УДК 517.95

©2018 р. І. І. Волянська, В. С. Ільків

Національний університет "Львівська політехніка"

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У ДВОВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ

Досліджено задачу з багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійного диференціального рівняння із частинними похідними у плоскій області. Показано коректність за Адамаром задачі, що відрізняє її від задачі з багатьма просторовими змінними, яка є умовно коректною і розв'язність якої пов'язана з проблемою малих знаменників. Доведено теорему єдиності та встановлено умови існування розв'язку задачі зі значеннями у просторах періодичних функцій з експоненційною зміною коефіцієнтів Фур'є.

Ключові слова: багатоточкова задача, одна просторова змінна.

The multi-point problem for linear partial differential equation in a plane domain is investigated. Correctness after Hadamard of this problem is shown, which distinguishes it from the conditionally correct problem with many spatial variables. The existence and uniqueness conditions of the solution of problem in the spaces of periodic functions with an exponential change of Fourier coefficients are established.

Keywords: multi-point problem, one spatial variable.

Вступ

Стаття присвячена встановленню умов коректної розв'язності задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною для рівняння з частинними похідними високого порядку у двовимірній області. Загалом, такі інтерполяційні задачі є умовно коректними, оскільки їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків. Ця проблема полягає у тому, що знаменники коефіцієнтів рядів, якими зображуються розв'язки досліджуваних задач, можуть бути як завгодно малими; це спричиняє розбіжність вказаних рядів у відповідних функціональних просторах. Для подолання цієї проблеми в обмежених за просторовою координатою областях у роботах Б. Й. Пташника та його учнів [1, 6, 8], [10–14], [22] використано метричний підхід, зокрема результати метричної теорії діофантових наближень, завдяки чому встановлено однозначну розв'язність задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною, а також додатковими умовами (періодичності чи майже періодичності, відповідним зростанням розв'язку на безмежності) за рештою координат у просторах функцій зі степеневим або експоненційним ростом їх коефіцієнтів Фур'є.

У роботах [5], [16–21] на основі диференціально-символьного методу відокремлення змінних, розробленого П. І. Каленюком та З. М. Нитребичем, встановлено класи єдиності багатоточкових задач для диференціально-операторних рівнянь у необмежених за просторовими координатами областях.

Дана стаття доповнює дослідження і результати робіт [2, 4], у яких описані випадки інтерполяційних задач з триточковими умовами за часовою змінною, які фіксують стан процесу через однакові [2] та не однакові [4] часові проміжки. Отримані результати узагальнено на випадок багатоточкової задачі з нерівновіддаленими часовими вузлами. Характерною особливістю є одна просторова змінна та відсутність при цьому проблеми малих знаменників. Отже, серед задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною вдалося виділити багатоточкові коректно поставлені за Адамаром задачі.

Основні позначення. Постановка задачі

Позначимо $G = [0, T] \times \Omega$, де $T > 0$, Ω — одновимірний тор $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Нехай W — лінійний простір скінченних тригонометричних сум (2π-періодичних многочленів, основних функцій) $P(x) = \sum_k P_k e^{ikx}$ заданих на Ω, де P_k — комплексні коефіцієнти, а k пробігає скінченну множину цілих чисел.

Простір W' спряжений з простором W; це простір узагальнених тригонометричних функцій, які є формальними тригонометричними рядами $Q(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k e^{ikx}$, що діють на основну функцію $P \in W$ за таким правилом $\langle Q, P\rangle = \sum_k Q_k \bar{P}_k$, де число $\bar{P}_k$ є комплексно спряженим до числа P_k.

Для дійсного числа α і функції $\beta\colon [0;T] \to \mathbb{R}$ введемо шкали просторів $\{\mathbf{E}^q_\alpha(\Omega)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{E}^{n,q}_\beta(G)\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{E}^q_\alpha(\Omega)$ — гільбертів підпростір простору W' зі скалярним добутком

$$(\varphi,\psi)_{\mathbf{E}^q_\alpha(\Omega)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q} e^{2\tilde{k}\alpha}\varphi_k\bar{\psi}_k, \qquad \tilde{k} = \sqrt{1+k^2},$$

для функцій $\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k e^{ikx}$ і $\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k e^{ikx}$, а $\mathbf{E}^{n,q}_\beta(G)$ — банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що похідні $\partial^r_t u(t,\cdot)$, які визначені формулою

$$\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u^{(r)}_k(t) e^{ikx}, \qquad r = 0,1,\dots,n,$$

для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{E}^{q-r}_{\beta(t)}(\Omega)$, відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{E}^{n,q}_\beta(G)$ обчислюється за формулою $\|u\|^2_{\mathbf{E}^{n,q}_\beta(G)} = \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \left\|\dfrac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\right\|^2_{\mathbf{E}^{q-r}_{\beta(t)}(\Omega)}$.

В області G для безтипного однорідного рівняння

$$\sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1}\frac{\partial^{s_0+s_1}u}{\partial t^{s_0}\partial x^{s_1}} = 0, \qquad (1)$$

розглянуто задачу з багатоточковими умовами

$$u(\tau_j, x) = \varphi_j(x), \quad j = 1,2,\dots,n, \qquad (2)$$

де a_{s_0,s_1} — комплексні коефіцієнти, $a_{n,0} = 1$, $\tau_1,\dots,\tau_n$ — вузли інтерполяції, причому $0 \le \tau_1 < \dots < \tau_n \le T$, $\varphi_1 = \varphi_1(x),\dots,\varphi_n = \varphi_n(x)$ — задані функції змінної x, а функція $u = u(t,x)$ є шуканою функцією.

Означення *Під розв'язком задачі* (1), (2) *будемо розуміти функцію* $u \in \mathbf{C}^n([0,T];W')$, *яка на відрізку* $[0,T]$ *задовольняє рівняння* (1) *і умови* (2) *у просторі* W' *та належить до простору* $\mathbf{E}^{n,q}_\beta(G)$.

Отже, розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)e^{ikx}. \qquad (3)$$

Тоді кожна з функцій $u_k = u_k(t)$ є розв'язком відповідної багатоточкової інтерполяційної задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\sum_{m=0}^{n} b_m(k)\frac{d^{n-m}u_k}{dt^{n-m}} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad (4)$$

$$u_k(\tau_j) = \varphi_{jk}, \quad j = 1,2,\dots,n, \qquad (5)$$

де $b_m(k) = \sum\limits_{s_1=0}^{m} a_{n-m,s_1}(ik)^{s_1}$, $m = 0,1,\dots,n$, — многочлени степеня не вище m, а комплексні числа φ_{jk} є коефіцієнтами Фур'є функцій φ_j.

Єдиність розв'язку u_k задачі (), (4) у просторі $\mathbf{C}^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{E}^{n,q}_\beta(G)$ для довільних дійсних q та β.

Для функцій $\tilde{b}_m(k) = b_m(k)/\tilde{k}^m$, $m = 1,\dots,n$, які лінійно залежать від коефіцієнтів a_{s_0,s_1} рівняння (1) і рівномірно обмежені за k. Зокрема, якщо $|a_{s_0,s_1}| \le A$, то для всіх $k \in \mathbb{Z}$ справджується [2] оцінка $\left|\tilde{b}_m(k)\right| < 2A$, а для всіх (з врахуванням кратності) коренів $\lambda_1(k),\dots,\lambda_n(k)$ многочлена

$$P_k(\lambda) = \prod_{m=0}^{n}(\lambda - \lambda_m(k)) = \lambda^n + \sum_{m=1}^{n}\tilde{b}_m(k)\lambda^{n-m}$$

виконуються [15] нерівності:

$$|\lambda_m(k)| \le 1 + \max\{|\tilde{b}_1(k)|,\dots,|\tilde{b}_n(k)|\} \le$$
$$\le 1 + 2A = A_1. \qquad (6)$$

Вважаємо надалі, що дійсні частини коренів $\lambda_1(k),\dots,\lambda_n(k)$ многочлена $P_k(\lambda)$ пронумеровано у порядку спадання

$$\operatorname{Re}\lambda_1(k)\ge\operatorname{Re}\lambda_2(k)\ge\ldots\ge\operatorname{Re}\lambda_n(k).$$

Очевидно, що числа $\gamma_m=\tilde{k}\lambda_m(k)$ є коренями відповідного характеристичного рівняння $\gamma^n+b_1(k)\gamma^{n-1}+\ldots+b_n(k)=0$ для диференціального рівняння ().

Загальний розв'язок диференціального рівняння () належить до простору $\mathbf{C}^n[0,T]$ і має вигляд

$$u_k(t)=\sum_{l=1}^{n}C_{kl}f_{kl}(t),\quad k\in\mathbb{Z},\tag{7}$$

де $f_{kl}(t)$ — фундаментальна система розв'язків цього рівняння, C_{kl} — довільні комплексні сталі, зокрема

$$u_k(t)=\sum_{l=1}^{n}C_{kl}e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbf{K},\tag{7_1}$$

де $\mathbf{K}$ — скінченна (буде показано далі) множина тих цілих чисел k, для яких многочлен $P_k(\lambda)$ має кратний корінь.

Якщо функція з формули (7) — розв'язок задачі (), (4), то для кожного $k\in\mathbb{Z}$ числа $C_{k1},\dots,C_{kn}$ утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix}f_{k1}(\tau_1)&\dots&f_{kn}(\tau_1)\\ \dots&\dots&\dots\\ f_{k1}(\tau_n)&\dots&f_{kn}(\tau_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{k1}\\ \vdots\\ C_{kn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_{1k}\\ \vdots\\ \varphi_{nk}\end{pmatrix},\tag{8}$$

зокрема, для $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}$ — системи

$$\begin{pmatrix}e^{\tilde{k}\lambda_1(k)\tau_1}&\dots&e^{\tilde{k}\lambda_n(k)\tau_1}\\ \dots&\dots&\dots\\ e^{\tilde{k}\lambda_1(k)\tau_n}&\dots&e^{\tilde{k}\lambda_n(k)\tau_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{k1}\\ \vdots\\ C_{kn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_{1k}\\ \vdots\\ \varphi_{nk}\end{pmatrix}.\tag{8_1}$$

Навпаки, якщо числа C_{kl}, $l=1,2,\dots,n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (8), то функція $u_k(t)$, що визначена формулою (7) є розв'язком задачі (), (4).

Нехай Π_n — група перестановок множини $\{1,\dots,n\}$, а $\rho(\pi)$ — степінь (число інверсій) перестановки $\pi\in\Pi_n$. Позначимо через $\Delta(k)$ визначник системи (8), тоді

$$\Delta(k)=\begin{vmatrix}e^{\tilde{k}\lambda_1(k)\tau_1}&\dots&e^{\tilde{k}\lambda_n(k)\tau_1}\\ \dots&\dots&\dots\\ e^{\tilde{k}\lambda_1(k)\tau_n}&\dots&e^{\tilde{k}\lambda_n(k)\tau_n}\end{vmatrix}=$$

$$=e^{\tilde{k}\vec{\lambda}(k)\vec{\tau}}\Delta^*(k),\qquad k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbf{K},$$

де $\vec{\lambda}(k)=(\lambda_1(k),\dots,\lambda_n(k))$, $\vec{\tau}=(\tau_n,\dots,\tau_1)$, скалярний добуток $\vec{\lambda}(k)\vec{\tau}$ знаходиться з рівності $\vec{\lambda}(k)\vec{\tau}=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j(k)\tau_{n-j+1}$, а визначник $\Delta^*(k)$ обчислюється за формулою

$$\Delta^*(k)=1+\sum_{\pi\in\Pi_n'}(-1)^{\rho(\pi)}e^{\tilde{k}(\vec{\lambda}(k,\pi)-\vec{\lambda}(k))\vec{\tau}},$$

причому $\vec{\lambda}(k,\pi)=(\lambda_{\pi(1)}(k),\dots,\lambda_{\pi(n)}(k))$, а Π_n' — множина, утворена з множини Π_n вилученням перестановки $(1,\dots,n)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{E}_\beta^{n,q}(G)$ *необхідно і достатньо, щоб для цілих* k *виконувалась умова*

$$\Delta(k)\ne0.\tag{9}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі $\mathbf{E}_\beta^{n,q}(G)$ має не більше одного розв'язку. Якщо існує розв'язок (3) задачі (1), (2), тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто однорідна задача (), (4) у просторі $\mathbf{C}^n[0;T]$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$ має єдиний розв'язок. Отже, у системі (8) визначник $\Delta(k)$ не обертається в нуль для жодного $k\in\mathbb{Z}$.

Достатність. Доведемо від супротивного. Припустимо, що існують два різні розв'язки $u_1=u_1(t,x)$ і $u_2=u_2(t,x)$ задачі (1), (2) з простору $\mathbf{E}_\beta^{n,q}(G)$. Тоді функція $\bar{u}(t,x)=u_1-u_2$ є розв'язком однорідної задачі з простору $\mathbf{E}_\beta^{n,q}(G)$ і зображається рядом (3), а коефіцієнти $\bar{u}_k=\bar{u}_k(t)$ є розв'язками відповідних однорідних задач для звичайних диференціальних рівнянь (). Якщо рівняння $\Delta(k)=0$ не має розв'язків у цілих числах k, тобто $\Delta(k)\ne0$ для кожного $k\in\mathbb{Z}$, то система рівнянь (8) має лише тривіальний розв'язок. Тоді із (7) та (8) одержимо, що $\bar{u}_k(t)=0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$. Отже,

$\bar{u} = u_1 - u_2 = 0$ у просторі $\mathbf{E}^{n,q}_{\beta}(G)$. Одержане протиріччя доводить теорему.

За умов теореми 1 для довільного $k \in \mathbb{Z}$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (), (4) існує і для його знаходження потрібно визначити числа $C_{k1}, \ldots, C_{kn}$. Розв'язуємо систему (8) за правилом Крамера і для $m = 0, 1, \ldots, n$ одержуємо u_k у такому вигляді:

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\Delta_{l,m}(k,t)}{\Delta(k)} \varphi_{lk}, \quad t \in T_m, \qquad (10)$$

де $T_m = (\tau_m, \tau_{m+1})$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{n+1} = T$, а визначники $\Delta_{l,m}(k,t)$, які є визначниками матриць, утворених заміною l-го рядка матриці системи (8_1) на рядок $\big(e^{\tilde{k}\lambda_1(k)t}, \ldots, e^{\tilde{k}\lambda_n(k)t}\big)$, та їх похідні до порядку n для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$ обчислюються за формулою

$$\Delta^{(r)}_{l,m}(k,t) = \tilde{k}^r \sum_{\pi \in \Pi_n} (-1)^{\rho(\pi)} \lambda^r_{\pi(\theta(l,m))}(k) \times$$
$$\times e^{\tilde{k}\vec{\lambda}(\pi,k)\vec{\tau}_l(m,k)} = \tilde{k}^r e^{\tilde{k}\vec{\lambda}(k)\vec{\tau}_l(m,t)} \Delta^*_{l,m,r}(k,t).$$

У цій формулі $\vec{\tau}_l(m,t)$ — вектор із $\mathbb{R}^n$, утворений упорядкуванням за спаданням множини $\{t, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$, з якої вилучено число τ_l, а $\theta(l,m)$ означає номер, який займає компонента t вектора $\vec{\tau}_l(m,t)$, де $l = 1, \ldots, n$. Визначники $\Delta^*_{l,m,r}(k,t)$ та їх похідні визначає формула

$$\Delta^*_{l,m,r}(k,t) = \lambda^r_{\theta(l,m)}(k) + \sum_{\pi \in \Pi'_n} (-1)^{\rho(\pi)} \times$$
$$\times \lambda^r_{\pi(\theta(l,m))}(k) e^{\tilde{k}(\vec{\lambda}(k,\pi) - \vec{\lambda}(k))\vec{\tau}_l(m,t)}.$$

Із формул (3), (10) отримуємо вигляд формального розв'язку $u = u(t,x)$ задачі (1), (2) та його похідних $u^{(r)}$ до n-го порядку на кожному з інтервалів T_m, де $m = 0, 1, \ldots, n$:

$$u^{(r)}(t,x) = \sum_{k \in \mathbf{K}} \sum_{l=1}^{n} \frac{\Delta^{(r)}_{l,m}(k,t)}{\Delta(k)} \varphi_{lk} e^{ikx} +$$
$$+ \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}} \tilde{k}^r \sum_{l=1}^{n} \frac{\Delta^*_{l,m,r}(k,t)}{\Delta^*(k)} e^{\tilde{k}\vec{\lambda}(k)(\vec{\tau}_l(m,t) - \vec{\tau}) + ikx} \varphi_{lk}. \qquad (11)$$

Доведемо належність розв'язку (11) задачі (1), (2) до простору $\mathbf{E}^{n,q}_{\beta}(G)$. Покажемо, що множина $\mathbf{K}$ — скінченна (тоді перший доданок у формулі (11) є тригонометричним многочленом з W, тобто належить вказаному простору). Для цього використаємо [2] дискримінант $D(k) = \prod_{1 \le r < q \le n} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)^2$ многочлена $P_k(\lambda)$, який у випадку $|k| > 0$ має такий факторизований вигляд $D(k) = \left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)} \left(D_0 + \frac{D_1}{k} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)}}\right)$.

Число D_0 є дискримінантом многочлена $\lambda^n + \sum_{j=1}^{n} a_{n-j,j} \lambda^{n-j}$, який будується за головною частиною рівняння (1) і є многочленом n змінних $a_{n-1,1}, \ldots, a_{1,n-1}, a_{0,n}$, тому у просторі цих змінних умова $D_0 = 0$ визначає (комплексну) алгебричну гіперповерхню.

Якщо $D_0 \neq 0$ і $|k| \ge \tilde{D}_0 / |D_0| = K_1 > 0$, де $\tilde{D}_0 = 2\big(|D_1| + \ldots + |D_{n(n-1)}|\big)$, то справджуються [2] оцінки знизу: $|D(k)| \ge \frac{|D_0|}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n(n-1)} = \big(\sqrt{2}\big)^{-n(n-1)-2} |D_0| > 0$.

З останніх формул випливає скінченність множини $\mathbf{K}$, яка складається з не більш, ніж $1 + 2\tilde{D}_0/|D_0|$ елементів.

Для встановлення належності до простору $\mathbf{E}^{n,q}_{\beta}(G)$ другого доданку (ряду) у формулі (11) знайдемо оцінки знизу для модулів дійсних частин $\operatorname{Re} \lambda_j(k)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, коренів многочлена $P_k(\lambda)$ та їх різниць.

Числа $2 \operatorname{Re} \lambda_j(k) = \lambda_j(k) + \bar{\lambda}_j(k) = \lambda_j(k) - \big(-\bar{\lambda}_j(k)\big)$, де $-\bar{\lambda}_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$ є коренями многочлена $P_{k1}(\lambda) = \prod_{l=1}^{n} \big(\lambda + \bar{\lambda}_l(k)\big) = \lambda^n + \sum_{l=1}^{n} (-1)^{-l} \bar{\tilde{b}}_l(k) \lambda^{n-l}$, є множниками результанта

$$R(k) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{l=1}^{n} \big(\lambda_j(k) - \big(-\bar{\lambda}_l(k)\big)\big) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \prod_{l=1}^{n} \big(\lambda_j(k) + \bar{\lambda}_l(k)\big)$$

многочленів P_k та P_{k1}. Для довільного $j = 1, \ldots, n$ маємо [2] оцінку зверху даного результанта $|R(k)| \le 2^{n^2} A_1^{n^2-1} |\operatorname{Re} \lambda_j(k)|$, де $k \in \mathbb{Z}$, а для оцінки знизу подамо результант у вигляді

$$R(k)=\left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n^2}\left(R_0+\frac{R_1}{k}+\ldots+\frac{R_{n^2}}{k^{n^2}}\right). \quad (12)$$

Тоді, у випадку $R_0\neq 0$, при $|k|\geq \hat{R}_0/|R_0|=K_2>0$, де $\hat{R}_0=2(|R_1|+\ldots+|R_{n^2}|)$, виконується нерівність $|R(k)|\geq \dfrac{|R_0|}{2}\Big(\dfrac{|k|}{\tilde{k}}\Big)^{n^2}\geq 2^{-(n^2/2+1)}|R_0|$ і шукана оцінка знизу

$$|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)|\geq C, C=2^{-(3n^2/2+1)}A_1^{-(n^2-1)}|R_0|. \quad (13)$$

Для подальшої оцінки абсолютної величини функцій u_k та їх похідних до порядку n оцінимо знизу модуль дійсної частини різниць $\lambda_i(k)-\lambda_j(k)$, які позначимо $\Lambda_{ij}(k)$, де $i,j=1,2,\ldots,n$ та $i\neq j$.

Числа $\Lambda_{ij}(k)$ є коренями многочлена $P_{k2}(\Lambda)=\prod\limits_{i,j=1,i\neq j}^{n}(\Lambda-\Lambda_{ij}(k))$, для побудови якого використано теорему [7, с. 237] про зв'язок між власними значеннями довільних матриць A, B та матриці $\varphi(A,B)=\sum_{i,j=0}^{p}c_{ij}A^i\otimes B^j$, яка побудована на базі многочлена $\varphi(\lambda,\mu)=\sum_{i,j=0}^{p}c_{ij}\lambda^i\mu^j$, де c_{ij} — комплексні числа, p — ціле число, за допомогою прямого добутку $\otimes$ степенів A^i та B^j матриць A і B (розглядаємо випадок $p=1$, $A=B$, A — супроводжуюча матриця многочлена P_k, $\varphi(\lambda,\mu)=\lambda^1\mu^0-\lambda^0\mu^1=\lambda-\mu$). Коефіцієнти многочленів P_{k2} є [2] многочленами n змінних $a_{n-1,1},\ldots,a_{1,n-1},a_{0,n}$ степеня $4n^4$.

Як і раніше (див. (12)), результант $\tilde{R}(k)$ многочленів P_{k2} і $\prod\limits_{i,j=1,i\neq j}^{n}(\Lambda+\Lambda_{ij}(k))$ при $k\neq 0$ можна подати [2] у такому вигляді: $\tilde{R}(k)=\Big(\dfrac{k}{\tilde{k}}\Big)^{2n^2}\Big(\tilde{R}_0+\dfrac{\tilde{R}_1}{k}+\ldots+\dfrac{\tilde{R}_{2n^2}}{k^{2n^2}}\Big)$. Звідси отримуємо оцінки знизу для $\mathrm{Re}\,\Lambda_{ij}(k)$, які визначаються коефіцієнтами P_{k2}.

Якщо $i\neq j$, де $i,j=1,2,\ldots,n$, і $\tilde{R}_0\neq 0$, то при $|k|\geq \hat{\tilde{R}}_0/|\tilde{R}_0|=K_3>0$, де $\hat{\tilde{R}}_0=2(|\tilde{R}_1|+|\tilde{R}_2|+\ldots+|\tilde{R}_{2n^2}|)$, справджується оцінка

$$|\mathrm{Re}\,\Lambda_{ij}(k)|\geq\sigma,$$

$$\sigma=2^{-(7n^2-1)/2}A_1^{-(2n^2-1)}\sqrt{|\tilde{R}_0|}>0. \quad (14)$$

Тому визначники $\Delta^*(k)$ і $\Delta^*_{l,m,r}(k,t)$, де $k\in\mathbb{N}\setminus\mathbf{K}$, оцінюються [2, 4] відповідно знизу і зверху сталими за умови $\tilde{k}\geq\max\{K_3,(\sigma\tau_1)^{-1}\ln 2(n!-1)\}$:

$$|\Delta^*(k)|\geq 1/2,\qquad |\Delta^*_{l,m,r}(k,t)|\leq n!A_1^r,$$

$$t\in T_m,\quad m,r=0,1,\ldots,n,\quad l=1,\ldots,n.$$

Для оцінювання абсолютної величини функцій u_k та їх похідних до n–го порядку за великих $\tilde{k}$ використаємо формулу (11) і оцінки визначників:

$$|\tilde{k}^{-r}u_k^{(r)}(t)|\leq 2n!A_1^r\sum_{l=1}^{n}e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\vec{\lambda}(k)(\vec{\tau}_l(m,t)-\vec{\tau})}|\varphi_{lk}|,$$

$$t\in T_m,\quad m=0,1,\ldots,n.$$

Згідно з побудовою векторів $\vec{\tau}_l(m,t)$ скалярні добутки $\mathrm{Re}\,\vec{\lambda}(k)(\vec{\tau}_l(m,t)-\vec{\tau})$ допускають таку оцінку зверху

$$\mathrm{Re}\,\vec{\lambda}(k)(\vec{\tau}_l(m,t)-\vec{\tau})\leq B_m(k,t)-B_l(k,\tau_l),$$

де лінійні функції $B_m(k,t)$ задає така формула, у якій $\lambda_0(k)=\lambda_1(k)$ і $\lambda_{n+1}(k)=\lambda_n(k)$:

$$\begin{aligned}B_m(k,t)&=t\mathrm{Re}\,\lambda_{n+1-m}(k)+\\&+\sum_{j=m}^{n}\tau_{j+1}\mathrm{Re}\,(\lambda_{n-j}(k)-\lambda_{n+1-j}(k))\equiv\\&\equiv\tau_{n+1}\mathrm{Re}\,\lambda_1(k)+(\tau_{n+1}-t)\mathrm{Re}\,\lambda_{n+1-m}(k)-\\&-\sum_{j=m}^{n}(\tau_{n+1}-\tau_{j+1})\mathrm{Re}\,(\lambda_{n-j}(k)-\lambda_{n+1-j}(k)),\\&\qquad t\in T_m,\ m=0,1,\ldots,n.\end{aligned}$$

Оскільки $B_{m+1}(k,t)-B_m(k,t)=(t-\tau_{m+1})\mathrm{Re}\,(\lambda_{n-m}(k)-\lambda_{n+1-m}(k))$, то прямі $B_m(k,t)$ та $B_{m+1}(k,t)$ перетинаються, $B_m(k,\tau_{m+1})=B_{m+1}(k,\tau_{m+1})$ і $B_0(k,t)=B_1(k,t)$.

Також різниця $B_m(k,t)-B_m(k,\tau)=(t-\tau)\mathrm{Re}\,\lambda_{n+1-m}(k)$ має знак числа $\mathrm{Re}\,\lambda_{n+1-m}(k)$, якщо $\tau_m\leq t<\tau\leq\tau_{m+1}$. Отже, опуклою є складена з $n+1$-го відрізка ламана, що з'єднує $n+2$ точки $(\tau_0,B_0(k,\tau_0))$, $(\tau_1,B_1(k,\tau_1))$, …, $(\tau_n,B_n(k,\tau_n))$, $(\tau_{n+1},B_n(k,\tau_{n+1}))$.

З отриманих нерівностей для скалярних добутків виводимо

$$\tilde{k}^{-2r}e^{-2\tilde{k}B_m(k,t)}|u_k^{(r)}(t)|^2\leq 4n(n!A_1^r)^2\times$$

$$\times \sum_{l=1}^{n} e^{-2\tilde{k}B_l(k,\tau_l)}|\varphi_{lk}|^2, t \in T_m, r, m = 0, 1, \dots, n.$$

Щоб оцінити норму розв'язку (11) у просторі $\mathbf{E}_{\beta}^{n,q}(G)$ залишається для великих $\tilde{k}$ замінити в останній формулі функцію $B_m(\cdot, t)$ незалежною від k мажорантою для кожного t з інтервалу T_m, а функцію $B_l(\cdot, \tau_l)$ замінити мінорантою.

Для цього розглянемо два випадки прямування $\tilde{k}$ до нескінченності: $k \to +\infty$ та $k \to -\infty$. Тоді при $k \to +\infty$ послідовності коефіцієнтів $\tilde{b}_1(k), \dots, \tilde{b}_n(k)$, прямують до граничних значень $\tilde{b}_1^+, \dots, \tilde{b}_n^+$, при $k \to -\infty$ послідовності коефіцієнтів $\tilde{b}_m(k)$, прямують до граничних значень $\tilde{b}_m^-$, $m = 1, \dots, n$, а послідовність многочленів $P_k(\lambda)$ при $k \to \pm\infty$ відповідно прямує до граничних многочленів

$$P^{\pm}(\lambda) = \lambda^n + \sum_{m=1}^{n} \tilde{b}_m^{\pm} \lambda^{n-m} =$$
$$= (\lambda \mp \lambda_1)(\lambda \mp \lambda_2) \cdots (\lambda \mp \lambda_n).$$

Оскільки $P^-(\lambda) \equiv (-1)^n P^+(-\lambda)$, то для коренів λ_j^+ і λ_j^- цих многочленів справджуються рівності $\lambda_j^+ = -\lambda_{n+1-j}^-$, причому дійсні частини ν_j коренів λ_j, де $j = 1, \dots, n$, многочлена P^+ розташовані (стосовно уявної осі) одним з $n + 1$ можливих способів:

$$(0){:}\ \ \nu_1 < 0; (n){:}\ \ \nu_n > 0;$$

$$(j){:}\ \ \nu_j > 0,\, \nu_{j+1} < 0, \quad j = 1, \dots, n - 1.$$

Такого типу розміщення коренів щодо уявної осі (j коренів справа, $n - j$ коренів зліва, де $j = 0, 1, \dots, n$) використано, наприклад, у роботах [3, 9] для постановки коректних крайових задач для рівнянь з частинними похідними у півпросторі.

Враховуючи нерівності (5), (13), (14) отримаємо, що корені многочленів P_k з довільними коефіцієнтами, обмеженими комплексним кругом $|z| \le A$, а також многочленів $P^{\pm}$ лежать у крузі $|z| \le A_1$ і для великих $\tilde{k}$ відділені зліва і справа від уявної осі вертикальними смугами ширини C, елементи кожної пари коренів $(\lambda_i(k), \lambda_{i+1}(k))$ розділені між собою вертикальними смугами ширини σ. Звідси випливають такі двосторонні оцінки для різних випадків розташування стосовно уявної осі дійсних частин:

$$\begin{gathered}(n{-}r)\sigma{-}A_1{\le}\nu_r^+{=}-\nu_{n-r+1}^-{\le}(r{-}j{-}1)\sigma{-}C,\\ \text{при}\ \ r{=}j{+}1, \dots, n,\ \ j{=}0, 1, \dots, n{-}1;\\ (j - r)\sigma + C{\le}\nu_r^+{=}-\nu_{n-r+1}^-{\le}A_1 -\\ -(r - 1)\sigma,\ \ \text{при}\ \ r{=}1, \dots, j,\ \ j{=}1, \dots, n.\end{gathered} \tag{15}$$

Якщо $k \in \mathbb{N} \setminus \mathbf{K}$, виконуються нерівності (13) і (14), то такі оцінки справджуються також для дійсних частин коренів $\lambda_j(k)$, де $j = 1, \dots, n$, многочленів P_k для додатних і від'ємних k відповідно.

У відповідності з двома граничними многочленами $P^{\pm}(\lambda)$ подамо праві частини φ_j, $j = 1, 2, 3$, умов (2) і розв'язок задачі (1), (2) у вигляді таких сум:

$$\begin{gathered}\varphi_j = \varphi_j^0 + \varphi_j^+ + \varphi_j^- = \Big(\sum_{k\in\tilde{\mathbf{K}}} + \\ + \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\tilde{\mathbf{K}}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus(\tilde{\mathbf{K}}\cup\mathbb{N})}\Big)\varphi_k e^{ikx},\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}u = u^0 + u^+ + u^- = \Big(\sum_{k\in\tilde{\mathbf{K}}} + \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\tilde{\mathbf{K}}} + \\ + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus(\tilde{\mathbf{K}}\cup\mathbb{N})}\Big)u_k(t)e^{ikx},\end{gathered} \tag{17}$$

де непорожна скінченна множина $\tilde{\mathbf{K}}$ визначається за формулою

$$\tilde{\mathbf{K}} = \{k{\in}\mathbb{Z}{:}\ \tilde{k}{\le}\max(1, K_1, K_2, K_3)\}.$$

Умови існування розв'язку задачі (1), (2) залежать від розташування щодо нуля дійсних частин коренів многочлена P^+, а з умов

$$D_0 R_0 \tilde{R}_0 \ne 0, \tag{18}$$

$$\min_{k\in\tilde{\mathbf{K}}} |\Delta(k)| > 0, \tag{19}$$

випливає єдиність розв'язку.

Позначимо $\mathcal{P}_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, множину многочленів P^+, які задовольняють умови (18) та (19) і корені яких розташовані у спосіб (j).

Введемо допоміжні функції

$$\begin{gathered}\tilde{\beta}_{0n}(t) = -tC, \qquad \tilde{\gamma}_{0n}(t) = t((n-1)\sigma - A_1),\\ \tilde{\beta}_{jn}(t) = tA_1, \qquad \tilde{\gamma}_{jn}(t) = t((j-1)\sigma + C),\\ j = 1, \dots, n,\end{gathered} \tag{20}$$

для $m=0,1,\ldots,n-1$ функції

$$\begin{gathered}\tilde{\beta}_{0m}(t)=-\tau_{n+1}C+(\tau_{n+1}-t)((n-m)\sigma-\\-C)-\sigma\sum_{p=m}^{n-1}(\tau_{n+1}-\tau_{p+1}),\\ \tilde{\gamma}_{0m}(t)=t(A_1-(m-1)\sigma)-\sigma\sum_{p=m}^{n-1}\tau_{p+1},\end{gathered} \tag{21}$$

для $j=1,\ldots,n-1$ і $m=0,1,\ldots,n-j$ функції

$$\begin{gathered}\tilde{\beta}_{jm}(t)=\tau_{n+1}(A_1-(m-1)\sigma)+(\tau_{n+1}-t)\times\\ \times((n-m-j)\sigma-C)-\sigma\sum_{p=m}^{n-1}(\tau_{n+1}-\tau_{p+1}),\\ \tilde{\gamma}_{jm}(t)=t((m-1)\sigma-A_1)+\sigma\sum_{p=m}^{n-1}\tau_{p+1},\end{gathered} \tag{22}$$

для $j=1,\ldots,n$ і $m=n+1-j,\ldots,n-1$ функції

$$\begin{gathered}\tilde{\beta}_{jm}(t)=\tau_{n+1}A_1+(\tau_{n+1}-t)(A_1-\\-(n-m)\sigma)-\sigma\sum_{p=m}^{n-1}(\tau_{n+1}-\tau_{p+1}),\\ \tilde{\gamma}_{jm}(t)=t((j+m-n-1)\sigma+C)+\\+\sigma\sum_{p=m}^{n-1}\tau_{p+1}.\end{gathered} \tag{23}$$

Тоді для додатних $k\in\tilde{\mathbf{K}}$ та $m,l=1,\ldots,n$ справджуються нерівності

$$\begin{gathered}-B_m(\pm k,t)\geq\beta_{jm}^{\pm}(t)\geq\beta_{jm}(t)=\\=\min(\beta_{jm}^{+}(t),\beta_{jm}^{-}(t)),\\ -B_l(\pm k,\tau_l)\leq\gamma_{jl}^{\pm}\leq\gamma_{jl}=\\=\max(\gamma_{jl}^{+},\gamma_{jl}^{-}),\end{gathered} \tag{24}$$

де $\beta_{jm}^{+}(t)=-\tilde{\beta}_{jm}(t)$, $\beta_{jm}^{-}(t)=-\tilde{\gamma}_{n+1-j,m}(t)$, $\gamma_{jl}^{+}=-\tilde{\gamma}_{jl}(\tau_l)$, $\gamma_{jl}^{-}=-\tilde{\beta}_{n+1-j,l}(\tau_l)$.

Нехай $\beta_j(t)=\min(\beta_j^{+}(t),\beta_j^{-}(t))$, а кусково-лінійні функції $\beta_j^{\pm}(t)$ дорівнюють функціям $\beta_{jm}^{\pm}(t)$ на інтервалах T_m та у точках τ_m і $\beta_j^{\pm}(\tau_{n+1})=\beta_{jn}^{\pm}(\tau_{n+1})$.

Теорема 2. *Нехай $P^{+}\in\mathcal{P}_j$ для деякого $j\in 0,1,\ldots,n$ і функції $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ задовольняють умову $\varphi_l^{\pm}\in\mathbf{E}^{q}_{\gamma_{jl}^{\pm}}(\Omega)$, зокрема $\varphi_l\in\mathbf{E}^{q}_{\gamma_{jl}}(\Omega)$, де $l=1,\ldots,n$, тоді у просторі $\mathbf{E}^{n,q}_{\beta_j}(G)$ існує єдиний розв'язок $u=u(t,x)$ задачі (1), (2). Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин умов (2) і подається у вигляді суми (16), причому*

$$u^0\in\mathbf{C}^n([0,T];W),u^{+}\in\mathbf{E}^{n,q}_{\beta_j^{+}}(G),u^{-}\in\mathbf{E}^{n,q}_{\beta_j^{-}}(G). \tag{25}$$

Звуження розв'язку на інтервал T_m, де $m=0,1,\ldots,n$, належить до $\mathbf{E}^{n,q}_{\beta_{jm}}(T_m\times\Omega)$, звуження пари (u^{+},u^{-}) — до простору $\mathbf{E}^{n,q}_{\beta_{jm}^{+}}(T_m\times\Omega)\times\mathbf{E}^{n,q}_{\beta_{jm}^{-}}(T_m\times\Omega)$ і справджуються нерівності

$$\|u^{\pm}\|^2_{\mathbf{E}^{n,q}_{\beta_{jm}^{\pm}}(T_m\times\Omega)}\leq 4n(n!)^2\sum_{r=0}^{n}A_1^{2r}\times$$

$$\times\sum_{l=1}^{n}\|\varphi^{\pm}\|^2_{\mathbf{E}^{q}_{\gamma_{jl}^{\pm}}(\Omega)},m=0,1,\ldots,n. \tag{26}$$

Доведення. Якщо $k\in\tilde{\mathbf{K}}$, то з умови (19), випливає існування єдиного розв'язку u_k із простору $\mathbf{C}^n[0,T]$, а зі скінченності множини $\tilde{\mathbf{K}}$ маємо $u^0\in\mathbf{C}^n([0,T];W)$.

Якщо ж $k\in\mathbb{Z}\setminus\tilde{\mathbf{K}}$, то з нерівності $|\Delta^*(k)|\geq 1/2$ випливає умова (9) та існування єдиного розв'язку u_k із простору $\mathbf{C}^n[0,T]$. Враховуючи позначення (20)–(24) для розв'язку u_k на інтервалі T_m, де $m=0,1,\ldots,n$, для цього k маємо

$$\tilde{k}^{-2r}e^{2\tilde{k}\beta_{jm}^{\pm}(t)}|u_k^{(r)}(t)|^2\leq\tilde{k}^{-2r}e^{-2\tilde{k}B_m(k,t)}|u_k^{(r)}(t)|^2\leq$$

$$\leq 4n(n!A_1^r)^2\sum_{l=1}^{n}e^{-2\tilde{k}B_l(k,\tau_l)}|\varphi_{lk}|^2\leq$$

$$\leq 4n(n!A_1^r)^2\sum_{l=1}^{n}e^{2\tilde{k}\gamma_{jl}^{\pm}}|\varphi_{lk}|^2,\quad r=0,1,\ldots,n.$$

Звідси випливають відповідні оцінки розв'язку (26) та інші твердження теореми, зокрема формули (25) і нерівність $\|u^{\pm}\|^2_{\mathbf{E}^{n,q}_{\beta_{jm}^{\pm}}(T_m\times\Omega)}\leq 4n(n!)^2\sum_{r=0}^{n}A_1^{2r}\sum_{l=1}^{n}\|\varphi\|^2_{\mathbf{E}^{q}_{\gamma_{jl}}(\Omega)}$.

Зауваження 1. *Якщо $\min_{k\in\tilde{\mathbf{K}}}\Delta(k)=0$, то можливий розв'язок задачі (1), (2) існує з точністю до ядра задачі розмірності $\sum_{k\in\mathbf{K}_1}(n-r_k)$, де r_k — ранг матриці системи (8), $\mathbf{K}_1$ — множина цілочислових розв'язків рівняння $\Delta(k)=0$, за виконання умов ортогональності правих частин умов (2) до цього ядра.*

Отже, умова (19) є необхідною умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Василишин П.Б., Пташник Б.Й. *Багатоточкова задача для інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними.* Укр. мат. журн. 1998, **50** (9), 1155–1168.
2. Волянська I.I., Ільків В.С. *Умови розв'язності триточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними у двовимірному циліндрі.* Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, **12** (2), 74–100.
3. Дикополов Г.В., Шилов Г.Е. *О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960, **24** (3), 369 – 380.
4. Каленюк П. І., Волянська І. І., Ільків В. С., Нитребич З. М. *Про однозначну розв'язність триточкової задачі для рівняння із частинними похідними у двовимірній області.* Мат. методи та фіз.-мех. поля 2017, **60** (3), 46–59.
5. Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. Вид-во НУ "Львівська політехніка, Львів, 2002.
6. Клюс І.С., Пташник Б.Й. *Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь.* Укр. мат. журн. 2003, **55** (1), 21–29.
7. Ланкастер П. Теория матриц. Наука, Москва, 1973.
8. Паламодов В.П. *О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупраcтранстве.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960, **24** (3), 381-386.
9. Покорный Ю.В. *О вторых решениях нелинейной задачи Валле-Пуссена.* Дифференц. уравнения 1970, **6** (9), 1599–1605.
10. Пташник Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Наукова думка, Київ, 1984.
11. Пташник Б.Й., Силюга Л.П. *Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.* Доповіді НАН України 1996, (3), 10–14.
12. Пташник Б.Й., Симотюк М.М. *Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.* Укр. мат. журн. 2003, **55** (2), 241–254.
13. Пташник Б.Й., Тимків І.Р. *Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області.* Мат. методи та фіз.-мех. поля 2011, **54** (1), 15-26.
14. Пташник Б.И., Штабалюк П.И. *Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным.* Дифференц. уравнения 1986, **22** (4), 669–678.
15. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Мир, Москва, 1989.
16. Kalenyuk P.I., Kohut I.V., Nytrebych Z.M. *An investigation into a problem with homogeneous local two-point conditions for a homogeneous system of partial differential equations.* Journal of Mathematics Sciences 2011, **174** (2), 121–135. doi: 10.1007/s10958-011-0285-y (translation of Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya 2009, **52** (4), 7–17. (in Ukrainian))
17. Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M. *On an operational method of solving initial-value problems for partial differential equations induced by generalized separation of variables.* Journal of Mathematics Sciences 1999, **97** (1), 3879-3887. doi: 10.1007/BF02364928 (translation of Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya 1998, **41** (1), 136–145. (in Ukrainian))
18. Malanchuk O.M., Nytrebych Z.M. *Homogeneous two-point froblem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables* Open Mathematics 2017, **15** (1), 101–110. doi: 10.1515/math-2017-0009
19. Nitrebich Z.M. *A boudary-value problem in an unbounded strip.* Journal of Mathematics Sciences 1996,**79** (6), 1388–1392. doi: 10.1007/BF02362789 (translation of Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya 1994, (37), 16–21. (in Ukrainian))
20. Nytrebych Z.M., Ilkiv V.S., Pukach P.Ya. *Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics.* Azerb. Journal of Mathematics 2017, **7** (2), 180–196.
21. Nytrebych Z.M., Malanchuk O.M., Ilkiv V.S., Pukach P.Ya. *On the solvability of two-point in time problem for PDE.* Italian Journal of Pure and Applied Mathematics 2017, (38), 715–726.
22. Symotyuk M.M., Tymkiv I.R. *Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time.* Carpathian Matchematical Publication 2014, **6** (2), 351–359. doi: 10.15330/cmp.6.2.351–359.