УДК 517.9

©2018 р. Т.О. Банах[1], А.К. Прикарпатський[2]

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка
[2] Інститут математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ЕРГОДИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ НЕЛІНІЙНИХ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ ТА АСОЦІЙОВАНИХ З НИМИ ЛОКАЛЬНО ГОМЕОМОРФНИХ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Досліджуються орбіти повільно збурених гамільтонових систем та асоційовані з ними ергодичні деформації лагранжевих многовидів. Основні результати базуються на підході Дж. Мазера [18, 19] до побудови гомологій інваріантних ймовірнісних мір, що мінімізують деякі лагранжеві функціонали, а також на еліптичній теорії Громова-Саламона-Зендера-Флоєра [7, 9, 12, 20, 26] побудови інваріантних многовидів. В праці конструюються інваріантні підмноговиди, котрі є носіями інваріантних ергодичних мір та мають структуру метричних просторів, що допускають локально гомеоморфні відображення. Досліджується проблема конструювання ефективних критеріїв їх глобальної гомеоморфності, сформульованої проф. А.М. Самойленком при дослідженні ергодичних деформацій нелінійних гамільтонових систем та їх адіабатичних інваріантів. Доведено, що відображення $f : X \to Y$ з лінійно зв'язного гаусдорфового простору X в однозв'язний (зокрема, стягуваний) простір Y є гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли f локальним гомеоморфним і прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in Y$ є непорожньою компактною підмножиною в X.

Ключові слова: гамільтонові системи, лагранжеві многовиди, гомеоморфізм, критерій гомеоморфності.

The orbits of sslowly perturbed non-autonomous Hamiltonian systems and associated with them ergodic deformations of the Lagrangian manifolds are studied. Main results are based on teh J. Mather approach [18, 19] to constructing homologies of invariant probabilistic measures, minimizining some Lagrangian functionals, as well as on the Gromov-Salamon-Zehnder-Floer elliptic theory [7, 9, 12, 20, 26] of constructing invariant manifolds. There are built invariant submanifolds, which supporting invariant ergodic measures and having the metric space structure, allowing locally homeomorphic mappings. The problem of constructing effective criteria of their global homerphicity, posed by A.M. Samoilenko at studying ergodic deformations of nonlinear Hamiltonian systemns amd their adiabatic invariants, is analyzed. It is stated that a mapping $f : X \to Y$ from a linearly connected Hausdorf space X in one-connected (in particularly, contractable space) space Y is a homomorphism iff f is a local homeomorphism and preimage $f^{-1}(y)$ of every point $y \in Y$ is a non empty compact set in X.

Keywords: Hamiltonian systems, Lagrangian manifolds, homeomorphism, criterion of homeomorphism.

Вступ

За останні роки методи симплектичної геометрії в застосуванні до вивчення широкого класу гамільтонових динамічних систем зазнали досить бурхливого розвитку [1, 2, 4, 7]. Зокрема, при аналізі структури періодичних розв'язків неавтономних гамільтонових систем на симплектичних многовидах були запропоновані нові математичні методи їх дослідження, що грунтуються на аналогу теорії Морса для нескінченно-вимірних многовидів петель [20, 26] та симплектичній геометрії лагранжевих многовидів [9, 17, 18]. Так, вивчаючи ергодичні міри, асоційовані з лагранжевими динамічними системами на дотичних просторах до конфігураційних замкнутих многовидів, Дж. Мазер [18] запропонував новий підхід до вивчення відповідних інваріантних ймовірнісних мір за допомогою спеціально сконтруйованих функціоналів на групі гомологій лагранжевого многовиду, котрі дають, зокрема, можливість ефективно описати так звані гомології інваріантних ймовірнісних мір, що мінімізують відповідний лагранжевий функціонал дії. Як було показано в [5, 22, 24, 25], підхід Дж. Мазера допускає нетривіальне узагальнення на випадок опису ергодичних мір, що пов'язані натурально з заданою неавтономною періодичною гамільтоновою системою на замкненому симплектичному многовиді. Грунтуючись, зокрема, на варіанті еліптичної техніки М. Громова [2, 9, 20], в праці конструюються скінченновимірні інваріантні підмноговиди петель, асоційованих з лагранжевим многовидом неавтономної гамільтонової системи, які є носіями відповідних інваріантних ергодичних мір. Оскільки побудовані інваріантні многовиди мають структуру метричних просторів, що допускають локально гомеоморфні відображення на стандартні метричні простори, в праці досліджується важлива проблема побудови ефективних критеріїв [3, 8, 23] їх глобальної гомеоморфності, сформульована проф. А.М. Самойленком при дослідженні ергодичних деформацій [4, 14, 15, 22, 24, 25, 27, 28] нелінійних гамільтонових систем та їх адіабатичних інваріантів. Нами встановлено, що відображення $f : X \to Y$ з лінійно зв'язного гаусдорфового простору X в однозв'язний (зокрема, стягуваний) простір Y є гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли f локальним гомеоморфним і прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in Y$ є непорожньою компактною підмножиною в X.

1. Симплектичний аналіз неавтономних періодичних гамільтонових систем

Нехай як вище $(M^{2n}, \omega^{(2)})$ є замкнутий симплектичний многовид з умовою слабкої точності $\omega^{(2)}(\pi_2(M^{2n})) = 0$. Кожній достатньо гладкій функції $H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ відповідає неавтономне векторне поле $K_H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to T(M^{2n})$, яке задовольняє умову

$$i_{K_H}\omega^{(2)} = -dH. \tag{1.1}$$

Відповідне векторне поле на $M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ може бути записане як

$$du/ds = K_H(u;t), \qquad dt/ds = 1, \tag{1.2}$$

де $t \in \mathbb{R}^1/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$, а $(u;t) : \mathbb{R} \to M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ є орбітою відповідного повного потоку $\psi^s : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to M^{2n} \times \mathbb{S}^1$, визначеного для всіх $s \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що векторне поле в (1.2) є 2π-періодичне по еволюційній змінній $t \in \mathbb{S}^1$. Проекція $\psi^s_{t_0} := \psi^s|_{M^{2n}}$, $s \in \mathbb{R}$, для фіксованого параметра $t_0 \in \mathbb{S}^1$ задовольняє, очевидно, умову типу (1), тобто

$$\psi^{s,*}_{t_0}\omega^{(2)} = \omega^{(2)} \tag{1.3}$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$. Таке відображення $\psi^s_{t_0} : M^{2n} \to M^{2n}$, $s \in \mathbb{R}$, яке задовольняє умову (1.3), є симплектичним, див. [1, 4].

Розглянемо тепер 1-форму $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ таку, що $\int\limits_{D^2}(\omega^{(2)} - d\alpha^{(1)}) = 0$ для всякого компактного двовимірного диску $D^2 \subset M^{2n}$. Така 1-форма $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ існує [9, 12] завдяки умові $\omega^{(2)}(\pi_2(M^{2n})) = 0$.

Розглянемо тепер деякий $(n+1)$-вимірний підмноговид $\mathcal{L}^{n+1} \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ такий, що для кожної замкнутої стягувальної гладкої кривої $\gamma \subset \mathcal{L}^{n+1}$ виконується наступна інтегральна рівність:

$$\oint\limits_{\gamma}(\alpha^{(1)}(s) - H(t_0 + s)ds) = 0, \tag{1.4}$$

де $\gamma : \mathbb{R}^1/2\pi\mathbb{Z} \ni s \to \gamma(s) \in M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ є відповідна параметризація кривої $\gamma \subset \mathcal{L}^{n+1}$. Структуру підмноговиду $\mathcal{L}^{n+1} \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ опишемо наступним чином. Нехай $\mathcal{L}^n_{t_0} \subset M^{2n}$ є деякий компактний лагранжевий підмноговид, тобто, за визначенням, $\omega^{(2)}|_{\mathcal{L}^n_{t_0}} = 0$. Тоді за допомогою симплектоморфізма $\psi^s_{t_0} : M^{2n} \to M^{2n}$, $s \in \mathbb{R}$, можна записати вкладення

$$\{\psi^s_{t_0}\mathcal{L}^n_{t_0}, t_0 + s : \ s \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}^{n+1}, \tag{1.5}$$

яке слідує з визначення (1.4). Зокрема, для всіх $t_0 + s \in \mathbb{R}$ можна визначити в околі лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}^n_{t_0} \subset M^{2n}$ відображення $\mathcal{A}_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з $d\mathcal{A}_{t_0}(s) = \alpha^{(1)}(s) - H(s + t_0)ds$, яке є породжуючою функцією для визначеної вище неперервної множини симплектоморфізмів $\psi^s_{t_0} \in \mathrm{Diff}(M^{2n})$, $s \in \mathbb{R}$. Більше того, вираз (1.4) дає можливість визначити природнім чином наступний функціонал типу Пуанкаре-Картана на множині всіх майже скрізь диференційованих кривих γ: $[0,\tau] \to M^{2n} \times \mathbb{S}^1$:

$$\mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma) := \frac{1}{\tau} \int\limits_{\gamma} \left(\alpha^{(1)}(s) - H(s+t_0)ds\right), \quad (1.6)$$

де $\gamma(\tau) = \psi^{\tau}(\gamma(0))$, $\operatorname{supp}\gamma \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \times \mathbb{S}^1$ і $U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ є деяким відкритим околом лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$, що задовольняє умову $\psi_{t_0}^s U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\Sigma_{t_0}(H)$ підмножину кривих γ із носієм в $U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \times \mathbb{S}$ і фіксованими кінцями як вище і таких, що мінімізують функціонал (1.6). Якщо мінімум реалізується, то кожна така крива $\gamma \in \Sigma_{t_0}(H)$ розв'язує динамічну систему (1.2). Щоб описати структуру множини кривих $\Sigma_{t_0}(H)$ більш детально, виберемо згідно [9, 12, 26] майже комплексну структуру $J : M^{2n} \to \operatorname{End}(T(M^{2n}))$ на симплектичному многовиді M^{2n}, де, за визначенням, $J^2 = -\mathbf{1}$, і яка сумісна з симплектичною структурою $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M^{2n})$. Тоді вираз

$$\langle \xi, \eta \rangle := \omega^{(2)}(\xi, J\eta), \quad (1.7)$$

де $\xi, \eta \in T(M^{2n})$, визначає природнім чином ріманову метрику на M^{2n}. По відношенню до цієї метрики наше гамільтонове векторне поле $K_H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to T(M^{2n})$ представляється як $K_H = J\nabla H$, де $\nabla : \mathcal{D}(M^{2n}) \to T(M^{2n})$ позначає градієнтне відображення стосовно введеної вище ріманової метрики (1.7).

Розглянемо тепер простір $\Omega := \Omega(M^{2n} \times \mathbb{S}^1)$ всіх майже срізь неперервно диференційованих кривих в $M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ із фіксованими кінцевими точками. Тоді можна визначити на Ω функціонал виду (1.6) і обчислити відображення $\operatorname{grad}\mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)} : \Omega \to T(\Omega)$:

$$(\operatorname{grad}\mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma), \xi) :=$$

$$= \frac{1}{\tau} \int\limits_0^{\tau} \langle J(\gamma_{t_0})\dot{\gamma}_{t_0}(s) + \nabla H(\gamma_{t_0}; s+t_0), \xi \rangle \, ds, \quad (1.8)$$

де $\gamma := \{\gamma_{t_0}^{(s)}; t_0 + s(\mathrm{mod} 2\pi) : s \in [o,\tau]\} \in \Omega$ і елемент $\xi \in T(\Omega)$. Оскільки всі критичні криві $\gamma \in \Sigma_{t_0}(H)$, що мінімізують функціонал (1.6) розв'язують рівняння Гамільтона (1.2), це дає можливість побудови інваріантної підмножини $\Omega_H \subset \Omega$ такої, що $\Omega_H := \Omega(U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \times \mathbb{S}^1)$. А саме, визначимо криву $\gamma \in \Omega_H(\gamma^{(-)}) \subset \Omega_H$ як таку, що задовільняє наступний градієнтний потік в $U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \times \mathbb{S}^1$:

$$\partial u_{t_0}/\partial z = -\operatorname{grad}\mathcal{A}_{t_0}(u), \qquad \partial t/\partial z = 0 \quad (1.9)$$

для всіх $z \in \mathbb{R}$ при таких асимптотичних умовах:

$$\lim_{z \to -\infty} u_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}^{(-)}(s), \lim_{z \to +\infty} u_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}(s), \quad (1.10)$$

де $s \in [0,\tau]$ і криві $\gamma_{t_0}^{(-)}, \gamma_{t_0} : [0,\tau] \to M^{2n}$ задовольняють систему (1.2). Більше того, крива $\gamma_{t_0}^{(-)} : [0,\tau] \to M^{2n}$ вважається гіперболічною із носієм $\operatorname{supp}\gamma_{t_0}^{(1)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, де параметер $t_0 \in [0, 2\pi]$ є фіксованим. Тепер ми можемо побудувати, варіюючи криву $\gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, аналог так званого нестійкого многовиду $W^u(\gamma_{t_0}^{(-)})$ до цієї гіперболічної кривої $\gamma_{t_0}^{(-)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$. Таким чином, згідно описаній вище конструкції, функціональний многовид $W^u(\gamma_{t_0}^{(-)})$ при умові його компактності в слабкій гладкій топології Вітні [12, 20] може бути вкладеним як точковий компактний підмноговид в M^{2n}, тим самим інтерпретуючи носії кривих, що розв'язують (1.9) та (1.10), із $\operatorname{supp}\gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, як компактний окіл $\mathcal{L}_{t_0}^{(-)}(H) \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ шуканого вище компактного лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$.

Цілком подібна конструкція може бути проведена для випадку, коли умови (1.10) замінено на

$$\lim_{z \to +\infty} \gamma_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}^{(+)}(s),$$
$$\lim_{z \to -\infty} \gamma_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}(s), \quad (2.10a)$$

або на

$$\lim_{z \to -\infty} \gamma_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}^{(-)}(s),$$
$$\lim_{z \to +\infty} \gamma_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}^{(+)}(s), \quad (2.10b)$$

де $\gamma_{t_0}^{(\pm)}:[0,\tau]\rightarrow M^{2n}$ є дві різні строго неперетинні гіперболічні криві в M^{2n} з носіями $\mathrm{supp}\gamma_{t_0}^{(\pm)}\subset\mathcal{L}_{t_0}^n$ і які розв'язують систему рівнянь (1.2).

Використовуючи умови (2.10a) можна побудувати аналогічно стійкий підмноговид $W^s(\gamma_{t_0}^{(+)})$ до гіперболічної кривої $\gamma_{t_0}^{(+)}\subset\mathcal{L}_{t_0}^n$ і далі відповідний точковий окіл $\mathcal{L}_{t_0}^{(+)}(H)\subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ компактного лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n\subset M^{2n}$, що є важливим для вивчення властивостей трансвервального перетину стійкого $W^s(\gamma_{t_0}^{(+)})$ та нестійкого $W^u(\gamma_{t_0})$ многовидів. Аналогічно, використовуючи умови (2.10b) можна побудувати околи $\mathcal{L}_{t_0}^{\pm}(H)\subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ компактного лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n\subset M^{2n}$, які є важливими при вивченні так званих адіабатичних збурень інтегровних за Ліувіллем-Арнольдом гамільтонових систем на симплектичному многовиді M^{2n}.

Скористаємося тепер підходом робіт [9, 12, 20, 26] до вивчення структури функціональної множини Ω_H. Для функції Гамільтона $H:M^{2n}\times\mathbb{S}^1\rightarrow\mathbb{R}$ загального положення множина Ω_H, виявляється, володіє властивістю компактності в слабкій топології Вітні та скінченної розмірності. Це веде до можливості побудови відповідних компактних точкових многовидів $\mathcal{L}_{t_0}^{(\pm)}(H)$ та $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ як околів лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n\subset M^{2n}$. Щоб побачити нагляднише цей перехід до відповідного точкового компактного підмноговиду, розлянемо наступний диференціальний оператор першого порядку як лінеаризацію рівняння (1.9) в напрямку векторного поля $\xi\in T(\Omega_H)$:

$$F_{t_0}(u)\xi=\nabla_z\xi+J(u)\nabla_s\xi+\nabla_\xi J(u)\frac{\partial u}{\partial s}+ +\nabla_\xi\nabla H(u;t_0+s), \qquad (1.11)$$

де $u\in\Omega_H|_{M^{2n}}$ задовольняє наступне рівняння:

$$\partial u/\partial z+J(u)\partial u/\partial s+\nabla H(u;s+t_0)=0 \qquad (1.12)$$

і ∇_z,∇_s та ∇_ξ позначають тут відповідні коваріантні похідні по відношенні до метрики (1.7) на M^{2n}. Якщо $u\in\Omega_H|_{M^{2n}}$ є обмеженою і задовольняє рівняння (1.12), крива γ_{t_0} в M^{2n} має носій $\mathrm{supp}\gamma_{t_0}\subset\mathcal{L}_{t_0}^n$ і криві $\gamma^{(\pm)}$ мають носії $\mathrm{supp}\gamma_{t_0}^{(\pm)}\subset\mathcal{L}_{t_0}^n$, будучи гіперболічними і невиродженими [12,26], то лінійне відображення $F_{t_0}(u):T(\Omega_H)\rightarrow T(\Omega_H)$, визначене в (1.11), є фредгольмовим оператором [13] між відповідними просторами Соболева. При цьому пара відображень (H,J), де $J:M^{2n}\rightarrow\mathrm{End}T(M^{2n})$ задовольняє (1.7), називається регулярною [26], якщо кожний гіперболічний розв'язок (1.2) невироджений і оператор $F_{t_0}(u)$ є сюр'єкцією на $T(\Omega_H)$ для всіх $u\in\Omega_H|_{M^{2n}}$. В загальному випадку можна встановити, що простір $(\mathcal{H},J)_{reg}\subset(\mathcal{H},J)$ регулярних пар $(H,J)\in(\mathcal{H},J)$ є щільним по відношенні до C^∞-топології. Таким чином, для регулярних пар з теореми про неявну функцію [1, 13] слідує, що для будь-якої кривої $\gamma_{t_0}^{(-)}$ із $\mathrm{supp}\gamma_{t_0}\subset\mathcal{L}_{t_0}^n$ простір $\Omega_H(\gamma_{t_0}^{(-)})$ дійсно є скінченновимірним слабко компактним за Вітні функціональним підмноговидом, локальна розмірність якого біля точки $u\in\Omega_H(\gamma_{t_0}^{(-)})$ збігається з індексом Фредгольма оператора $F_{t_0}(u)$. Із скінченності виміру та компактності функціонального простору $\Omega_H(\gamma_{t_0}^{(-)})$ випливає компактність відповідної точкової множини $\mathcal{L}_{t_0}^{(-)}(H)$, яку можна розглядати як компактний інваріантний окіл лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n\subset M^{2n}$.

Щоб дати більш детальний опис компактного околу $\mathcal{L}_{t_0}^{(-)}(H)$, скористаємося результатами Флоера та Громова [2, 9, 20]. Зокрема, з їхньою допомогою можна проаналізувати структуру простору обмежених розв'язків проблеми (1.9)–(1.10). Легко встановлюється, що для будь-яких двох кривих $\gamma^{(-)},\gamma:[0,\tau]\rightarrow\mathcal{L}_{t_0}^n\times\mathbb{S}^1$, що задовольняють рівняння (1.2), наступний додатний функціонал

$$\Phi_{t_0}^{(\tau)}(u):=\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau ds\int\limits_{\mathbb{R}}dz(|\partial u/\partial z|^2+|\partial u/\partial s- -K_H(u;s+t_0)|^2) \qquad (1.13)$$

при умові його обмеженості задовольняє характеристичну рівність

$$\Phi_{t_0}^{(\tau)}(u)=\mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma^{(-)})-\mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma) \qquad (1.14)$$

для всіх $t_0 \in \mathbb{S}^1$ і $\tau \in \mathbb{R}$. Тим самими, якщо права частина рівності (1.14) не зануляється, функціональний простір $\Omega_H(\gamma^{(-)})$ буде *a priori* нетривіальним. Подібним чином, для обмеженого розв'язку $u \in \Omega_H|_{M^{2n}}$ рівняння (1.12) отримується, що

$$\Phi_{t_0}^{(\tau)}(u) = \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma) - \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma^{(+)}), \qquad (2.14a)$$

де відповідна крива $\gamma_{t_0}^{(+)} : [0,\tau] \to M^{2n}$ задовольняє систему (1.2) і є гіперболічною, причому носій $\operatorname{supp}\gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, і накінець, для $u \in \mathcal{L}_{t_0}(H)$

$$\Phi_{t_0}^{(\tau)}(u) = \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma^{(-)}) - \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma^{(+)}), \qquad (2.14b)$$

де криві $\gamma^{(\pm)} : [0,\tau] \to M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ є строго відмінні, гіперболічні з носіями $\operatorname{supp}\gamma_{t_0}^{(\pm)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$. Випадок, коли $\gamma_{t_0}^{(-)} = \gamma_{t_0}^{(+)}$, очевидно, приводить тільки до точок $u \in \mathcal{L}_{t_0}^n$. Таким чином, нами сконструйовані відповідні інваріантні компактні околи $\mathcal{L}_{t_0}^{(\pm)}(H)$ та $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ компактного підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$, які складаються з точок обмежених розв'язків рівнянь (1.9),(1.10) та (2.10a) і (2.10b). Грунтуючись на цих даних та аналітичних виразах (1.14) та (2.14a) і (2.14b), можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 1.1 *Всі околи $\mathcal{L}_{t_0}^{(\pm)}(H)$ та $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ побудовані за схемою, запропонованою вище, є компактними і інваріантними по відношенню до гамільтонового потоку дифеоморфізмів $\psi^s \in \operatorname{Diff}(M^{2n} \times \mathbb{S}^1)$, $s \in \mathbb{R}$.*

Розглянемо тепер випадок компактного інваріантного околу $\mathcal{L}_{t_0}(H) \subset M^{2n}$. Попередній опис простору кривих Ω_H дає можливість, використовуючи підхід Дж. Мазера [6, 18], вивчити інші важливі властивості компактного околу $\mathcal{L}_{t_0}(H)$, зокрема, структуру простору ймовірнісних борелівських мір $\mathcal{M}_{t_0}(H) := \mathcal{M}(T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1)$ із компактним носієм, інваріантних по відношенню до нашого гамільтонового потоку дифеоморфізмів $\psi^s \in \operatorname{Diff}(M^{2n} \times \mathbb{S}^1)$, $s \in \mathbb{R}$, розширеного природним чином на простір $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1$. Цей гамільтонів ψ-потік завдяки твердженню може бути редукованим інваріантним чином на компактний інваріантний підмноговид $\mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}^1 \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$. З метою більш детального вивчення цього редукованого ψ-потоку на підмноговиді $\mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}^1$, припустимо надалі, що наш розширений гамільтоновий ψ_*-потік на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1$ є ергодичним, тобто границя $\lim\limits_{\tau\to\infty} \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma)$ не залежить від початкових точок $(u_0, \dot{u}; t_0) \in T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1$.

Пригадаймо тепер результат [10, 13–15] з функціонального аналізу, який стверджує, що множина ймовірнісних мір на компактному метричному просторі X є підмножиною дуального простору $C^*(X)$ до простору Банаха $C(X)$ неперервних функцій на X. Ця множина є, очевидно, опуклою і, як відомо [19], є метризованим компактом по відношенню до слабкої топології на $C^*(X)$, яку часто ще називають називають слабкою $(*)$-топологією. Обмеження цієї топології до множини борелівських мір часто ще називають нечіткою топологією на них.

Так як простір $\mathcal{P}_{t_0} := T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$ є метризованим і може бути компактифікованим, множина борелівських ймовірнісних мір на $\mathcal{P}_{t_0}$ є також метризованим опуклим компактом у дуальному просторі до банахового простору неперервних функцій на $\mathcal{P}_{t_0}$. Відповідна множина $\mathcal{M}_{t_0}(H)$ буде тоді також компактною опуклою підмножиною цього компакту борелівських ймовірнісних мір на $\mathcal{P}_{t_0}$.

Добре відомий класичний результет Крилова і Боголюбова [16,21] твердить, що будь-який ψ-потік на компактному метричному просторі X має інваріантну ймовірнісну міру. Цей результат може бути адаптованим до нашого метричного компактифікованого простору $\mathcal{P}_{t_0} := T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$ наступним чином. Візьмемо траєкторію $\gamma \in \Omega_H$ розширеного ψ_*-потоку на $\mathcal{P}_{t_0}$ із носієм $\operatorname{supp}\gamma \subset \mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}$, визначеним на інтервалі $[0,\tau] \subset \mathbb{R}$, і покладемо, щоб міра μ_τ на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$ була рівномірно розподілена вздовж орбіти $\gamma \in \Omega_H$. Позначимо через μ точку згущення множини $\{\mu_\tau : \tau \in \mathbb{R}_+\}$ коли $\tau \to \infty$ по відношенню до раніше визначеної нечіткої топології. Ми тепер бачимо, що сконструйована міра, тобто міра $\mu \in \mu_{t_0}(H)$ є нормованою і інваріантною по відношенню до розширеного гамільтонового ψ_*-потоку на $\mathcal{P}_{t_0}$.

Отже, у випадку ергодичності ψ_*-потоку на $\mathcal{P}_{t_0}$ згадана вище границя

$$\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma) = \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} (\alpha^{(1)} - H)d\mu, \qquad (1.15)$$

де 1-форма $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ розглядається як функція $\alpha^{(1)} : \mathcal{P}_{t_0} \to \mathbb{R}$, так як підмноговид $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ за побудовою є компактним і інваріантно вкладеним в M^{2n} завдяки результату твердження . Таким чином є натуральним вивчати властивості функціоналу

$$\mathcal{A}_{t_0}(\mu) := \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} (\alpha^{(1)} - H)d\mu \qquad (1.16)$$

на просторі мір $\mathcal{M}_{t_0}(H)$, де ми для простоти опустили природнє відображення обмеження 1-форми $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ на інваріантний підмноговид $\mathcal{L}_{t_0}(H) \subset M^{2n}$. Будучи зацікавленими саме ергодичними властивостями ψ_*-орбіт на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$, можна дослідити відповідні ергодичні компоненти міри $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$, які мінімізують функціонал (1.16), і які є важливими для вивчення властивостей регулярності ψ_*-потоку на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$. Ці результати можуть бути дальше поширені на адіабатично збурені гамільтонові системи, які залежать від малого додатного параметра $\varepsilon \downarrow 0$, зауваживши, що неперервна гамільтонова функція $H(t) := \tilde{H}(\varepsilon t)$, $t \in \mathbb{R}$, де $\tilde{H}(\tau + 2\pi) = \tilde{H}(\tau)$ для всіх $\tau \in \mathbb{R}$, задовольняє необхідні властивості розглядуваних систем на M^{2n}. При цьому можна також дослідити існування так званих адіабатичних інваріантів із компактними носіями в $\mathcal{L}_{t_0} \subset M^{2n}$, що мають різні застосування в математичній фізиці та механіці. Деякі з отриманих вище результатів можуть бути застосовані до дослідження важливої проблеми трансверсального перетину відповідних стійких та нестійких многовидів до гіперболічних кривих і сингулярних точок, що характеризують згідно з ідеями А. Пуанкаре існування в нашій гамільтоновій системі сильно іррегулярних рухів. Оскільки побудовані інваріантні многовиди мають структуру метричних просторів, що допускають локально гомеоморфні відображення на стандартні метричні простори, є важливим дослідити проблему знаходження ефективних критеріїв їх глобальної гомеоморфності, сформульовану проф. А.М. Самойленком при дослідженні ергодичних деформацій нелінійних гамільтоновних систем та їхніх адіабатичних інваріантів.

2. Локальна гомеоморфність метричних просторів

У цьому розділі ми описуеимо в топологічних термінах умови, за яких локальний гомеоморфізм між топологічними просторами є гомеоморфізмом. Розглянемо неперервне відображення $f : X \to Y$, де X і Y є деякими метричними просторами. Нехай $f(x_0) = y_0$, і $U \subset X$, причому $x_0 \in U$ - ізольована точка прообразу $f^{-1}(y_0) \subset X$.

Визначення. Кратністю $r(f) \in N$ точки $x_0 \in U$ називається число

$$r(f) := \lim_{U\to\{x_0\}} \max_{y\in f(U)} r(y; U), \qquad (2.1)$$

де $r(y; U) \in \mathbb{N}$ число точок прообразу $f^{-1}(y) \cap U$. Відомим є факт, що границя (2.1) існує і є скінченна [4, 8, 23] для так званих власних відображень $f : X \to Y$, для котрих прообраз компакту в Y є компактом в X. При аналізі адіабатичних інваріантів нелінійних повільно збурених гамільтонових динамічних систем на симплектичних многовидах в працях А.М. Самойленка та його учнів [5, 24, 25, 27] була досліджена важлива проблема побудови так званих лагранжевих многовидів, котрі є лінійно-звязними метричними прост装ами, що відображаються в задані стягувальні метричні простори.

Оскільки за побудовою лагранжеві многовиди є тільки локально-гомеоморфними стягувальним метричним просторам, то А.М. Самойленком була сформульована задача встановлення ефективних критеріїв їх глобальної гомеоморфності. На основі аналізу цієї задачі нами встановлено певний критерій гомеоморфності для локально-гомеоморфних метричних простpів, що задовільняють певні додаткові топологічні умови. А саме, має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. *Нехай X - лінійно-звязний* *метричний простір, а Y - стягувальний метричний простір. Тоді кратність $r(f)=1$, а відображення $f: X \to Y$ є гомеоморфізмом X на Y тоді і тільки тоді, коли воно є 1° локальним гомеоморфізмом; 2° власним.*

Доведення. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називаєтся локальногомеоморфним, якщо в кожної точки $x \in X$ знайдеться такий окіл $U \subset X$, що його образ $f(U) \subset Y$ є відкритим в Y. Тоді необхідність властивостей 1° та 2° є очевидна, на чому не зупинятимемось. Достатність потребує більш детального аналізу. Перш за все встановимо сюрєктивність відображення $f : X \to Y$. Згідно 1° образ $f(X) \subset Y$ є відкритим в Y. Тепер досить показати, що він є також замкненим. Нехай послідовність $\{y_n \in f(X) \subset Y : n \in \mathbf{Z}_+\}$ є така, що $\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y} \in Y$. Згідно умові 2° прообраз компактної множини $\{\bar{y}, y_n \in Y : n \in \mathbb{Z}_+\}$ в Y є компактною множиною в X, а тому послідовність прообразів $\{\bar{x} = f^{-1}(\bar{y}), x_n = f^{-1}(y_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ має збіжну підпослідовність $\{x_{n_k} = f^{-1}(y_{n_k}) : k \in \mathbb{Z}_+\}$, тобто $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \tilde{x} \in X$. Враховуючи тепер локальну неперервність відображення $f : X \to Y$ в околі точки $\tilde{x} \in X$, отримуємо, що $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\tilde{x}) = \bar{y} \in f(X)$, тобто образ $f(X) \subset Y$ є замкненою множиною. А оскільки множина Y є звязною, то отримуємо, що $f(X) = Y$, тобто *сюрєктивність* відображення $f : X \to Y$ встановлена. Перейдемо тепер до вивчення його *інєктивності,* тобто встановлення того, що кратність $r(f) = 1$.

Згідно 1° та 2° прообраз кожної точки $y \in Y$ складається із скінченного числа точок із X. Окрім того, число розвязків рівняння $f(x) = y$ як функція точки $y \in Y$ є *постійним* як наслідок неперервності. Дійсно, нехай прообрази точок $y_1, y_2 \in Y$ містять різне число точок. Зєднаємо точки y_1 та $y_2 \in Y$ неперервною кривою $P : [0,1] \to Y$ так, щоб $P(0) = y_1, P(1) = y_2$. Тоді з кожної точки $x_i \in f^{-1}(y_1), i = \overline{1, r(f)}$, виходять також такі неперервні криві $x_i(\lambda) \subset X, i = \overline{1, r(f)}$, що $f(x_i(\lambda)) = P(\lambda), \lambda \in [0,1], i = \overline{1, r(f)}$. Закладаючи, що число точок в прообразах $f^{-1}(y_1)$ та $f^{-1}(y_2)$ є різним, мусимо ствердити, що неперервні криві $x_i(\lambda) \subset X, i = \overline{1, r(f)}$, повинні або галузитися, або перетинатися, суперечить умові 1° локальної гомеоморфності.

Зафіксуємо тепер деяку точку $y_0 \in Y$ і нехай прообраз $f^{-1}(y_0) \subset X$ складається з набору точок $\{x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, ..., x_0^{(m)} \in X : m \in \mathbb{N}\}$, де $m = r(f) \geq 2$. Оскільки простір Y є стягувальним, то існує гомотопія $H_\lambda : Y \to Y, \lambda \in [0,1]$, така, що $H_0 := Id : Y \to Y$, а $H_1 : Y \to \{y_0\}$ є одноточковим відображенням. Позначимо через $\{x^{(j)} := f^{-1}(y) \in X : j = \overline{1,m}\}$ набір точок прообразу точки $y \in Y$. Зєднавши точки $y \in Y$ та $y_0 \in Y$ кривою $\{P(\lambda) := H_\lambda(y) \in Y : \lambda \in [0,1]\}$, розглянемо відповідні криві $\{x^{(j)}(\lambda) := f^{-1}(y) \in X : \lambda \in [0,1]\}, j = \overline{1,m}$. Оскільки кожна крива має два кінці, $x_0^{(j)} := x^{(j)}(0)$ та $x_1^{(j)} := x^{(j)}(1), j = \overline{1,m}$, то такі точки назвемо *еквівалентними.* Позначимо тепер $C_j \subset X, j = \overline{1,m}$, множин и точок, еквівалентних, відповідно точкам $x_0^{(j)} \in X, j = \overline{1,m}$, для всіх $y \in Y$. Ми бачимо, що всі множини $C_j \subset X, j = \overline{1,m}$, є відкритими в X і не перетинними, причому $\bigsqcup_{j=\overline{1,m}} C_j = X$. Враховуючи тепер, що простір X є лінійно звязним, він не може бути обєднанням відкритих звязних не перетинних компонент, тобто ми встановили, що $m = r(f) = 1$, тобто відображення $f : X \to Y$ є інєкцією. І як наслідок отримуємо, що локально гомеоморфне відображення, будучи одночасно інєкцією та сюрєкцією, є оборотним, тобто існує $f^{-1} : Y \to X$, а само відображення $f : X \to Y$ є глобальним гомеоморфізмом метричного простору X на метричний простір Y, що й доводить теорему.

Важливим для застосувань є випадок, коли локально гомеоморфне від-ображення є задане між метричними просторами X 1а Y, де простір X є лінійно-звязним простором, а простір Y характеризується тільки тривіальною фундаментальною групою $\pi_1(Y) = 0$. Нижче ми покажемо, що умови 1° та 2° Теореми в цьому випадку залишаються незмінними. Подамо наступні визначення, потрібні нам для подальшого аналізу.

Означення 2.1 Відображення $f : X \to Y$ між двома топологічними просторами називається

- *локальним гомеоморфізмом*, якщо кожна точка $x \in X$ має такий окіл $O_x \subset X$, що звуження $f{\restriction}O_x : O_x \to f(O_x)$ є гомеоморфізмом O_x на відкриту множину $f(O_x) \subset Y$;
- *накриваючим відображенням*, якщо кожна точка $y \in Y$ має окіл $O_y \subset Y$, прообраз $f^{-1}(O_y)$ якого допускає покриття $\mathcal{U}$ попарно неперетинними відкритими множинами такими, що $f{\restriction}U : U \to U_y$ є гомеоморфізмом для кожного $U \in \mathcal{U}$;
- *прокомпактним*, якщо для кожного $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ є непорожною компактною підмножиною в X.

Зауважимо, що кожне прокомпактне відображення сюр'єктивне, а кожне накриваюче відображення є сюр'єктивним локальним гомеоморфізмом.

Лема 2.1 *Прокомпактне відображення $f : X \to Y$ з гаусдорфового простору X у топологічний простір Y є локальним гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли f є накриваючим відображенням.*

Доведення. Припустимо, що відображення f є прокомпактним локальним гомеоморфізмом. З прокомпактності f випливає, що прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in Y$ є непорожнім компактом в X. Оскільки f є локальним гомеоморфізмом, кожна точка $x \in f^{-1}(y)$ має такий окіл $O_x \subset X$, що $f{\restriction}O_x$ є гомеоморфізмом на відкритий окіл $f(O_x)$ точки $f(x) = y$ в Y. Тобто $O_x \cap f^{-1}(y) = \{x\}$, котре означає, що точка x є ізольованою в $f^{-1}(y)$. Тому компактний простір $f^{-1}(y)$ є дискретним, а отже скінченним. А так як простір X є гаусдорфовим, для кожної точки $x \in f^{-1}(y)$ можна знайти відкритий окіл $V_x \subset O_x$ такий, що сім'я $(V_x)_{x\in f^{-1}(y)}$ є неперетинною.

Розглянемо накінець відкритий окіл $U := \bigcap_{x\in f^{-1}(y)} f(V_x)$ точки y в Y і зауважимо, що $f^{-1}(U)$ є неперетинним об'єднанням $\bigcup_{x\in f^{-1}(y)} U_x$ відкритих множин $U_x := (f{\restriction}V_x)^{-1}(U)$, для кожної з яких звуження $f{\restriction}U_x : U_x \to U$ є гомеоморфізмом. Це означає, що f є накриваючим відображенням. $\square$

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *однозв'язним*, якщо він лінійно зв'язний і має тривіальну фундаментальну групу $\pi_1(X) = 0$.

Зрозуміло, що кожний стягуваний простір є однозв'язним. Сфери виміру $n \geq 2$ є однозв'язними, проте не стягуваними.

Із твердження 1.32 [11] випливає наступний критерій гомеоморфності однозв'язних просторів.

Теорема 2.2. *Кожне накриваюче відображення $f : X \to Y$ з лінійно зв'язного простору X в однозв'язний простір Y є гомеоморфізмом.*

Із теореми 2.2 та леми 2.1 випливає наступна характеризація, що дає відповідь на проблему А.М. Самойленка.

Теорема 2.3. *Відображення $f : X \to Y$ з лінійно зв'язного гаусдорфового простору X в однозв'язний простір Y є гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли f є прокомпактним локальним гомеоморфізмом.*

Оскільки кожен стягуваний простір є однозв'язним, із теореми випливає

Наслідок 2.1. *Відображення $f : X \to Y$ з лінійно звязного гаусдорфового простору X у стягуваний простір Y є гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли f є прокомпактним локальним гомеоморфізмом.*

Автори вважають своїм обов'язком виразити щиру вдячність колегам з Інституту математики НАН України та мехмату Київського наqонального університету імені Тараса Шевченка за корисні обговорення отриманих результатів. Авторам особливо вдячні академіку А.М.Самойленку за обговорення метричних аспектів проблеми ергодичних деформацій неавтономних гамільтонових систем, а також професору А.М. Плічку за ряд корисних порад та консультацій з функціонального аналізу, а також зауважень щодо деяких аспектів теореми Шоке та її застосувань.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Abraham R., J. Marsden J. Foundations of Mechanics.* Commings, USA, 1978, 806p.
2. *Aebischer B., Borer M. et al. Symplectic geometry: Introductory course.* — Basel: Birkhauses Verlag, Basel, 1992. — P.79–165.
3. *Arnold V.I. A note on Weierstrass' auxiliary theorem* // Functional Analysis and Its Applications. –1967. –**1**, N3. –P. 173–179.
4. *Арнольд В.И. Математические методы классической механики.* — М: Наука, 1989. — 408 С.
5. *Banakh I., Banakh T., Plichko A., Prykarpatsky A., On local convexity of nonlinear mappings between Banach spaces* // Cent. Eur. J. Math. – 2012. –**10**, N6. – P. 2264–2271.
6. *R.E. Edwards R.E., Functional analysis* . — New York: Holt, Rinehart and Winston Publ., 1965. — 1071 P.
7. *Eliashberg Y., Givental A., Hofer H.. Introduction to Symplectic Field Theory*, In: Alon N., Bourgain J., Connes A., Gromov M., Milman V. (eds) Visions in Mathematics. Modern Birkhauser Classics. — Basel: Birkhauser, 2000. — P.560–673.
8. *Эрве М. Функции многих переменных.* — М.: Мир, 1985. — 164 С.
9. *Floer A. Morse theory for Lagrangian intersections* // J. Diff. Geom. – 1988. – **28** – P.513–547.
10. *Halmosh P.R.* Lectures on the ergodic theory. — Tokio: Math. Soc. of Japan Publ., 1956. — 147 P.
11. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambdidge Univ. Press, 2002.
12. *Hofer H. Lusternik-Schnirelman theory for Lagrangian intersections* // Ann. Inst. Henri Poincare. –1968. – **5**. – P. 456–499.
13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.* —М.: Наука, 1977. —740 С.
14. *Каток А.Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. — 767 С.
15. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980. — 383 С.
16. *Kryloff N.M., Bogoliubov N.N. La theorie generale de la mesure et son application á l'etude des systemes dynamiques de la mechanique nonlineaire.* – Ann.Math. –1937. –**II**, N38. – P. 65–113.
17. *Mane R. On the minimizing measures of Lagrangian dynamical systems.* –1992. – Nonlinearity. –**5**. – P. 623–638.
18. *Mather J.N., Action minimizing measures for positive definite Lagrangian systems.* – Math.Zeitschr.. –1991. –**207**. –P. 169–207.
19. *Mather J. Variational construction of connecting orbits.* –Ann.Inst.Fourier, Grenoble. –1993. –**43**, N5. –P. 1349–1386.
20. *McDuff D., Elliptic methods in symplectic geometry.* –Bull. AMS. –1990. –**23**. – P. 311–358.
21. *Немыцкий В.В. Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений.* — М.: Гостехиздат, 1949. — 550 С.
22. *Prykarpatsky A.K. Symplectic field theory approach to studing ergodic measures related with nonautonomous Hamiltonian systems.* –Univ. Iagellonicae Acta Math. –2004. – P. 123–138.
23. *Palais R.S. Natural operations on differential forms.* – Trans. Amer. Math. Soc.. –1959. –**92**. – P. 125–141.
24. *Prykarpats'kyi Ya.A. Symplectic approach to constructing ergodic measures.* – Ukrainian Mathematical Journal. –2006. – **58**, N5. – P. 763–778.
25. *Prykarpats'kyi Ya.A. Mel'nikov-Samoilenko adiabatic stability problem.* – Ukrainian Mathematical Journal. –2006. –**58**, N6. – P. 887–903.
26. *Salamon D., Zehnder E. Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index.* – Comm. Pure Appl. Math. – 1992. –**45**. –P. 1303–1360.
27. *Samoilenko A.M. Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations*, (Mathematics and its Applications). — Amsterdam: Kluwer Publisher, 1991. —325 P.
28. *Samoilenko A.M., Prykarpats'kyi A.K., Samoilenko V.H. Lyapunov-Schmidt approach to studying homoclinic splitting in weakly perturbed Lagrangian and Hamiltonian systems.* – Ukrainian Mathematical Journal. –2003. –**55**, N1. – P. 82–92.