УДК 517.959

©2018 В.В. Городецький, Р.С. Колісник, О.В. Мартинюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Знайдено наближені розв'язки задачі Коші для диференціально-операторного рівняння гіперболічного типу з виродженням у гільбертовому просторі. В термінах таких наближень дається характеристика класів Жевре невід'ємного самоспряженого оператора.

Ключові слова: задача Коші; еволюційні рівняння гіперболічного типу; класи Жевре; узагальнені многочлени Лагерра.

We found the approximate solutions of the Cauchy problem for a differential-operator equation of hyperbolic type with degeneration in Hilbert space. In terms of such approximations a characteristic of the Gevrey classes of a nonnegative self-adjoint operator is given.

Keywords: Cauchy problem, evolution equations of hyperbolic type, Gevrey classes; generalized Laguerre polynomials.

Вступ. Багато задач математичної фізики можна подати у вигляді задачі Коші для еволюційного рівняння гіперболічного типу

$$u''(t) + t^\gamma A u(t) = 0,$$

$$t \in [0,T], u(0) = f, u'(0) = g,$$

де A – невід'ємний самоспряжений оператор зі щільною областю визначення в сепарабельному гільбертовому просторі. У працях А.В. Бабина [1–4] знайдено зображення розв'язку зазначеної задачі (у випадку $\gamma = 0$, $g = 0$) у вигляді $u(t) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(t,A)f$, де $P_n(t,\lambda)$ – поліном степеня n змінної λ при фіксованому t за допомогою методу вагового наближення функцій на півосі. У вказаних працях за шукані поліноми беруться поліноми, які наближують на півосі $(0,+\infty)$ функцію $\cos(t\sqrt{\lambda})$, $\lambda \geq 0$, з вагою $\operatorname{ch}(R\sqrt{\lambda})$, $\lambda \geq 0$, припускаючи при цьому, що f належить до області визначення оператора $\operatorname{ch}(R\sqrt{A})$. Одержано оцінку швидкості збіжності: похибка $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|u(t) - P_n(t,A)f\|$ спадає як $\exp(-\sigma n)$, $\sigma > 0$.

У працях [5, 6] використовується інший метод побудови поліномів P_n. Він базується на наближенні функцій на півосі частинними сумами їхніх рядів Фур'є, побудованими за ортогональними многочленами Лагерра, що утворюють ортонормований базис у просторі $L_2((0,\infty), \lambda^\alpha \exp(-\mu\lambda))$, де $\alpha > -1$, $\mu > 0$ – числа, залежні від початкового елемента f. Цей метод дав точнішу, ніж у працях [1–4] оцінку відхилення, але у вужчому класі початкових даних (класі H_a аналітичних векторів оператора A). У цій роботі знайдена оцінка збіжності $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|u(t) - P_n(t,A)f\|$ у випадку, коли f належить до значно ширшого класу початкових даних, ніж H_a, а саме, до класу Жевре $G_{\{\beta\}}(A)$, $1 < \beta \leq 2$ ($G_{\{1\}}(A) = H_a$), пов'язаного з оператором A. Одночасно дається характеристика класу Жевре $G_{\{\beta\}}(A)$, $1 < \beta \leq 2$, з точки зору наближення розв'язку $u(t)$ вказаної задачі Коші функціями вигляду $P_n(t,A)f \equiv u_n(t)$ у випадку, коли показник виродження $\gamma \neq 0$.

Результати цієї статті були представлені на науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича [7].

1. Класи Жевре самоспряженого оператора. Нехай A – невід'ємний самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$ та розкладом одиниці E_λ, $\lambda \geq 0$. Введемо деякі класи елементів, пов'язаних з оператором A. Позначимо $H_\infty(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{pr} H_n(A)$, $H_n(A) = \mathcal{D}(A^n)$ ($\mathcal{D}(A)$ – область визначення оператора A^n), $(\varphi,\psi)_{H_n} = (\varphi,\psi) + (A^n\varphi, A^n\psi)$,

$$G_{\beta,B}(A) := \{\varphi \in H_\infty(A) \Big| \exists c, B > 0 :$$

$$\|A^n\varphi\| \leq cB^n n^{n\beta}, n \in \mathbb{Z}_+, \beta > 0\}$$

Простір $G_{\beta,B}(A)$ є банаховим відносно норми

$$\|\varphi\|_{\beta,B} = \sup_n (\|A^n\varphi\|/(B^n n^{n\beta})).$$

Простір $G_{\{\beta\}}(A) := \lim_{B\to\infty} \mathrm{ind}\, G_{\beta,B}(A)$ називається простором Жевре порядку β, побудованим за оператором A. Якщо $\beta = 1$, то $G_{\{1\}}(A)$ називають ще простором аналітичних векторів оператора A. Відомо (див. [8, с. 73–75], що $G_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\mu>0} \mathcal{D}(\exp(\mu A^{1/\beta}))$, при цьому $\mathcal{D}(\exp(\mu A^{1/\beta}))$ утворює банаховий простір відносно норми

$$\|\varphi\|^2_{H_\mu} = \int_0^\infty e^{2\mu\lambda^{1/\beta}} d(E_\lambda\varphi,\varphi).$$

Наприклад, якщо $H = L_2(I)$, де I – деякий інтервал дійсної вісі, A – модуль оператора диференціювання, то клас Жевре $G_{\{\beta\}}(A)$ порядку β при $\beta > 1$ складається з усіх нескінченно диференційовних на I функцій φ, які задовольняють умову: $\exists c > 0\, \exists B > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in I$:

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq cB^n n^{n\beta}, \beta > 1.$$

Простір $G_{\{1\}}(A)$ у цьому випадку складається з усіх аналітичних на проміжку I функцій, тобто функцій, які допускають аналітичне продовження в певну область комплексної площини, яка містить інтервал I.

2. Задача Коші. Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$u''(t) + t^\gamma A u(t) = 0, \quad t \in [0,T], \qquad (1)$$

де γ – дійсне невід'ємне число. Функція u: $[0,T] \to \mathcal{D}(A)$ називається розв'язком рівняння (1), якщо вона двічі сильно неперервно диференційовна і задовольняє рівняння (1). Як доведено в [7], для $\{f,g\} \subset \mathcal{D}(A)$ існує єдиний розв'язок рівняння (1), який задовольняє початкові умови

$$u(0) = f, \quad u'(0) = g. \qquad (2)$$

При цьому розв'язок задачі Коші (1), (2) зображається у вигляді

$$u(t) = G_1(t,A)f + G_2(t,A)g = \int_0^\infty G_1(t,\lambda)dE_\lambda f +$$

$$+ \int_0^\infty G_2(t,\lambda)dE_\lambda g,$$

де

$$G_1(t,\lambda) = \pi\tau^\tau \lambda^{\tau/2} t^{1/2} (\Gamma(\tau)\sin\pi\tau)^{-1} \times$$

$$\times J_{-\tau}(2\tau\lambda^{1/2}t^{1/(2\tau)}),$$

$$G_2(t,\lambda) = \Gamma(\tau)\tau^{1-\tau} t^{1/2}\lambda^{-\tau/2} J_\tau(2\tau\lambda^{1/2}t^{1/(2\tau)}).$$

Тут $\tau = (\gamma+2)^{-1}$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція, $J_\nu(\cdot)$ – функція Бесселя першого роду порядку ν, $\nu \in \{-\tau,\tau\}$.

Зауважимо, що коли в (1) відсутнє виродження, тобто $\gamma = 0$, то $G_1(t,\lambda) = \cos(t\sqrt{\lambda})$, $G_2(t,\lambda) = \lambda^{-1/2}\sin(t\sqrt{\lambda})$, а

$$u(t) = \cos(t\sqrt{A})f + A^{-1/2}\sin(t\sqrt{A})g.$$

Відомо [8, с. 260–261], шо розклад функції

$$F(\lambda) = (\lambda a)^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{\lambda a}),$$

$$\lambda \in (0,\infty), a > 0, \alpha > -1,$$

в ряд Фур'є за многочленами $\widehat{L}_{\alpha,1,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, має вигляд

$$(\lambda a)^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{\lambda a}) =$$

$$= e^{-a} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k a^k}{\sqrt{k!\Gamma(k+\alpha+1)}} \widehat{L}_{\alpha,1,k}(\lambda).$$

Символом $\widehat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda)$ ($\lambda \in (0,+\infty)$, $\alpha > -1$, $\mu > 0$ – фіксовані параметри) позначатимемо узагальнені многочлени Лагерра, які утворюють ортонормований базис у гільбертовому просторі $L_2((0,\infty),\lambda^\alpha\exp(-\mu\lambda))$.

Звідси дістаємо, що

$$(\lambda\mu a)^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{\lambda\mu a}) =$$

$$= \frac{e^{-a}}{\sqrt{\mu^{1+\alpha}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^k}{\sqrt{k!\Gamma(k+\alpha+1)}}\widehat{L}_{\alpha,\mu,k}(\lambda), \quad (3)$$

де $\mu > 0$ – фіксований параметр. Поклавши в (3) $\alpha = -\tau$, $\sqrt{\mu a} = \tau^{1/(2\tau)}$, дістанемо, що функція $G_1(t,\lambda)$ розкладається в ряд Фур'є за многочленами $\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}$ так:

$$G_1(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t,\mu,\gamma)\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}(\lambda), \quad \lambda > 0, \quad (4)$$

де

$$a_k(t,\mu,\gamma) = \frac{\pi e^{-\delta}(-1)^k\delta^k}{\Gamma(\tau)\sin\pi\tau\sqrt{\mu^{1-\tau}k!\Gamma(k-\tau+1)}},$$

$$\delta = \frac{t^{\gamma+2}}{\mu(\gamma+2)^2}.$$

Аналогічно знаходимо, що функція $G_2(t,\lambda)$ розкладається в ряд Фур'є за многочленами $\widehat{L}_{\tau,\mu,k}$ і цей розклад має вигляд

$$G_2(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t,\mu,\gamma)\widehat{L}_{\tau,\mu,k}(\lambda), \quad \lambda > 0, \quad (5)$$

де

$$b_k(t,\mu,\alpha) = \frac{t\tau\Gamma(\tau)e^{-\delta}(-1)^k\delta^k}{\sqrt{\mu^{1+\tau}k!\Gamma(k+\tau+1)}}.$$

Позначимо через $P^{(1)}_{\mu,t,n}$, $P^{(2)}_{\mu,t,n}$ відповідно n-і частинні суми рядів Фур'є функцій G_1, G_2 (див. (4), (5)) за многочленами $\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}$, $\widehat{L}_{\tau,\mu,k}$; при цьому $P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda) \to G_1(t,\lambda)$, $P^{(2)}_{\mu,t,n} \to G_2(t,\lambda)$ при $n\to\infty$ у кожній точці $\lambda\in(0,\infty)$ [8, с. 255].

Теорема. Якщо $\{f,g\} \subset G_{\{\beta\}}(A)$, $1 < \beta < 2$, то

$$\forall T > 0 \ \exists c = c(f,\mu,g,T,\gamma,\beta) > 0$$

$$\exists L = L(f,g,T,\gamma,\beta) > 0 :$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u(t) - P^{1}_{\mu,t,n}(A)f - P^{(2)}_{\mu,t,n}(A)g\| \le$$

$$\le cL^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)}, \quad (6)$$

Навпаки, якщо для деякого $T > 0$ існують сталі $c > 0$, $\mu > 0$ такі, що для $u(t)$, $t\in[0,T]$ з $u(0) = f \in H_\infty(A)$, $u'(0) = 0$ виконується (6), то $f \in G_{\{\beta\}}(A)$, $1 < \beta < 2$.

Доведення. Нехай $\{f,g\} \subset G_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\mu>0}\mathcal{D}(\exp(\mu A^{1/\beta}))$, $1 < \beta < 2$. Тоді $f \in \mathcal{D}(\exp(\mu_1 A^{1/\beta}))$ з деяким $\mu_1 > 0$, а $g \in \mathcal{D}(\exp(\mu_2 A^{1/\beta}))$ з деяким $\mu_2 > 0$. Нехай $\mu = \min\{\mu_1,\mu_2\}$. Тоді, очевидно, $\{f,g\} \subset \mathcal{D}(\exp(\mu A^{1/\beta}))$. Зафіксуємо це $\mu > 0$. Згідно з основною спектральною теоремою для самоспряжених операторів

$$\|u(t) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A)f - P^{(2)}_{\mu,t,n}(A)g\| \le$$

$$\le \|G_1(t,A)f - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A)f\| +$$

$$+\|G_2(t,A)g - P^{(2)}_{\mu,t,n}(A)g\| =$$

$$= \Big(\int_0^\infty (G_1(t,\lambda) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda))^2 e^{-2\mu\lambda^{1/\beta}} \times$$

$$\times e^{2\mu\lambda^{1/\beta}} d(E_\lambda f,f)\Big)^{1/2} +$$

$$+\Big(\int_0^\infty (G_2(t,\lambda) - P^{(2)}_{\mu,t,n}(\lambda))^2 e^{-2\mu\lambda^{1/\beta}} \times$$

$$\times e^{2\mu\lambda^{1/\beta}} d(E_\lambda g,g)\Big)^{1/2} \le$$

$$\le \sup_{\lambda\ge0}(\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})|G_1(t,\lambda) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda)|)\cdot\|f\|_{H_\mu} +$$

$$+\sup_{\lambda\ge0}(\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})|G_2(t,\lambda) - P^{(2)}_{\mu,t,n}(\lambda)|)\cdot\|g\|_{H_\mu} \equiv$$

$$\equiv \varphi_1(t,n)\cdot\|f\|_{H_\mu} + \varphi_2(t,n)\cdot\|g\|_{H_\mu},$$

де

$$\|f\|_{H_\mu} = \Big(\int_0^\infty \exp(2\mu\lambda^{1/\beta})d(E_\lambda f,f)\Big)^{1/2} < \infty,$$

$$\|g\|_{H_\mu} = \Big(\int_0^\infty \exp(2\mu\lambda^{1/\beta})d(E_\lambda g,g)\Big)^{1/2} < \infty.$$

Покажемо, що для фіксованих $\mu > 0$ і $\beta\in(1;2)$, правильними є нерівності

$$\sup_{\lambda\ge0}(\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})|\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(\lambda)|) \le$$

$$\leq \omega_0 L_0^n (n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2} n^{n(\beta-2)}, \quad (7)$$

$$\sup_{\lambda\geq 0}(\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})|\widehat{L}_{\tau,\mu,n}(\lambda)|) \leq$$

$$\leq \omega_1 L_0^n (n!\Gamma(n+\tau+1))^{1/2} n^{n(\beta-2)}, \quad (8)$$

де $n \in \mathbb{Z}_+$, $\omega_0 = \sqrt{\mu^{1-\tau}}\max\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1-\tau)^{\tau-1/2}\}$, $L_0 = \mu_0(e+\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{2-\beta})$, $\mu_0 = \max\{1,\mu\}$, $\omega_1 = \sqrt{\mu^{1+\tau}}\max\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1+\tau)^{-1}e^{-\tau}\}$.

Оскільки $1/\beta < 1$, то скористатися відомими асимптотичними властивостями многочленів Лагерра не можна. Для того, щоб одержати потрібні оцінки, використаємо таке зображення многочленів $\widehat{L}_{\alpha,1,n}$ [8, с. 229]:

$$\widehat{L}_{\alpha,1,n}(\lambda) = (-1)^n \frac{(n!\Gamma(n+\alpha+1))^{1/2}}{n!}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)}, \quad \alpha > -1.$$

Нехай $\alpha = -\tau$. Зауважимо, що оскільки $\tau = (\gamma+2)^{-1}$, $\gamma \geq 0$, то $\tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, тобто $-\tau \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$. Урахувавши співвідношення $\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(\lambda) = \sqrt{\mu^{1-\tau}}\widehat{L}_{-\tau,1,n}(\mu\lambda)$, знайдемо, що

$$\varphi(n) \equiv \sup_{\lambda\geq 0}(\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})|\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(\lambda)|) \leq$$

$$\leq \sqrt{\mu^{1-\tau}}\frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(1-\tau)} + \mu_0^n \sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k}{\Gamma(k-\tau+1)}\times\right.$$

$$\left.\times\sup_{\lambda\geq 0}(\lambda^k \exp\{-\mu\lambda^{1/\beta}\})\right),$$

$$\mu_0 = \max\{1,\mu\}.$$

Врахувавши формулу Стірлінга

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi}\lambda^{\lambda+1/2}\exp(-\lambda+\theta/(12\lambda)),$$

$$0<\theta<1, \lambda>0,$$

та співвідношення $\sup_{\lambda\geq 0}(\lambda^k\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})) = (\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta})^k k^{k\beta}$, знайдемо, що

$$\varphi(n) \leq \sqrt{\mu^{1-\tau}}\frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!\Gamma(1-\tau)}+$$

$$+\frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!}\mu_0^n\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta})^k}{\Gamma(k-\tau+1)}k^{k\beta} \leq$$

$$\leq \sqrt{\mu^{1-\tau}}(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}\Big(\frac{1}{\Gamma(1-\tau)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}e^{n-\tau}\mu_0^n n^{n(\beta-2)}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta})^k}{e^{-k}(1-\tau/k)^k(1-\tau/k)^{-\tau+1/2}}\Big).$$

Оскільки $(1-\tau/k)^{-\tau+1/2} \geq (1-\tau)^{-\tau+1/2}$, $(1-\tau/k)^k \geq e^{-\tau}$, $k\in\mathbb{N}$, то

$$\varphi(n) \leq \sqrt{\mu^{1-\tau}}(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}\times$$

$$\times\Big(\frac{1}{\Gamma(1-\tau)}+\frac{(\mu_0 e)^n}{(1-\tau)^{1/2-\tau}}\sum_{k=1}^{n}C_n^k(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{1-\beta})^k\Big).$$

Покладемо $\omega_0 = \sqrt{\mu^{1-\tau}}\max\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1-\tau)^{\tau-1/2}\}$. Тоді

$$\varphi(n) \leq \omega_0(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}(\mu_0 e)^n n^{n(\beta-2)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{1-\beta})^k =$$

$$= \omega_0(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}n^{n(\beta-2)}\times$$

$$\times(\mu_0 e+\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{2-\beta}\mu_0)^n.$$

Нерівність (8) доводиться аналогічно.

Оскільки $P_{\mu,t,n}^{(1)} \to G_1(t,\lambda)$ при $n\to\infty$ у кожній точці $\lambda\in(0,\infty)$, то, взявши до уваги вигляд полінома $P_{\mu,t,n}^{(1)}$, а також нерівність (7), дістанемо, що

$$\varphi_1(t,n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k)(t,\mu,\gamma)|\times$$

$$\times\sup_{\lambda\geq 0}(\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})|\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}(\gamma)|) \leq$$

$$\leq c_1\sum_{k=n+1}^{\infty}(BL_0)^k k^{k(\beta-2)} \leq$$

$$\leq c_2(BL_0)^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де

$$c_2 = c_1\sum_{k=1}^{\infty}(BL_0)^{k-1}k^{(k-1)(\beta-2)} < \infty,$$

$$c_1 = \pi\omega_0(\Gamma(\tau)\sin\pi\tau)^{-1}\mu^{-(1-\tau)/2},$$
$$B = T^{\gamma+2}\mu^{-1}(\gamma+2)^{-1}.$$

Отже, $\sup\limits_{t\in[0,T]} \varphi_1(t,n) \leq c_2(BL_0)^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)}$.

Аналогічно, скориставшись нерівністю (8), знайдемо, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \varphi_2(t,n) \leq c_3(BL_0)^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де

$$c_3 = \frac{\omega_1 T\Gamma(\tau)}{\sqrt{\mu^{1+\tau}}}\sum_{k=1}^{\infty}(BL_0)^{k-1}k^{(k-1)(\beta-2)} < \infty.$$

Тому

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - P^1_{\mu,t,n}(A)f - P^2_{\mu,t,n}(A)g\| \leq$$
$$\leq\leq cL^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де $c = c_2\|f\|_{H_\mu} + c_3\|g\|_{H_\mu}$, $L = BL_0$.

Навпаки, нехай для деякого $T > 0$ існують сталі $c, \mu > 0$ такі, що для $u(t)$, $t \in [0,T]$, з $u(0) = f \in H_\infty(A)$, $u'(0) = 0$ виконується нерівність (6). Тоді для $u(t)$ правильним є зображення

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t,\mu,\gamma)\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}(A)f,$$

де

$$a_k(t,\mu,\gamma) = \frac{\pi e^{-\delta}(-1)^k\delta^k}{\Gamma(\tau)\sin\pi\tau\sqrt{\mu^{1-\tau}k!\Gamma(k-\tau+1)}},$$
$$\delta = \frac{t^{\gamma+2}}{\mu(\gamma+2)^2},$$

при цьому

$$\sup_{t\in[0,T]} \|a_k(t,\mu,\gamma)\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}(A)f\| =$$
$$= \sup_{t\in[0,T]} \|P^{(1)}_{\mu,t,k}(A)f - P^{(1)}_{\mu,t,k-1}(A)f\| \leq$$
$$\leq \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - P^{(1)}_{\mu,t,k}(A)f\| +$$
$$+ \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - P^{(1)}_{\mu,t,k-1}(A)f\| \leq c(1+L)L^k k^{k(\beta-2)}.$$

Зафіксуємо довільним чином $t \in [0,T]$, тоді з останньої нерівності випливає нерівність

$$\|\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}(A)f\| \leq c_0\sqrt{k!\Gamma(k-\tau+1)}\tilde{L}_0^k k^{k(\beta-2)}, \quad (9)$$

де $c_0 = c(1+L)\pi^{-1}e^{\delta}\Gamma(\tau)|\sin\pi\tau|\sqrt{\mu^{1-\tau}}$, $\tilde{L}_0 = L/\delta$. Далі скористаємося тим, що

$$\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(\lambda) = \sqrt{\mu^{1-\tau}}\widehat{L}_{-\tau,1,n}(\mu\lambda) =$$
$$= \sqrt{\mu^{1-\tau}}(-1)^n\frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{n} C_n^k\frac{(-\mu\lambda)^k}{\Gamma(k-\tau+1)}.$$

Звідси випливає співвідношення

$$\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(A)f = \sqrt{\mu^{1-\tau}}(-1)^n\frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!}\times$$
$$\times\Big(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\frac{(-\mu)^k}{\Gamma(k-\tau+1)}A^k f + \frac{(-\mu)^n}{\Gamma(n-\tau+1)}A^n f\Big).$$

Тоді

$$A^n f = \frac{n!\Gamma(n-\tau+1)}{\mu^n\sqrt{\mu^{1-\tau}}}\frac{\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(A)f}{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}} -$$
$$-\frac{\Gamma(n-\tau+1)}{(-\mu)^n}\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\frac{(-\mu)^k}{\Gamma(k-\tau+1)}A^k f, \quad (10)$$
$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad f \in H_\infty(A).$$

З (10) та (9) при $n = 0$ знайдемо, що $\|f\| \leq c_0\frac{\Gamma(1-\tau)}{\sqrt{\mu^{1-\tau}}}$. Якщо $n = 1$, то

$$Af = \frac{\Gamma(2-\tau)}{\mu\sqrt{\mu^{1-\tau}}\sqrt{\Gamma(2-\tau)}}\widehat{L}_{-\tau,\mu,1}(A)f + \frac{\Gamma(2-\tau)}{\mu\Gamma(1-\tau)},$$

$$\|Af\| \leq 2c_0\frac{\Gamma(2-\tau)}{\mu\sqrt{\mu^{1-\tau}}}\tilde{\tilde{L}}_0^1\cdot 1^{1(\beta-2)}; \tilde{\tilde{L}}_0 = \max\{1, \tilde{L}_0\}.$$

Аналогічно,

$$\|A^2 f\| \leq \frac{2\Gamma(3-\tau)}{\mu^2\sqrt{\mu^{1-\tau}}(2!\Gamma(3-\tau))^{1/2}}\|\widehat{L}_{-\tau,\mu,2}(A)f\| +$$
$$+\frac{\Gamma(3-\tau)}{\mu^2\Gamma(1-\tau)}\|f\| + \frac{2\mu\Gamma(3-\tau)}{\mu^2\Gamma(2-\tau)}\|Af\| \leq$$
$$\leq c_0\frac{2\Gamma(3-\tau)\sqrt{2!\Gamma(3-\tau)}}{\mu^2\sqrt{\mu^{1-\tau}}\sqrt{2!\Gamma(3-\tau)}}\tilde{L}_0^2\cdot 2^{2(\beta-2)} +$$

$$+c_0\frac{\Gamma(3-\tau)\Gamma(1-\tau)}{\mu^2\sqrt{\mu^{1-\tau}}\Gamma(1-\tau)}+$$

$$+2c_0\frac{2\Gamma(3-\tau)\Gamma(2-\tau)}{\mu\Gamma(2-\tau)\mu\sqrt{\mu^{1-\tau}}}\tilde{L}_0^1\cdot 1^{1(\beta-2)}\leq$$

$$\leq 2^2c_0\frac{2\Gamma(3-\tau)}{\mu^2\sqrt{\mu^{1-\tau}}}\tilde{\tilde{L}}_0^2\cdot 2^{2(\beta-2)},$$

і т.д. Методом математичної індукції доводимо правильність оцінок

$$\|A^nf\|\leq c_0\frac{n!\Gamma(n-\tau+1)}{\mu^n\sqrt{\mu^{1-\tau}}}2^n\tilde{\tilde{L}}_0^n\cdot n^{n(\beta-2)},\quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Застосувавши формулу Стірлінга, знайдемо, що

$$\|A^nf\|\leq 2c_0e^{\tau}\pi e^2(1-\tau)\mu^{-(1-\tau)/2}(2e)^n\mu^{-n}\tilde{\tilde{L}}_0^n n^{2n}\times$$
$$\times n^{n(\beta-2)}=\alpha B^n n^{n\beta},$$
$$\alpha=2c_0e^{\tau}\pi e^2(1-\tau)\mu^{-(1-\tau)/2}, B=2e\tilde{\tilde{L}}_0\mu^{-1}.$$

З останньої нерівності випливає належність елемента f до класу Жевре $G_{\{\beta\}}(A)$, $1<\beta<2$.

Теорема доведена.

Зауваження. У випадку, коли початковий елемент належить до класу Жевре $G_{\{\beta\}}(A)$, де $\beta\in[1,2)$, то похибка $\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u(t)-P_n(t,A)f\|$ спадає, як $L^nn^{n(\beta-2)}$, при цьому вказану оцінку швидкості збіжності покращити не можна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабин А.В.* Представление решений дифференциальных уравнений в полиномиальной форме // Успехи мат. наук. – 1983. – Т. 38, № 2. – С. 228–229.
2. *Бабин А.В.* О полиномиальной разрешимости дифференциальных уравнений с коэффициентами из классов бесконечно дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1983. – Т. 34, № 2. – С. 249–260.
3. *Бабин А.В.* Решение задачи Коши при помощи весовых приближений экспонент многочленами // Функц. анализ. и его прил. – 1983. – Т. 17, № 4. – С. 75–76.
4. *Бабин А.В.* Построение и исследование решений дифференциальных уравнений методами теории приближения функций // Матем. сб. – 1984. – Т. 123, № 2. – С. 147–174.
5. *Горбачук М.Л., Городецкий В.В.* О решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Успехи мат. наук. – 1984. – Т. 39, № 4. – С. 140.
6. *Городецкий В.В., Горбачук М.Л.* О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1984. – Т. 36, № 4. – С. 500–502.
7. *Городецький В., Колісник Р., Мартинюк О.* Про наближені розв'язки задачі Коші для диференціально-операторного рівняння гіперболічного типу // Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації: Матеріали міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня, 2018 р., Чернівці, ЧНУ. – 2018. – С. 55.
8. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
9. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.