_1 і t_2 :

$$\bar{r}_i^{(1)} = \bar{r}_i(t_1), \quad \bar{r}_i^{(2)} = \bar{r}_i(t_2), \quad i = \overline{0, n}. \quad (4)$$

4. Закон всесвітнього тяжіння з урахуванням скінченної швидкості гравітації. Принцип запізнювання гравітаційного поля. Швидкість гравітації в реальному просторі не може бути нескінченною, як у теорії Ньютона. Це твердження узгоджується з теорією відносності Ейнштейна, в якій постулюється, що швидкість гравітації збігається зі швидкістю світла, та з дослідженнями С. М. Копейкіна і Е. Фомалонта про фундаментальну границю швидкості гравітації [10]. Ця властивість гравітації дає змогу побудувати математичну модель Сонячної системи, що використовує не звичайні диференціальні рівняння, а диференціальні рівняння з післядією, і встановити нові властивості цієї системи [3].

З'ясуємо вплив швидкості гравітації на зображення закону всесвітнього тяжіння.

Дослідимо взаємодію двох точок M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 . Ці точки під впливом сил тяжіння будуть знаходитися в стані руху. Рух точок будемо розглядати в прямокутній системі координат x, y, z з початком координат у точці O . Систему координат вважатимемо інерціальною. Положення точок M_1 і M_2 в момент часу t визначається їх радіусами-векторами $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$.

Якби швидкість гравітації була нескінченною, як у теорії Ньютона, то на підставі закону всесвітнього тяжіння в момент часу

t точка M_2 притягувала б точку M_1 із силою

$$\vec{F}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)) \quad (5)$$

(напрямок цієї сили збігається з напрямком вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$), а точка M_1 притягувала б точку M_2 із силою $-\vec{F}(t)$.

Однак, на підставі скінченної швидкості гравітації дія закону всесвітнього тяжіння здійснюється складніше.

Справді, нехай точки M_2 і M_1 рухаються по відповідним траєкторіям зі швидкостями $\vec{v}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t)$ і $\vec{v}_1(t) = \dot{\vec{r}}_1(t)$ і в момент часу $t - \tau_2(t)$ знаходяться в точках C і D відповідно (частини траєкторій руху точок зображені рис. 1). Тут запізнювання $\tau_2(t)$ задовольняє співвідношення

$$c\tau_2(t) = |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|, \quad (6)$$

де c – швидкість гравітації.

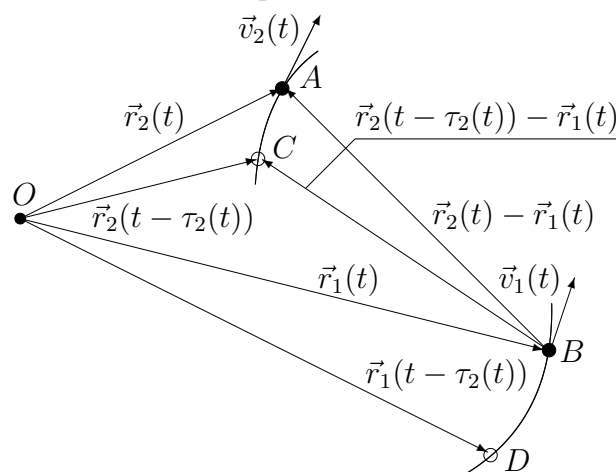


Рис. 1. Точки M_1 і M_2 в моменти часу $t - \tau_2(t)$ і t .

За проміжок часу $[t - \tau_2(t), t]$ точка M_2 переміститься з точки C в точку A , а точка M_1 – з точки D в точку B . Цього проміжку часу достатньо, щоб гравітаційне поле зі швидкістю c поширилося з точки C в точку B , що відповідає рівності (6). Отже, в момент часу t на точку B діє не сила (5), а сила

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(t) &= \frac{Gm_1m_2}{|\vec{BC}|^3} \vec{BC} = \\ &= \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким чином, якщо рух точок M_2 і M_1 описується векторними функціями $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$, то в момент часу t точка M_2 притягує точку M_1 із силою $\vec{F}_1(t)$, що визнається системою співвідношень (6) і (7).

Аналогічно, в момент часу t точка M_1 притягує точку M_2 з силою, що визнається наступною системою співвідношень

$$\vec{F}_2(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)), \quad (8)$$

$$c\tau_1(t) = |\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|. \quad (9)$$

Отже, дія одного тіла на інше здійснюється згідно з **принципом запізнювання гравітаційного поля**, тобто з урахуванням скінченної швидкості гравітації. *Він полягає в тому, що в момент часу t точка M_1 (точка B) притягується не до точки M_2 (точки A), а до точки C , що збігається з M_2 в момент часу $t - \tau_2(t)$, де $\tau_2(t)$ задовольняє (6), з силою $\vec{F}_1(t)$.*

У загальному випадку сили $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$ не збігаються за величиною і не є колінеарними.

Очевидно, що для знаходження сил $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$ потрібно знати векторні функції $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$ та скалярні функції $\tau_1(t)$ і $\tau_2(t)$. Ці функції не можна знайти, використовуючи лише співвідношення (6)–(9). Потрібні додаткові співвідношення, які наведемо в п. 5.

Зазначимо, що у випадку відомих функцій $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$ запізнювання $\tau_1(t)$ і $\tau_2(t)$ можуть бути знайдені за допомогою співвідношень (6) і (9). Ці запізнювання завдяки теоремам про неявну функцію [11] є неперервними і диференційовними функціями.

5. Задача двох тіл у випадку скінченної швидкості гравітації. Із наведених міркувань з урахуванням другого закону Ньютона та закону всесвітнього тяжіння отримуємо, що рух двох точок M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 відповідно описується на-

ступною системою рівнянь

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1(t) = \vec{F}_1(t), \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2(t) = \vec{F}_2(t), \\ c\tau_2(t) = |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|, \\ c\tau_1(t) = |\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|. \end{cases}$$

Звідси отримуємо систему рівнянь, що описує рух точок M_1 і M_2 ,

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1(t) = \frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)), \\ \ddot{\vec{r}}_2(t) = \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)), \\ c\tau_2(t) = |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|, \\ c\tau_1(t) = |\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|. \end{cases} \quad (10)$$

Зазначимо, що система (10) є системою рівнянь із запізнювальним аргументом (запізнювання $\tau_2(t)$ і $\tau_1(t)$ залежать від розміщення точок M_1 і M_2) і суттєво відрізняється від системи (1).

Для повного опису руху точок M_1 і M_2 потрібно для системи (10) використовувати додаткові початкові або крайові умови (див., наприклад, наступні задачі).

Задача 1. Нехай t_0 – довільний момент часу. Зафіксуємо неперервні на відрізках $[t_0 - \tau_i(t_0), t_0]$, $i = \overline{1, 2}$, векторні функції $\vec{\varphi}_{0,i}(s)$ і $\vec{\varphi}_{1,i}(s)$, $i = \overline{1, 2}$, відповідно. Потрібно знайти розв'язки $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{1, 2}$, системи (10), що задовольняють початкові умови

$$\begin{cases} \vec{r}_i(s) = \vec{\varphi}_{0,i}(s), & s \in [t_0 - \tau_i(t_0), t_0], \\ \vec{r}_i(s) = \vec{\varphi}_{1,i}(s), & s \in [t_0 - \tau_i(t_0), t_0], \\ i = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (11)$$

Задача 2. Нехай t_1 і t_2 – довільні моменти часу, для яких $t_1 < t_2 - \tau_i(t_2)$, для $i = \overline{1, 2}$. Розглянемо двічі неперервно диференційовні на відрізках $[t_1 - \tau_i(t_1), t_1]$ і $[t_2 - \tau_i(t_2), t_2]$, $i = \overline{1, 2}$, векторні функції $\vec{\psi}_{1,i}(s)$ і $\vec{\psi}_{2,i}(s)$, $i = \overline{1, 2}$, відповідно. Потрібно знайти розв'язки $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{1, 2}$, системи (10), що задовольня-

ють умови

$$\begin{cases} \vec{r}_i(s_1) = \vec{\psi}_{1,i}(s_1), & s_1 \in [t_1 - \tau_i(t_1), t_1], \\ \vec{r}_i(s_2) = \vec{\psi}_{2,i}(s_2), & s_2 \in [t_2 - \tau_i(t_2), t_2], \\ i = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (12)$$

Систему рівнянь (10) з умовами (11) або (12) можна розглядати як математичну модель руху двох тіл, що враховує скінченну швидкість гравітації.

6. Математична модель руху скінченного числа тіл з урахуванням скінченної швидкості гравітації. Завдяки принципу запізнювання гравітаційного поля рух системи матеріальних точок M_0, M_1, \dots, M_n з масами m_0, m_1, \dots, m_n по відношенню до нерухомої прямокутної системи координат описується наступною системою рівнянь із відхилювальним аргументом

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = \\ = \sum_{j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)|^3} \times \\ \times (\vec{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)), \\ c\tau_{ji}(t) = |\vec{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)|, \\ i = \overline{0, n}, j = \overline{0, n}, i \neq j, \end{cases} \quad (13)$$

де

$$\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)|^3} (\vec{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t))$$

є силою притягування точки M_i точкою M_j (на підставі закону всесвітнього тяжіння з урахуванням запізнення $\tau_{ji}(t)$ гравітації).

Ця система містить $n + 1$ векторних і $(n + 1)n$ скалярних рівнянь (кількість рівнянь $(n + 1)^2$).

Для повного опису руху матеріальних точок M_0, M_1, \dots, M_n також потрібно використовувати для системи (13) додаткові умови, аналогічні умовам (3) і (4).

Систему рівнянь (13) при $n = 9$ разом з додатковими умовами, аналогічними (3) і (4), можна розглядати як математичну модель Сонячної системи, що враховує скінченну швидкість гравітації.

Звернемо увагу на те, що запізнювання $\tau_{ij}(t)$ в системі (13) у випадку використання її для дослідження Сонячної системи є достатньо великими. Наприклад, для Землі і Плутона ці запізнювання (в сек) задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} 490, 48 < \tau_{03}(t) < 507, 34, \\ 14730, 27 < \tau_{09}(t) < 24711, 79 \end{aligned}$$

відповідно [2], [3].

Знехтувати цими запізненнями (тобто замінити систему (13) системою (2)) при дослідженні динаміки Сонячної системи на великих проміжках часу не можна.

Зазначимо, що математична модель Сонячної системи, подана з допомогою звичайних диференціальних рівнянь, є динамічною системою зі скінченновимірним фазовим простором, а подана з допомогою диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом, є динамічною системою з нескінченновимірним фазовим простором. Завдяки цьому не кожна властивість другої моделі характерна для першої моделі.

Задачі знаходження розв'язків системи (13) можна використовувати, наприклад, при виведенні на орбіти планет Сонячної системи штучних об'єктів або при визначенні орбіт небесних тіл Сонячної системи (наприклад, астероїдів) за даними їх позиційних спостережень.

7. Зміщення притягувальних точок планет Сонячної системи. На підставі принципу запізнювання гравітаційного поля притягувальні точки для планет Сонячної системи не збігаються з центром Сонця. Є суттєві зміщення цих точок від центру Сонця [2] (див. таблицю 1).

Таблиця 1

Планета	Зміщення Δ_1 притягувальної точки, в км
Меркурій	41905,9227
Венера	78289,9227
Земля	108284,038
Марс	165024,873
Юпітер	563401,849
Сатурн	1032921,43
Уран	2077970,68
Нептун	3256101,02
Плутон	4279385,18

Порівнюючи дані цієї таблиці з радіусом Сонця ($R \approx 695217,26$ км), приходимо до висновку, що для Сатурна, Урана, Нептуна та Плутона притягувальні точки знаходяться за межами Сонячної кулі.

Зазначимо, що всі складові Сонячної системи (планети, супутники планет, астероїди тощо) впливають на розміщення притягувальних точок планет Сонячної системи. Однак цей вплив не є суттєвим, оскільки маса Сонця значно більша суми мас планет та інших складових цієї системи.

8. Уточнення перших двох законів Кеплера. Притягувальною точкою для кожної планети Сонячної системи є не центр A Сонця, а інша точка простору (точка C) і відстань між центром Сонця та точкою C не є сталою. Ці властивості важко помітити експериментально при спостереженнях за рухом планет, астероїдів та штучних об'єктів завдяки малості кутового зміщення φ притягувальних точок (у випадку, коли точкою A є центр Сонця, $\varphi < 10^{-3}$ [2]).

Замість перших двох законів Кеплера справджуються наступні два твердження.

1*. Кожна планета рухається навколо притягувальної точки (точки C), що не збігається з центром Сонця. Гравітаційне поле, породжене Сонцем і планетою, можна так збурити (збурення досить мале (у випадку Сонця і Землі відношення величини збурення до величини сили тяжіння є величиною, меншою $1,44864811 \cdot 10^{-3}$ [2])), що планета в новому силовому полі рухатиметься по еліпсу, в одному з фокусів якого

знаходиться не центр Сонця, а точка F_2 , близька до притягувальної точки C (див. рис. 2, де F_1 і F_2 – фокуси еліпса, S – центр Сонця, $\bar{v}(t)$ – швидкість руху Сонця в момент часу t , \mathcal{L} – частина орбіти Сонця, Δ – відстань між точками F_2 і S ($\Delta \approx \Delta_1$)). Зауважимо, що завдяки малому збуренню гравітаційного поля і великій масі Сонця траєкторія руху Сонця і координати притягувальної точки для планети мало зміняться; отже, $F_2 \approx C$.

2*. Гравітаційне поле, породжене Сонцем і планетою, можна збурити, як і в 1*, що площа, яка описується радіусом-вектором планети, проведеним не з центру Сонця, а з точки F_2 , близької до притягувальної точки C , зростає пропорційно часу (див. рис. 3, де використані ті самі позначення, що й на рис. 2).

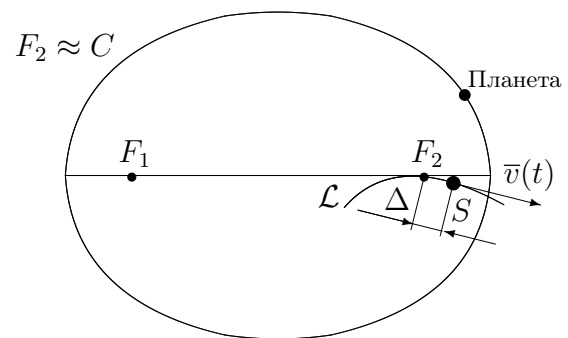


Рис. 2. Рух планети по еліпсу в гравітаційному полі зі збуренням.

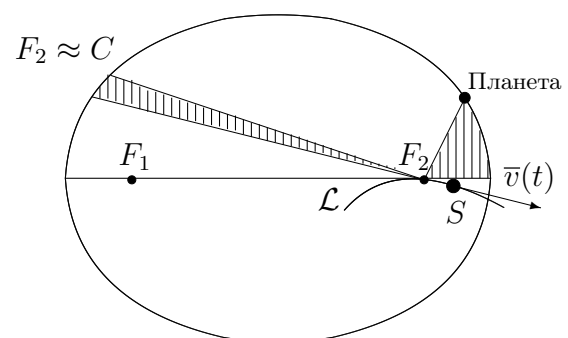


Рис. 3. Незмінність секторної швидкості руху планети відносно притягувальної точки в гравітаційному полі зі збуренням.

Обґрунтування тверджень 1* і 2* наведено в [2].

9. Деякі наслідки з принципу запізнювання гравітаційного поля й основ-

на мета статті. Завдяки принципу запізнювання гравітаційного поля при русі планети навколо Сонця притягувальною точкою для планети в момент часу t (момент t довільний) є не центр Сонця, як у першому законі Кеплера, а інша точка простору, в якій був центр Сонця в деякий момент часу $t - \tau(t)$, де $\tau(t)$ – запізнення, залежне від розміщення планети і Сонця, аналогічне запізнюванню $\tau_2(t)$ і $\tau_1(t)$, що задовольняють (6) і (9). Тому обертання планети в момент часу t здійснюється не навколо центра Сонця, а навколо точки, в якій був центр Сонця в момент часу $t - \tau(t)$.

Отже, рух планет навколо Сонця не здійснюється за першим законом Кеплера (на це звернено увагу автором у [2]), кожна планета рухається (обертається) навколо "своїх" притягувальної точки, що не збігається з центром Сонця, і ці точки попарно не співпадають між собою.

Зазначимо, що у випадку класичної моделі Сонячної системи центр Сонця є спільним фокусом для всіх еліптичних орбіт планет.

У зв'язку з цим важливим є проведення досліджень щодо застосовності законів Кеплера в некласичній небесній механіці.

Мета статті – звернути увагу на те, що:

1. Рух двох тіл також не здійснюється за другим та третім законами Кеплера;
2. Для відстані $d(M_1, M_2)$ між точками M_1 і M_2 $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(M_1, M_2) = 0$ (тоді за скінченний проміжок часу відбувається зіткнення двох тіл ненульових розмірів) або $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(M_1, M_2) = +\infty$;
3. Траєкторії руху тіл нестійкі.

Обґрунтування цих тверджень наведено в [3]. Наведемо їх також із незначними змінами в наступних пунктах.

10. Закон про зростання секторної швидкості. Приділимо увагу одній важливій властивості руху матеріальних точок, наведеної автором в [3].

Використаємо систему рівнянь (10), що описує рух точок M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 з урахуванням скінченної швидкості гравітації. Положення цих точок визначається ве-

кторними функціями $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$, а їх швидкості – функціями $\vec{v}_1(t) = \dot{\vec{r}}_1(t)$ і $\vec{v}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t)$.

Вважатимемо, що траєкторії руху точок M_1 і M_2 знаходяться в деякій площині E .

З'ясуємо, як змінюється векторна функція

$$\vec{v}_\sigma(t) = \frac{1}{2}(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times (\dot{\vec{r}}_1(t) - \dot{\vec{r}}_2(t)),$$

де \times вказує на векторний добуток відповідних векторів. Зазначимо, що ця функція є секторною швидкістю руху точки M_1 відносно точки M_2 в момент часу t і в класичній механіці $\vec{v}_\sigma(t) \equiv \vec{v}_\sigma(t_0)$ (секторна швидкість є сталою [5, с. 134]). Тут t_0 – довільний (зафіксований) момент часу.

Ураховуючи властивості векторного добутку, на підставі рівнянь системи (10) отримуємо

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt} &= (\dot{\vec{r}}_1(t) - \dot{\vec{r}}_2(t)) \times (\dot{\vec{r}}_1(t) - \dot{\vec{r}}_2(t)) + \\ &+ (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times (\ddot{\vec{r}}_1(t) - \ddot{\vec{r}}_2(t)) = \\ &= (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times (\ddot{\vec{r}}_1(t) - \ddot{\vec{r}}_2(t)) = \\ &= (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \\ &\times \left(\frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \right. \\ &\left. - \vec{r}_1(t)) - \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \right. \\ &\left. - \vec{r}_2(t)) \right) = (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \\ &\times \left(\frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} ((\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \right. \\ &\left. - \vec{r}_2(t)) - (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t))) - \right. \\ &\left. - \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|^3} ((\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \right. \\ &\left. - \vec{r}_1(t)) + (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t))) \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt} = \frac{1}{2} (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times$$

$$\times \left(\frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_2(t)) + \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|^3} (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(t - \tau_1(t))) \right). \quad (14)$$

Використовуючи вектори

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t),$$

$$\overrightarrow{M_1^*M_1} = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(t - \tau_1(t))$$

і

$$\overrightarrow{M_2M_2^*} = \vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_2(t),$$

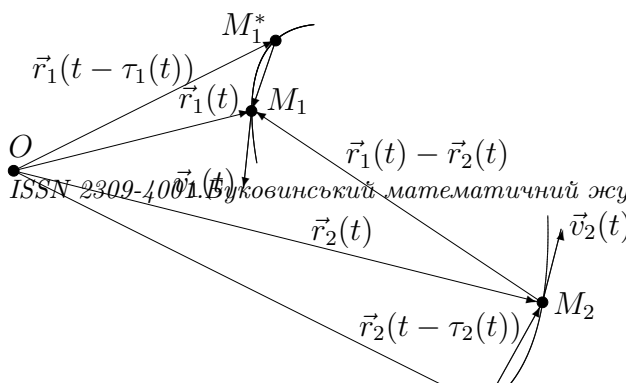
де M_1^* і M_2^* – точки простору, в яких знаходилися точки M_1 і M_2 в моменти часу $t - \tau_1(t)$ і $t - \tau_2(t)$ відповідно (див. рис. 4), а також співвідношення (7)–(9), отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt} = \\ & = \frac{1}{2} (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \left(\frac{1}{m_1 c \tau_2(t)} |\vec{F}_1(t)| \overrightarrow{M_2M_2^*} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{m_2 c \tau_1(t)} |\vec{F}_2(t)| \overrightarrow{M_1^*M_1} \right). \quad (15) \end{aligned}$$

Нехай $\tau(t) = \max\{\tau_1(t), \tau_2(t)\}$. Проаналізуємо випадок виконання співвідношення

$$\vec{v}_\sigma(s) \neq \vec{0} \quad \text{для всіх } s \in [t_0 - \tau(t_0), t_0]. \quad (16)$$

Зазначимо, що для інерціальної системи координат, що використовується, завжди можна вибрати іншу інерціальну систему координат так, щоб кут між векторами $\vec{v}_1(t_0)$ і $\vec{v}_2(t_0)$ належав проміжку $(\pi/2, \pi)$ (як на рис. 2). Для цього потрібно належним чином змінити напрямок сталої швидкості руху точки O . При переході до іншої інерціальної системи координат секторна швидкість руху точки M_1 відносно точки M_2 не зміниться, оскільки вектори $\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)$ і $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)$ інваріантні по відношенню до зміни інерціальної системи координат.



На рис. 4 M_1^* і M_2^* – точки простору, в яких знаходяться M_1 і M_2 в моменти часу $t - \tau_1(t)$ і $t - \tau_2(t)$ відповідно.

Для подальшого потрібні деякі позначення. Нехай L_{M_1, M_2} – пряма, що проходить через точки M_1 і M_2 , E_{M_1, M_2}^+ – півплощина, що містить кінець вектора $\vec{v}_1(t)$ (з початком у точці M_1) і не містить точок прямої L_{M_1, M_2} , і $E_{M_1, M_2}^- = E \setminus (E_{M_1, M_2}^+ \cup L_{M_1, M_2})$ – півплощина, що містить кінець вектора $\vec{v}_2(t)$ (з початком у точці M_2) і не містить точок прямої L_{M_1, M_2} .

Наведемо дослідження руху точок M_1 і M_2 в припущенні, що виконується

Умова А. Для всіх $t \geq t_0$ кінець вектора $\vec{v}_1(t)$ і точка M_1^* знаходяться на E_{M_1, M_2}^+ і $E_{M_1, M_2}^- \cup L_{M_1, M_2}$ відповідно, а кінець вектора $\vec{v}_2(t)$ і точка M_2^* – на E_{M_1, M_2}^- і $E_{M_1, M_2}^+ \cup L_{M_1, M_2}$ відповідно і траєкторії руху точок M_1 і M_2 не є підмножинами однієї прямої.

Вимога виконання цієї умови є природною. Наприклад, для планет Сонячної системи та Сонця ця умова виконується завдяки невеликим швидкостям руху планет та Сонця в порівнянні зі швидкістю гравітації c [12] та близькості їх траєкторій руху до еліптичних траєкторій.

Зазначимо, що траєкторії руху точок M_1 і M_2 не мають точок перегину, оскільки рух кожної точки здійснюється під впливом ненульової сили. Тому ці траєкторії є опуклими, крім випадку, коли рух точок здійснюється по прямій. Ця властивість траєкторій полегшує дослідження руху точок M_1 і M_2 .

Очевидно, що завдяки виконанню умови А пари векторів $\overrightarrow{M_2M_1}$ і $\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$, $\overrightarrow{M_2M_1}$ і $\overrightarrow{M_1^*M_1}$, а також $\overrightarrow{M_2M_1}$ і $\overrightarrow{M_2M_2^*}$ в моменти часу $t \geq t_0$ мають однакову орієнтацію (на рис. 4 ці пари векторів є правими).

Використання співвідношень (14), (15) та умови А приводить до висновку, що справджується

Твердження 1 (закон зростання секторної швидкості). Якщо виконуються співвідношення (16) та умова А, то секторна швидкість $\vec{v}_\sigma(t)$ руху точки M_1 від-

носно точки M_2 є ненульовою для всіх $t > t_0$ (завдяки (15)), причому величина цієї швидкості є строго зростаючою.

Як рухаються точки M_1 і M_2 , якщо

$$\vec{v}_\sigma(s) = \vec{0} \text{ для всіх } s \in [t_0 - \tau(t_0), t_0]? \quad (17)$$

У цьому випадку $\vec{v}_1(s) = \vec{v}_2(s)$ або $\vec{v}_1(s) \neq \vec{v}_2(s)$ і вектори $\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)$, $\vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s)$ колінеарні для кожного $s \in [t_0 - \tau(t_0), t_0]$. Звідси випливає, що в момент часу t_0 точки M_1 , M_1^* , M_2 і M_2^* знаходяться на одній прямій. Ця пряма проходить через кінці векторів $\vec{r}_1(t_0)$ і $\vec{r}_2(t_0)$, початок яких співпадає з точкою O . Тому з урахуванням (14) і (15) подальший рух точок M_1 і M_2 під дією сил тяжіння здійснюється по цій прямій.

Отже, також справджується

Твердження 2. Якщо виконується співвідношення (17), то секторна швидкість $\vec{v}_\sigma(t)$ руху точки M_1 відносно точки M_2 буде нульовою у всі моменти часу $t \geq t_0$ і рух точок M_1 і M_2 буде здійснюватися по прямій.

Зазначимо, що для секторної швидкості $\vec{v}_\sigma(t)$ руху точки M_1 відносно точки M_2 не може виконуватися співвідношення $\vec{v}_\sigma(t) \equiv \vec{v}_\sigma(t_0) \neq \vec{0}$. Якщо це співвідношення справджується, то завдяки (14) і (15) $\frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt} \equiv \vec{0}$. Тому точки M_1 , M_1^* , M_2 і M_2^* будуть знаходитися на одній прямій для всіх $t \geq t_0$, що суперечить умові А.

З'ясуємо причини зростання секторної швидкості з фізичної точки зору у випадку виконання умови А. Вважатимемо, що ця швидкість у момент часу t_0 є ненульовою. Використаємо рис. 5. На точку M_1 діє сила $\vec{F}_1(t)$, що визначається формулою (7). Ця сила і вектор $\overrightarrow{M_1M_2^*}$ мають однаковий напрямок. Аналогічно на точку M_2 діє сила $\vec{F}_2(t)$ (див. формулу (8)). Її напрямок збігається з напрямком вектора $\overrightarrow{M_2M_1^*}$. Тоді

$$\vec{F}_1(t) = \vec{F}_{1,*}(t) + \vec{F}_{1,**}(t)$$

і

$$\vec{F}_2(t) = \vec{F}_{2,*}(t) + \vec{F}_{2,**}(t),$$

де $\vec{F}_{1,*}(t)$ і $\vec{F}_{2,*}(t)$ та $\vec{F}_{1,**}(t)$ і $\vec{F}_{2,**}(t)$ – радіальні та трансверсальні складові сил $\vec{F}_1(t)$ і

$\vec{F}_2(t)$ відповідно (вектори $\vec{F}_{1,*}(t)$ і $\vec{F}_{2,*}(t)$ колінеарні вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, а вектори $\vec{F}_{1,**}(t)$ і $\vec{F}_{2,**}(t)$ ортогональні до цього вектора і утворюють гострі кути з векторами $\vec{v}_1(t)$ та $\vec{v}_2(t)$ відповідно).

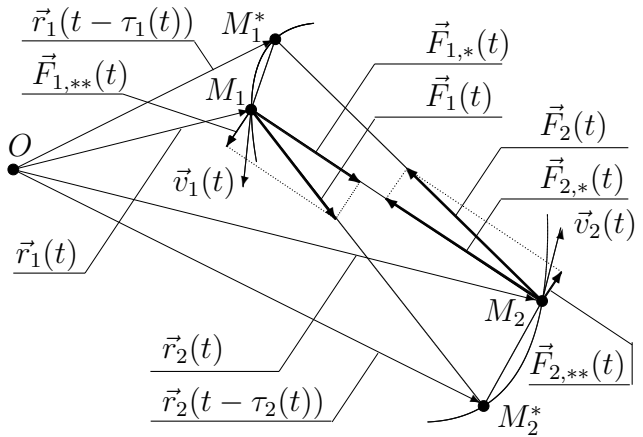


Рис. 5. Радіальні та трансверсальні складові сил $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$.

Ненульові складові $\vec{F}_{1,**}(t)$ і $\vec{F}_{2,**}(t)$ сил $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$, породжені запізнюванням гравітаційного поля, що приводить до зміщення притягувальних точок для точок M_1 і M_2 , впливають на зміну секторної швидкості руху точки M_1 відносно точки M_2 і є причиною зростання величини цієї швидкості.

Ураховуючи, що

$$\begin{aligned} & \frac{d(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times (\dot{\vec{r}}_1(t) - \dot{\vec{r}}_2(t))}{dt} = \\ & = (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times (\ddot{\vec{r}}_1(t) - \ddot{\vec{r}}_2(t)) \\ & \text{і} \\ & (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times (\ddot{\vec{r}}_1(t) - \ddot{\vec{r}}_2(t)) = \\ & = (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(t) \right) = \\ & = (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \left(\frac{1}{m_1} (\vec{F}_{1,*}(t) + \vec{F}_{1,**}(t)) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{m_2} (\vec{F}_{2,*}(t) + \vec{F}_{2,**}(t)) \right) = \\ & = (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_{1,**}(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{2,**}(t) \right) \end{aligned}$$

(тут використано колінеарність векторів $\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$, $\vec{F}_{1,*}(t)$ і $\vec{F}_{2,*}(t)$), приходимо до

висновку, що співвідношення (14) можна подати у вигляді

$$\frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt} = \frac{1}{2} (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_{1,**}(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{2,**}(t) \right).$$

Отримане співвідношення є більш зручним для користування (з фізичної точки зору), ніж співвідношення (14).

Ураховуючи, що вектори $\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ і $\frac{1}{m_1} \vec{F}_{1,**}(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{2,**}(t)$ ортогональні, отримуємо на підставі зростання величини секторної швидкості, що

$$\begin{aligned} \frac{d|\vec{v}_\sigma(t)|}{dt} &= \\ &= \frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{2} \cdot \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_{1,**}(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{2,**}(t) \right|. \end{aligned}$$

Оскільки вектори $\vec{F}_{1,**}(t)$ і $-\vec{F}_{2,**}(t)$ мають однакові напрямки (див. рис. 5), то

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_{1,**}(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{2,**}(t) \right| &= \\ &= \frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_{1,**}(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_{2,**}(t) \right| \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \frac{d|\vec{v}_\sigma(t)|}{dt} &= \frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{2} \cdot \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_{1,**}(t) \right| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_{2,**}(t) \right| \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Це співвідношення справджується й у випадку, коли виконується співвідношення (17). Тоді

$$\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_{1,**}(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_{2,**}(t) \right| \equiv 0$$

і

$$\vec{F}_{1,**}(t) \equiv \vec{F}_{2,**}(t) \equiv \vec{0}. \quad (19)$$

Тому на точки M_1 і M_2 діють лише сили $\vec{F}_{1,*}(t)$ і $\vec{F}_{2,*}(t)$ відповідно і ці точки рухаються по прямій, що проходять через кінці векторів $\vec{r}_1(t_0)$ і $\vec{r}_2(t_0)$ (початки цих векторів

збігаються з точкою O). Тотожність (19) означає, що точки M_1 , M_2 , M_1^* і M_2^* при русі знаходяться на одній прямій.

11. Неможливість руху двох точок за другим законом Кеплера. За законом зростання секторної швидкості (у випадку виконання умови А) рух точки M_1 відносно точки M_2 не може здійснюватися за другим законом Кеплера, оскільки рух точок за законами Кеплера є періодичним і $\vec{v}_\sigma(t) \equiv \vec{v}_\sigma(t_0) \neq \vec{0}$, а для кожного періодичного руху (тут також ураховується періодичність швидкостей руху точок) величина секторної швидкості не може бути зростаючою функцією.

Отже, рух Землі відносно Сонця не може здійснюватися за другим законом Кеплера.

Як насправді здійснюється рух точки M_1 відносно точки M_2 ? Відповідь на це питання дамо в наступних пунктах.

12. Прямування відстані між точками M_1 і M_2 до 0 або до $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ у випадку нульової секторної швидкості. Використаємо швидкість

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$$

руху точки M_1 відносно точки M_2 . У загальному випадку цю швидкість можна подати у вигляді суми

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_*(t) + \vec{v}_{**}(t), \quad (20)$$

де $\vec{v}_*(t)$ – радіальна складова швидкості $\vec{v}(t)$, що паралельна вектору $\overrightarrow{M_2M_1}$, і $\vec{v}_{**}(t)$ – трансверсальна складова цієї швидкості, що ортогональна до $\overrightarrow{M_2M_1}$.

Дослідимо рух точок M_1 і M_2 у випадку виконання співвідношення (17).

Згідно з твердженням 2, означенням секторної швидкості та рівностями

$$\begin{aligned} |\vec{v}_\sigma(t)| &= \frac{1}{2} |(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times (\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t))| = \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \cdot |\vec{v}_{**}(t)|, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\vec{v}_{**}(t) \equiv \vec{0}.$$

Тому $\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t) \equiv \vec{v}_*(t)$ і на точки M_1 і M_2 діють тільки сили $\vec{F}_1(t) \equiv \vec{F}_{1,*}(t)$ і

$\vec{F}_2(t) \equiv \vec{F}_{2,*}(t)$ відповідно (див. рис. 5), оскільки $\vec{F}_{1,**}(t) \equiv \vec{F}_{2,**}(t) \equiv \vec{0}$. Тоді точки M_1, M_2, M_1^* і M_2^* знаходяться на одній прямій (рис. 6).

Під дією сил $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$ можливі наступні рухи точки M_1 відносно точки M_2 :

- 1) величина $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ при $t \geq t_0$ монотонно спадає;
- 2) на деякому проміжку $[t_0, t_1]$ величина $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ зростає, а при $t \geq t_1$ спадає;
- 3) величина $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ при $t \geq t_0$ монотонно зростає.

Поведінка величини $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ залежить від векторів $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)$ і $\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)$.

Якщо $\vec{v}_1(t_0) = \vec{v}_2(t_0)$ або $\vec{v}_1(t_0) \neq \vec{v}_2(t_0)$ і напрямок вектора $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)$ збігається з напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то рух точки M_1 відносно точки M_2 буде здійснюватися згідно з першим випадком. Тоді величина $|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|$ буде монотонно зростати, оскільки напрямок вектора $\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$ збігається з напрямком вектора $\vec{F}_{1,*}(t) - \vec{F}_{2,*}(t)$. Зафіксуємо довільне як завгодно мале число $\varepsilon \in (0, |\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|)$. Завдяки зростанню $|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|$ в деякий момент часу $t_1 > t_0$ буде виконуватися рівність

$$|\vec{r}_1(t_1) - \vec{r}_2(t_1)| = \varepsilon.$$

Тому на підставі довільності вибору ε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = 0. \quad (22)$$

Якщо $\vec{v}_1(t_0) \neq \vec{v}_2(t_0)$ і напрямок вектора $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)$ збігається з напрямком вектора $\overrightarrow{M_2M_1}$, то рух точки M_1 відносно точки M_2 буде здійснюватися згідно з другим або третім випадками. Справді, під дією сили $\vec{F}_{1,*}(t)$, напрямок якої протилежний до напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, величина швидкості руху точки M_1 буде зменшуватися. Швидкість руху точки M_2 при цьому буде збільшуватися. Відстань $d(M_1, M_2)$ між точками M_1 і M_2 буде збільшуватися на деякому проміжку (t_0, t_1) (у момент часу t_1 швидкість $\vec{v}_1(t_1) - \vec{v}_2(t_1)$ буде дорівнювати $\vec{0}$). Такий рух можливий, якщо величина

$|\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)|$ невелика (ця величина залежить від $|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|$). Починаючи з моменту часу t_1 точка M_1 буде рухатися в напрямку до точки M_2 (як у першому випадку). У результаті також прийдемо до співвідношення (22).

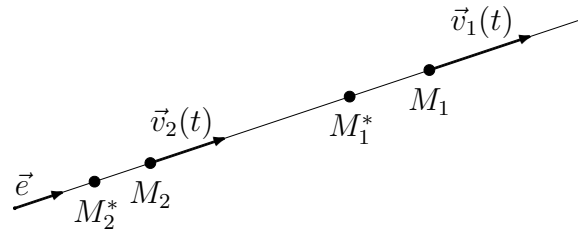


Рис. 6. Рух точок M_1 і M_2 у випадку $\vec{v}_\sigma(t) \equiv \vec{0}$.

Зауважимо, що рух точок M_1 і M_2 , для якого

$$|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)| > 0 \text{ і } |\vec{v}_1(t)| - |\vec{v}_2(t)| > 0 \quad (23)$$

для всіх $t \in (t_0, +\infty)$ (відстань між точками M_1 і M_2 монотонно зростає),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)| = 0 \quad (24)$$

і

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \in (0, +\infty), \quad (25)$$

тобто траєкторія руху точки M_1 відносно точки M_2 є обмеженою, неможливий. Справді, завдяки нерівностям

$$|\vec{v}_2(t_0)| < |\vec{v}_2(t)| < |\vec{v}_1(t)| < |\vec{v}_1(t_0)| < c \quad (26)$$

при $t > t_0$, що випливають із (23) та монотонності величин $|\vec{v}_2(t)|$ і $|\vec{v}_1(t)|$ на $[t_0, +\infty)$, нерівностям

$$\begin{aligned} & \frac{c}{c - |\vec{v}_1(t_0)|} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \geq \\ & \geq |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)| \geq |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \geq |\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)| \geq \\ & \geq \frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{2}, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (28)$$

та завдяки (25) виконується співвідношення

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq t_0} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t - \tau_2(t))| + \\ & + \sup_{t \geq t_0} |\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t - \tau_1(t))| < +\infty. \end{aligned} \quad (29)$$

Нерівності (27) випливають з (26) та того, що для всіх $t \geq t_0$

$$\left| \overrightarrow{M_1 M_2^*} \right| \geq \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right|$$

і

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{M_1 M_2^*} \right| &= \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| + \left| \overrightarrow{M_2 M_2^*} \right| \leq \\ &\leq \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| + \frac{|\vec{v}_2(t)|}{c} \left| \overrightarrow{M_1 M_2^*} \right| \leq \\ &\leq \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| + \frac{|\vec{v}_1(t_0)|}{c} \left| \overrightarrow{M_1 M_2^*} \right|, \end{aligned}$$

а нерівності (28) – з того, що для всіх $t \geq t_0$

$$\left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| \geq \left| \overrightarrow{M_2 M_1^*} \right| = \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| - \left| \overrightarrow{M_1 M_1^*} \right|$$

і

$$\left| \overrightarrow{M_1 M_1^*} \right| \leq \tau_1(t)c = \left| \overrightarrow{M_2 M_1^*} \right|.$$

Тому на підставі формул (7), (8), співвідношення (29) та того, що вектори $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$ мають протилежні напрямки, для деякого числа $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \delta &< \inf_{t \geq t_0} \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(t) \right| = \\ &= \inf_{t \geq t_0} \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(t) \right| \right). \quad (30) \end{aligned}$$

Ураховуючи рівняння системи (10), отримуємо, що для всіх достатньо великих $t > t_0$

$$\begin{aligned} (\vec{v}_1(t+1) - \vec{v}_2(t+1)) - (\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)) &= \\ &= \int_t^{t+1} \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Тоді на підставі (30)

$$\left| (\vec{v}_1(t+1) - \vec{v}_2(t+1)) - (\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)) \right| > \delta$$

для всіх достатньо великих $t > t_0$, що неможливо в силу (24).

Отже, рух точок M_1 і M_2 , для якого виконуються співвідношення (23)–(25), неможливий.

Нарешті, приділимо увагу третьому випадку руху точок M_1 і M_2 , коли величина $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ монотонно зростає на проміжку

$[t_0, +\infty)$. Позначимо через \vec{e} вектор, напрямком якого збігається з напрямком вектора $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)$ і $|\vec{e}| = 1$ (див. рис. 6).

Покажемо, що якщо

$$|\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)|^2 > \frac{2G(4m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}, \quad (31)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = +\infty. \quad (32)$$

Ураховуючи рівняння системи (10), отримуємо, що

$$\begin{aligned} (\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)) &\equiv (\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)) + \\ &+ \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right) ds. \quad (33) \end{aligned}$$

Згідно з вимогами до $\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$, $\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$, $\vec{F}_1(t)$, $\vec{F}_2(t)$ і \vec{e}

$$\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) \equiv |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \vec{e},$$

$$\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t) \equiv |\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)| \vec{e}$$

і

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(t) &\equiv \\ &\equiv - \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(t) \right| \vec{e} \equiv \\ &\equiv - \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(t) \right| \right) \vec{e}. \end{aligned}$$

Тоді завдяки (33)

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)| &\equiv |\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)| - \\ &- \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(s) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(s) \right| \right) ds, \end{aligned}$$

і, отже, на підставі неперервності функції $\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(t) \right|$ на $[t_0, +\infty)$

$$\frac{d|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|}{dt} \equiv - \frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(t) \right| - \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(t) \right|.$$

Звідси отримуємо, що

$$\frac{d|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|^2}{dt} \equiv$$

$$\equiv -2 \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(t) \right| \right) |\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|$$

i

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|^2 &\equiv |\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)|^2 - \\ &- 2 \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(s) \right| + \right. \\ &\left. + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(s) \right| \right) |\vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s)| ds. \end{aligned} \quad (34)$$

Оцінимо зверху інтеграл

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(s) \right| + \right. \\ &\left. + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(s) \right| \right) |\vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s)| ds. \end{aligned}$$

Використовуючи формули (7) і (8), нерівності (27) і (28) та співвідношення

$$|\vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s)| ds = d|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)|, \quad s \geq t_0,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(t) \right| &= \frac{Gm_2}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t - \tau_2(t))|^2} \leq \\ &\leq \frac{Gm_2}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^2}, \\ \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(t) \right| &= \frac{Gm_1}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t - \tau_1(t))|^2} \leq \\ &\leq \frac{4Gm_1}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^2} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(s) \right| + \right. \\ &\left. + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(s) \right| \right) |\vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s)| ds \leq \\ &\leq \left(\frac{G(4m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|} - \frac{G(4m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|} \right). \end{aligned}$$

Звідси та (34) випливає, що

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|^2 &\geq \\ &\geq |\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)|^2 - \frac{2G(4m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}. \end{aligned}$$

Тому у випадку виконання співвідношення (31)

$$\inf_{s \geq t_0} |\vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s)| > 0.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| &\geq |\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)| + \\ &+ (t - t_0) \inf_{s \geq t_0} |\vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s)|, \quad t \geq t_0, \end{aligned}$$

то співвідношення (32) справджується.

Таким чином, у випадку виконання співвідношення (31) відстань між точками M_1 і M_2 прямує до $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Отже, прямування відстані між точками M_1 і M_2 до 0 або до $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ у випадку нульової секторної швидкості обґрунтовано.

13. Неможливість обмеженого руху точки M_1 відносно точки M_2 , зближення яких не може бути як завгодно малим, у випадку ненульової секторної швидкості. Зафіксуємо довільні додатні числа a, a_1, a_2 і b . Нехай $a_1 < a_2$ і $b < c$.

Припустимо, що існує такий рух точок M_1 і M_2 , для якого

$$|\vec{r}_1(t)| \leq a, \quad t \geq t_0, \quad (35)$$

$$a_1 \leq |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \leq a_2, \quad t \geq t_0, \quad (36)$$

$$|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)| \leq b, \quad t \geq t_0, \quad (37)$$

$$\max\{|\vec{v}_1(t)|, |\vec{v}_2(t)|\} \leq b, \quad t \geq t_0, \quad (38)$$

i

$$0 \neq |\vec{v}_\sigma(t_0)|. \quad (39)$$

Тоді завдяки (21) для трансверсальної складової $\vec{v}_{**}(t)$ швидкості $\vec{v}(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$ руху точки M_1 відносно точки M_2 буде виконуватися співвідношення

$$\frac{2|\vec{v}_\sigma(t_0)|}{a_2} \leq \frac{2|\vec{v}_\sigma(t)|}{a_2} \leq |\vec{v}_{**}(t)| \leq \frac{2|\vec{v}_\sigma(t)|}{a_1} \quad (40)$$

для всіх $t \geq t_0$ і тому

$$0 < \inf_{t \geq t_0} |\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|. \quad (41)$$

Завдяки нерівностям (35)–(38) і (41) існують такі додатні числа $\Delta, \Lambda_1, \Lambda_2$ ($\Lambda_1 < \Lambda_2$) і Υ , що

$$\sup_{t \geq t_0} \{\tau_1(t), \tau_2(t)\} \leq \Delta \quad (42)$$

i

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\leq \inf_{t \geq t_0} |\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)| + \\ &+ \inf_{t \geq t_0} |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)| \leq \\ &\leq \sup_{t \geq t_0} |\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)| + \\ &+ \sup_{t \geq t_0} |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)| \leq \Lambda_2 \end{aligned} \quad (43)$$

i

$$\sup_{t \geq t_0} \left\{ \left| \vec{F}_1(t) \right|, \left| \vec{F}_2(t) \right| \right\} \leq \Upsilon, \quad (44)$$

а завдяки зростанню секторної швидкості та рівності (18)

$$\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_{1,**}(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_{2,**}(t) \right| > 0, \quad t \geq t_0. \quad (45)$$

Це співвідношення означає, що кутова швидкість обертання точки M_1 навколо точки M_2 ненульова у всі моменти часу $t \geq t_0$.

Покажемо, що

$$\inf_{t \geq t_0} \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_{1,**}(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_{2,**}(t) \right| \right) > 0. \quad (46)$$

Розглянемо множину \mathfrak{M} упорядкованих четвірок $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t))$ неперервних на проміжку $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ функцій, де $\vec{v}_1(t) = \dot{\vec{r}}_1(t)$ і $\vec{v}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t)$, кожна з яких описує рух точок M_1 і M_2 на проміжку $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ і задовольняє співвідношення (35)–(44).

Завдяки співвідношенням (35)–(44) та рівнянням системи (10), що описує рух точок M_1 і M_2 , четвірки $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t))$ функцій із множини \mathfrak{M} рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні с. 134 Kolmogorov + Fomin на проміжку $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ і множина \mathfrak{M} є замкненою. Тому на підставі узагальненої теореми Арцела [13] обмежена і замкнена множина \mathfrak{M} буде компактною множиною. Зазначимо, що завдяки (7) і (8) та рівнянням системи (44) скалярна величина

$$\min_{t \in [t_0, t_0 + \Delta]} \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_{1,**}(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_{2,**}(t) \right| \right) \quad (47)$$

неперервно залежить від $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\vec{v}_1(t)$ і $\vec{v}_2(t)$ ($(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t)) \in \mathfrak{M}$). Тому за теоремою Вейерштрасса про найбільше та найменше значення (див. [11,

с. 176] і [14, с. 34]) існує така точка $(\vec{r}_1^*(t), \vec{r}_2^*(t), \vec{v}_1^*(t), \vec{v}_2^*(t)) \in \mathfrak{M}$, в якій величина (47) досягає найменше значення. Це значення на підставі умови А не може бути нульовим. Тому для розглянутого на початку пункту руху точок M_1 і M_2 , що описується векторними функціями $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$, виконується співвідношення (46). Таким чином, $|\vec{v}_\sigma(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, що суперечить (40) та нерівностям $|\vec{v}_{**}(t)| < c$, $t \geq t_0$.

Отже, припущення про існування обмеженого руху точки M_1 відносно точки M_2 , зближення яких не може бути як завгодно малим, є хибним.

Як тоді рухається точка M_1 відносно точки M_2 у випадку виконання умови А?

Твердження 3. $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} d(M_1, M_2) = +\infty$ або $\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} d(M_1, M_2) = 0$ (тоді за скінченний проміжок часу відбудеться зіткнення двох тіл ненульових розмірів).

Звідси випливає, що рух точки M_1 відносно точки M_2 у випадку виконання умови А не може здійснюватися за третім законом Кеплера (оскільки траєкторія руху точки M_1 відносно точки M_2 не є еліпсом).

Отже, на підставі результатів пунктів 8–12 та цього пункту *рух планет Сонячної системи зі скінченною швидкістю гравітації не здійснюється за законами Кеплера.*

Завдяки виконанню співвідношення (45) (тоді величина секторної швидкості руху точки M_1 відносно точки M_2 є строго зростаючою) траєкторії руху точки M_1 відносно точки M_2 в твердженні 3 на скінченних проміжках часу є спіралеподібними.

14. Існування необмежених спіралеподібних траєкторій. Спочатку покажемо, що *множина траєкторій руху точок M_1 і M_2 , кожна з яких не знаходиться на прямій і $d(M_1, M_2) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, є не порожньою.*

Використаємо співвідношення (20) про зображення швидкості $\vec{v}(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$ за допомогою радіальної та трансверсальної складових $\vec{v}_*(t)$ і $\vec{v}_{**}(t)$.

Розглянемо вектори \vec{a}_1 і \vec{a}_2 , що задовольняють умовам, наведеним нижче.

Покажемо, що якщо вектори $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ і $\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)$ мають однаковий напрямок, величини $|\vec{a}_1 - \vec{a}_2|$ і $|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|$ є достатньо великими, величина

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \sup_{s \in [t_0 - \tau_1(t_0), t_0]} |\vec{v}_1(s) - \vec{a}_1| + \\ & + \sup_{s \in [t_0 - \tau_2(t_0), t_0]} |\vec{v}_2(s) - \vec{a}_2| + \\ & + \sup_{s \in [t_0 - \tau_1(t_0), t_0]} |\vec{r}_1(s) - \vec{r}_1(t_0)| + \\ & + \sup_{s \in [t_0 - \tau_2(t_0), t_0]} |\vec{r}_2(s) - \vec{r}_2(t_0)| \end{aligned} \quad (48)$$

є достатньо малою,

$$\vec{v}_\sigma(t_0) \neq \vec{0} \quad (49)$$

і справджується нерівність

$$(|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon)^2 > \frac{16G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}, \quad (50)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = +\infty. \quad (51)$$

Використаємо співвідношення

$$\frac{d(\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t))}{dt} = \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(t), \quad t \geq t_0, \quad (52)$$

що згідно з (7) і (8) впливає з рівнянь системи (10). Завдяки (52) для всіх $t \geq t_0$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right) ds. \quad (53)$$

Позначимо через (\vec{a}, \vec{b}) скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} .

Помноживши обидві частини (53) скалярно на $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$, отримаємо, що для $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{v}(t)) = & (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{v}(t_0)) + \\ & + (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right) ds). \end{aligned}$$

Звідси впливає, що для всіх $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{v}_*(t)) = & (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{a}_1 - \vec{a}_2) + \\ & + (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{v}(t_0) - (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)) + \end{aligned}$$

$$+ (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right) ds),$$

і, отже, для всіх $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| \cdot |\vec{v}_*(t)| = & |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 + \\ & + (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{v}(t_0) - (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)) + \\ & + (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right) ds). \end{aligned} \quad (54)$$

Завдяки тому, що вектори $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ і $\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)$ мають однаковий напрямок, точки M_1 і M_2 притягуються під впливом сили тяжіння, величина ε є достатньо малою і функція $\vec{v}(t)$ є неперервною, існує проміжок $[t_0, t_1)$, на якому величина $|\vec{v}_*(t)|$ монотонно спадає і

$$|\vec{v}_*(t)| > 0 \quad \text{для всіх } t \in [t_0, t_1). \quad (55)$$

Припустимо, що

$$|\vec{v}_*(t_1)| = 0. \quad (56)$$

На підставі (48) і (54) для всіх $t \in [t_0, t_1)$

$$\begin{aligned} |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| \cdot |\vec{v}_*(t)| \geq & |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 - |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| \varepsilon - \\ & - |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| \int_{t_0}^t \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right| ds. \end{aligned}$$

Тому для всіх $t \in [t_0, t_1)$

$$\begin{aligned} |\vec{v}_*(t)| \geq & |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon - \\ & - \int_{t_0}^t \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right| ds. \end{aligned} \quad (57)$$

Оцінимо інтеграл

$$\int_{t_0}^t \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right| ds, \quad \text{врахувавши рівності}$$

$$\begin{aligned} |d|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)|| = & \\ = & |d((x_1(s) - x_2(s))^2 + (y_1(s) - y_2(s))^2 + \\ & + (z_1(s) - z_2(s))^2)^{1/2}| = \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{(\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s), \vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s))}{|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)|} ds \right| =$$

$$= |\vec{v}_*(s)| ds, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (58)$$

і те, що завдяки (58) для всіх $t \in [t_0, t_1]$

$$\int_{t_0}^t \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right| ds =$$

$$= \int_{t_0}^t \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right| \frac{|d|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)||}{|\vec{v}_*(s)|}.$$

Оскільки

$$\left| \overrightarrow{M_1 M_1^*} \right| + \left| \overrightarrow{M_1^* M_2} \right| \geq \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right|,$$

$$\left| \overrightarrow{M_2 M_2^*} \right| + \left| \overrightarrow{M_2^* M_1} \right| \geq \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right|$$

(завдяки нерівності трикутника),

$$\left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| = |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|,$$

$$\left| \overrightarrow{M_1^* M_2} \right| = |\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|,$$

$$\left| \overrightarrow{M_2^* M_1} \right| = |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|$$

і

$$\left| \overrightarrow{M_1 M_1^*} \right| \leq \left| \overrightarrow{M_1^* M_2} \right|, \quad \left| \overrightarrow{M_2 M_2^*} \right| \leq \left| \overrightarrow{M_2^* M_1} \right|$$

(на підставі того, що швидкості руху точок M_1 і M_2 не можуть бути більшими c), то

$$|\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)| \geq \frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{2}$$

і

$$|\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)| \geq \frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{2}, \quad t \geq t_0.$$

Тому для всіх $t \geq t_0$

$$\left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(t) \right| \leq \frac{|\vec{F}_1(t)|}{m_1} + \frac{|\vec{F}_2(t)|}{m_2} =$$

$$= \frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|^2} +$$

$$+ \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|^2} \leq \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^2}.$$

Отже, на підставі (55), (58) та того, що $|\vec{v}_*(t)|$ монотонно спадає на $[t_0, t_1]$

$$\int_{t_0}^t \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right| ds =$$

$$= \int_{t_0}^t \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right| \frac{|d|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)||}{|\vec{v}_*(s)|} \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^t \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)|^2} \frac{|d|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)||}{|\vec{v}_*(s)|} \leq$$

$$\leq \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{v}_*(t)|} \left| \frac{1}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|} - \frac{1}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|} \right|, \quad t \in [t_0, t_1],$$

і завдяки (57)

$$|\vec{v}_*(t)| \geq |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon - \frac{1}{|\vec{v}_*(t)|} \left| \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|} - \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|} \right|, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (59)$$

Завдяки (55) величина $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ строго зростає на $[t_0, t_1]$. Тому в силу (59)

$$|\vec{v}_*(t)| \geq |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon - \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{v}_*(t)| \cdot |\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (60)$$

Оцінімо знизу величину $|\vec{v}_*(t)|$ на проміжку $[t_0, t_1]$. На підставі (55) і (60)

$$|\vec{v}_*(t)|^2 - (|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon) |\vec{v}_*(t)| \geq$$

$$\geq - \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Тому для всіх $t \in [t_0, t_1]$

$$\left(|\vec{v}_*(t)| - \frac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon}{2} \right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{(|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon)^2}{4} - \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}.$$

Отже, з урахуванням (50), (57) і (60)

$$|\vec{v}_*(t)| \geq \lambda, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (61)$$

де

$$\lambda = \frac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{(|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon)^2}{4} - \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}}.$$

Оскільки функція $|\vec{v}_*(t)|$ неперервна і число λ додатне, то (61) суперечить (56).

Таким чином, припущення про виконання співвідношення (56) є хибним. Отже, нерівність (55) виконується при $t_1 = +\infty$.

Далі, очевидно, що завдяки (61) справджується співвідношення (51).

Отже, множина траєкторій руху точок M_1 і M_2 , для яких $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(M_1, M_2) = +\infty$ і $\vec{v}_\sigma(t) \neq \vec{0}$, $t \geq t_0$, є не порожньою. Траєкторії руху точки M_1 відносно точки M_2 цієї множини на підставі (49) (тоді $|\vec{v}_{**}(t)| > 0$ для всіх $t \geq t_0$) є спіралеподібними.

Зазначимо, що в реальному просторі (зі скінченною швидкістю гравітації!) *рух точки M_1 відносно точки M_2 , якщо траєкторія руху необмежена, є нестійким* [3]. Якщо траєкторія руху одного тіла відносно іншого тіла обмежена, то за скінченний проміжок часу відбувається зіткнення тіл. У цьому випадку рух тіл також можна вважати нестійким, оскільки з моменту їх зіткнення відбуваються суттєві якісні зміни станів тіл.

15. Додаткові зауваження, висновки та літературні вказівки. 1. Систему диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом (13) можна використовувати для опису руху планет. Ця система точніше описує динаміку Сонячної системи, ніж система диференціальних рівнянь (2), що не враховує скінченну швидкість гравітації. Для опису руху планет на великих проміжках часу краще використовувати систему (13), ніж систему (2). При кількісному описуванні руху планет не обійтись без потужної обчислювальної техніки. При цьому потрібно звертати увагу на точність даних про розміщення планет та їх швидкостей не в якийсь конкретний момент часу (як у класичній небесній механіці), а на проміжках часу (див. умови (11) і (12)), довжини яких

можуть бути достатньо великими (наприклад, у випадку дослідження руху Землі або Плутона навколо Сонця (без урахування дії на них інших планет) довжини цих проміжків дорівнюють близько 8, 32 хв. і 328, 68 хв. відповідно).

Побудована теорія дасть змогу точніше описувати рух комет та передбачати такі явища як затемнення планет, парад планет і таке інше.

2. Наведені в п. 4–8 дослідження є важливими для спостережень за рухом астероїдів та передбачень про траєкторії їх руху, оскільки зіткнення астероїдів із планетами призводять до небажаних наслідків.

3. Ці дослідження полегшать розв'язання проблем переміщення штучних об'єктів у межах Сонячної системи, оскільки дають змогу будувати точніші моделі їх руху.

4. Закони про рух планет Сонячної системи відкриті Кеплером у 1605, 1601 та 1618 рр. відповідно [6, с. 261, 262].

5. Наведені дослідження про рух двох тіл вказують на те, що в реальному світі, в якому швидкість гравітації є скінченною, небесні тіла рухаються за законами, що відрізняються від законів, покладених в основу класичної небесної механіки.

6. Для тіл характерними є спіралеподібні траєкторії руху. Такого типу траєкторіям у небесній механіці не приділено належної уваги, оскільки вони не узгоджуються із законами Кеплера. Множина таких рухів не є порожньою, що підтверджується, наприклад, спіральними галактиками, до яких відносяться, зокрема, наша Галактика і Туманність Андромеди. Подвійні зірки, зірка та чорна діра також рухаються не за законами Кеплера (згідно з викладеними в статті дослідженнями), а рухаються по спіралеподібних або прямолінійних кривих.

7. За допомогою спостережень за небесними об'єктами важко помітити відхилення реальних траєкторій їх руху від траєкторій руху, знайдених з урахуванням законів Кеплера. Такі відхилення можуть бути дуже малими (відхилення залежать від станів небесних об'єктів у "початковий момент" часу). Наприклад, відстань між Землею і Сон-

цем за рік збільшується приблизно на 15 см, а між Землею і Місяцем – на 3,82 см [?].

Відхилення від еліптичних (за Кеплером) траєкторій руху двох тіл викликане зростанням секторної швидкості руху одного тіла відносно іншого. Зазначимо, що збільшення відстаней між Землею і Сонцем та між Місяцем і Землею авторами статті [?] пояснюється припливо-відливною взаємодією. Однак, в ідеальному випадку, коли маси тіл зосереджені в центрах мас (тоді припливо-відливна взаємодія відсутня), згідно з викладеною теорією руху тіл також можливі збільшення відстані між тілами (а можливі і зменшення відстані між ними). Це говорить про неповноту в [?] причин збільшення відстані між небесними об'єктами і що використання для цих цілей закону про зростання секторної швидкості заслуговує уваги.

Такі відхилення (15 см та 3,82 см) в порівнянні з відстанями від Землі до Сонця та до Місяця ($1,495978706960 \times 10^{11} \pm 0,1$ м та $3,844 \times 10^8$ м) є надзвичайно малими. Перенесення законів Кеплера на реальні системи (зі скінченною швидкістю гравітації), що аналогічні (за розмірами) Сонячній системі, не приводять до великих похибок у випадку малих проміжків часу. Однак у випадку великих проміжків часу (це в першу чергу стосується руху тіл із необмеженими траєкторіями) похибки можуть бути достатньо великими.

8. Використання звичайних диференціальних рівнянь (1) для дослідження динаміки руху двох тіл на великих проміжках часу може привести до значних розбіжностей між отриманими (у процесі досліджень) та реальними рухами тіл. Такі розбіжності будуть відсутні у випадку використання диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом (10). При цьому не можна не враховувати нестійкість необмежених траєкторій руху тіл.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Слюсарчук В. Ю. (2018). Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації: Матеріали міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми матема-

тики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня, 2018 р., Чернівці, ЧНУ, 98.

2. Слюсарчук, В. Ю. (2018). Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації: Нелінійні коливання, 21(2), 238–261.
3. Слюсарчук, В. Ю. (2018). Некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спричинені скінченністю швидкості гравітації: Нелінійні коливання, 21(3), 397–419.
4. Слюсарчук В. Ю. (2018). Одне застосування диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом: Буковинський математичний журнал, 6 (1–2), 104–111.
5. Голубева О. В. (1968). Теоретическая механика. Москва: Высшая школа.
6. Белый Ю. А. (1971). Иоганн Кеплер (1571–1630). Москва: Наука.
7. Брумберг В. А. (1972). Релятивистская небесная механика. Москва: Наука.
8. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. Н. (2002). Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: УРСС.
9. Мультион Ф. (1935). Введение в небесную механику. Москва–Ленинград: ОНТИ НКТП СС-СР.
10. Копейкин С. М., Фомалонт Э. (2004). Фундаментальный предел скорости гравитации и его измерение. Земля и Вселенная. 3. <http://ziv.telescopes.ru/rubric/hypothesis/?pub=1>
11. Фихтенгольц Г. М. (1966). Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. I. Москва: Наука.
12. Цесевич В. П. (1984). Что и как наблюдать на небе. Москва: Наука.
13. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. (1968). Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука.
14. Садовничий В. А. (1986). Теория операторов. Москва: Изд-во Моск. ун-та.
15. Takaho Miura, Hideyoshi Arakida, Masumi Kasai, Shuichi Kuramata. (2009). Secular increase of the Astronomical Unit: a possible explanation in terms of the total angular momentum conservation law: Publications of the Astronomical Society of Japan, 61 (6), 1247–1250. DOI: 10.1093/pasj/61.6.1247