

ДО ПИТАННЯ ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПЛОЩИНІ СІДРА

Отримано теореми про квазінеперервність та сукупну неперервність нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{M}$ зі значеннями в площині Сідра $\mathbb{M}$.

We obtain results on the quasi-continuity and joint continuity of separately continuous mappings $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{M}$ with values in the Ceder plane $\mathbb{M}$.

1. Вступ. В останні роки активно ведуться дослідження множини $C(f)$ точок неперервності нарізно неперервних відображень зі значеннями в просторах близьких до метризовних (див. [1] і вказану там літературу). Одним із класів таких просторів є клас вичерпних просторів, який був уведений Дж.Сідром в [2] під назвою M_3 -простори. Там же був наведений приклад вичерпного неметризованого простору – так звана площина Сідра $\mathbb{M}$. В праці [3] були вивчені деякі властивості простору $\mathbb{M}$, а також досліджено множину точок неперервності $C(f)$ нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{M}$, визначених на добутку зв'язних топологічних просторів. Крім того, в [4] було показано, що у кожній квазінеперервної функції $f : X \rightarrow \mathbb{M}$ множини $C(f)$ залишкова в X , а також була досліджена множина $C(f)$ для KC -функцій $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{M}$, які квазінеперервні відносно першої змінної і неперервні відносно другої змінної. Ці результати було анонсовано в [5]. Оскільки нарізно неперервні відображення часто виявляються квазінеперервними, то природно виникло питання про квазінеперервність нарізно неперервних відображень зі значеннями в площині Сідра. Це питання ми досліджуємо в даній роботі. Разом з тим з допомогою техніки, розробленої в [6, 7], ми отримуємо тут нові результати про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{M}$, у яких зв'язність вимагається лише від останнього простору X_n .

2. Квазінеперервність нарізно неперервних відображень зі значеннями в цілком регулярних просторах. Функція $f : X \rightarrow Y$ називається *квазінеперервною в точці x_0* , якщо для довільного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y і для довільного околу U точки x_0 в X існує така відкрита непорожня множина G в просторі X , що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$, і просто *квазінеперервною*, якщо вона є такою у кожній точці простору X .

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір, Y – цілком регулярний топологічний простір і $x_0 \in X$. Відображення $f : X \rightarrow Y$ буде квазінеперервним в точці x_0 , тоді і тільки тоді, коли для довільної неперервної функції $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ композиція $h = g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – це квазінеперервна в точці x_0 функція.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай f – квазінеперервне в точці x_0 відображення, $y_0 = f(x_0)$ і $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ – довільна неперервна функція. Доведемо, що h – квазінеперервна в точці x_0 функція. Нехай W – довільний окіл точки $z_0 = h(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0)$ в $\mathbb{R}$. З неперервності функції g в точці y_0 , випливає, що існує окіл V точки y_0 в Y , такий, що $g(V) \subseteq W$. Нехай U – довільний окіл точки x_0 в X , з квазінеперервності функції f в точці x_0 випливає, що існує відкрита непорожня множина G в просторі X , така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. В такому разі, $h(G) = g(f(G)) \subseteq g(V) \subseteq W$. Отже, функція h квазінеперервна в точці x_0 .

Достатність. Припустимо, що f не є

квазінеперервною в точці x_0 . Доведемо, що існує неперервна функція $g_0 : Y \rightarrow [0, 1]$, така, що $h_0 = g_0 \circ f$ не буде квазінеперервною в точці x_0 . Нехай існують околиці U та V точок x_0 та y_0 в просторах X та Y відповідно, такі, що для довільної відкритої непорожньої множини G в просторі X , такої, що $G \subseteq U$, образ $f(G) \not\subseteq V$. З того, що простір Y цілком регулярний, маємо, що існує неперервна функція $g_0 : Y \rightarrow [0, 1]$, така, що $g_0(y_0) = 0$ і $g_0(y) = 1$ на $Y \setminus V$. Покажемо, що $h_0 = g_0 \circ f$ не є квазінеперервною в точці x_0 . Нехай G – довільна відкрита непорожня множина, така, що $G \subseteq U$. За побудовою, $f(G) \not\subseteq V$, отже існує точка $x \in G$, така, що $f(x) \notin V$. Тоді $h_0(x) = g_0(f(x)) = 1$, а $h_0(x_0) = g_0(f(x_0)) = g_0(y_0) = 0$. Розглянемо окіл $W = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ точки $h_0(x_0) = 0$ в $\mathbb{R}$. За доведеним, для довільної відкритої непорожньої множини G , такої, що $G \subseteq U$ існує точка $x \in G$, така, що $h_0(x) = 1 \notin W$. Отже, функція h_0 не є квазінеперервною в точці x_0 . Отримана суперечність доводить достатність вказаної умови.

Загальніший від теореми 1 результат для $\mathcal{A}$ -неперервних відображень був встановлений у праці [8]. Ми тут дали доведення для квазінеперервних функцій для повноти викладу.

3. Деякі властивості добутоків топологічних просторів. Тут ми встановимо теорему про боровість та наявність зліченної псевдобазис добутоків n просторів.

Нагадаємо, що система $\mathcal{V}$ відкритих множин називається *псевдобазисом* топологічного простору X , якщо для кожної непорожньої відкритої в X множини G існує такий елемент $V \in \mathcal{V}$, що $V \neq \emptyset$ і $V \subseteq G$. Ми кажемо, що *простір X має зліченну псевдобазис*, якщо існує така послідовність $(V_n)_{n=1}^\infty$ відкритих множин в X , що система $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ є псевдобазисом в X .

Нам буде потрібний один результат про боровість добутоків з [7].

Теорема 2. *Нехай X і Y – берівські простори і Y має зліченну псевдобазис. Тоді і добуток $P = X \times Y$ є берівським.*

Цю теорему можна узагальнити.

Теорема 3. *Нехай X_1 – берівський про-*

стір, $X_2, \dots, X_{n+1}$ – берівські простори зі зліченною псевдобазисом. Тоді і добуток $P = X_1 \times \dots \times X_{n+1}$ є берівським.

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n . При $n = 1$ – це теорема 2. Для доведення теореми при $n = 2$, покладемо $X = X_1 \times X_2$ і $Y = X_3$. За теоремою 2 простір X берівський, отже, таким буде і $X \times Y = X_1 \times X_2 \times X_3$. Припустимо тепер, що твердження теореми вірне для добутку n просторів і доведемо, що вона має місце і для $n + 1$ множників. Для цього досить покласти $X = X_1 \times \dots \times X_n$ і $Y = X_{n+1}$. За припущенням простір X берівський, тому за теоремою 2 простір $X \times Y = X_1 \times \dots \times X_{n+1}$ також буде берівським.

Теорема 4. *Добуток $X_1 \times \dots \times X_n$ просторів зі зліченною псевдобазисом залишається простором зі зліченною псевдобазисом.*

Доведення. Перевіримо, що твердження теореми вірне для добутку двох просторів. Нехай $X = X_1$, $Y = X_2$, $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобазис в просторах X та Y відповідно. Розглянемо систему $\mathcal{W}$, що складається з усіх можливих добутоків $W_{m,n} = U_m \times V_n$, і доведемо, що $\mathcal{W}$ – зліченна псевдобазис в $X \times Y$. Нехай W – довільна відкрита непорожня в $X \times Y$ множина. За означенням топології добутку існують відкриті непорожні множини U та V в просторах X та Y відповідно, такі, що $U \times V \subseteq W$. Крім того, знайдуться непорожні множини U_m та V_n з відповідних псевдобазис, такі, що $U_m \subseteq U$ та $V_n \subseteq V$. В такому разі $W_{m,n} = U_m \times V_n \subseteq U \times V \subseteq W$, а отже, система $\mathcal{W}$ – псевдобазис в $X \times Y$. Зліченність її випливає з того, що подвійну послідовність легко перенумерувати у просту наступним чином: $W_1 = W_{1,1}$, $W_2 = W_{2,1}$, $W_3 = W_{2,2}$, $W_4 = W_{3,1}$, $W_5 = W_{3,2}$, ...

Припустимо тепер, що теорема вірна для добутку n просторів і перевіримо для $n + 1$. Покладемо $X = X_1 \times \dots \times X_n$ і $Y = X_{n+1}$. За припущенням X – простір зі зліченною псевдобазисом, тому за доведеним для добутку двох просторів $X \times Y = X_1 \times \dots \times X_{n+1}$ – простір зі зліченною псевдобазисом.

4. Квазінеперервність KC -функцій зі значеннями в цілком регулярному

просторі. Ми будемо використовувати такі позначення. Для функції $f : X \times Y \rightarrow Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$.

Функція $f : X \times Y \rightarrow Z$ називається *КС-функцією*, якщо для кожного $x \in X$ функція $f^x : Y \rightarrow Z$ неперервна і для кожного $y \in Y$ функція $f_y : X \rightarrow Z$ квазінеперервна. Скупність усіх таких функцій ми позначаємо символом $КС(X \times Y, Z)$.

Нам знадобиться теорема, яка впливає з результатів праці [6].

Теорема 5. *Нехай X і Y – топологічні простори, причому Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f \in КС(X \times Y, Z)$. Тоді для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X .*

З неї легко виводиться

Теорема 6. *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності, Z – цілком регулярний простір і $f : X \times Y \rightarrow Z$ – КС-функція. Тоді f – квазінеперервна функція.*

Доведення. Нехай $g : Z \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція і $h = g \circ f$. Доведемо, що $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ – це квазінеперервна функція.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0)$ – довільна точка з $X \times Y$. Доведемо, що h квазінеперервна в точці p_0 . Зауважимо, що $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ – це теж КС-функція. Справді, для кожного $x \in X$ функція $h^x = g \circ f^x$ є неперервною, як композиція двох неперервних функцій і для кожного $y \in Y$ функція $h_y = g \circ f_y$ є квазінеперервною за доведеним у пункті 2. За теоремою 5 множина $C_{y_0}(h)$ залишкова в X , адже h набуває значень у метризовному просторі $\mathbb{R}$. Оскільки простір X берівський, то кожна залишкова множина в ньому є всюди щільною, а отже, $\overline{C_{y_0}(h)} = X$.

Нехай $\varepsilon > 0$, U – довільний окіл точки x_0 в X , V – довільний окіл точки y_0 в Y і $O = U \times V$ – базисний окіл точки p_0 в $X \times Y$. Оскільки функція $h_{y_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$ квазінеперервна в точці x_0 , то існує така відкрита непорожня множина U_1 в X , що $U_1 \subseteq U$ і $|h_{y_0}(x) - h_{y_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, як тіль-

ки $x \in U_1$. Множина $C_{y_0}(h)$ всюди щільна в X , тому $C_{y_0}(h) \cap U_1 \neq \emptyset$. Отже, існує точка $x_1 \in U_1 \cap C_{y_0}(h)$. В такому разі, $p_1 = (x_1, y_0) \in C(h)$ і $x_1 \in U_1$. З неперервності функції h в точці p_1 випливає, що існують такі відкриті околи U_0 і V_0 точок x_1 і y_0 в просторах X і Y відповідно, що $U_0 \subseteq U_1$, $V_0 \subseteq V$ і $|h(p) - h(p_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$ на множині $O_0 = U_0 \times V_0$. Тоді $O_0 \subseteq O$, множина O_0 відкрита і непорожня в $X \times Y$ і для довільної точки $p = (x, y) \in O_0$ будемо мати

$$\begin{aligned} |h(p) - h(p_0)| &= |h(p) - h(p_1) + h(p_1) - h(p_0)| \leq \\ &\leq |h(p) - h(p_1)| + |h(p_1) - h(p_0)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |h_{y_0}(x_1) - h_{y_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

бо $x_1 \in U_1$. Це й дає нам квазінеперервність функції h в точці p_0 . Тоді за теоремою 1 функція f квазінеперервна в точці p_0 .

5. Квазінеперервність нарізно неперервних функцій багатьох змінних зі значеннями в площині Сідра. Площиною Сідра $\mathbb{M}$ ми називаємо топологічний простір, що складається з точок півплощини $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, топологічна структура на якому вводиться так: множина W буде околom точки $p = (x, y)$ з $y > 0$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon \in (0, y)$, що $W_\varepsilon(p) = \{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq W$, і околom точки $p = (x, 0)$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $W_\varepsilon(p) = ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times [0, \varepsilon)) \setminus (\{x\} \times (0, \varepsilon)) \subseteq W$.

Наступна теорема є наслідком теореми 6.

Теорема 7. *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності і $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{M}$ – КС-функція. Тоді f – квазінеперервна функція.*

Доведення. Площина Сідра $\mathbb{M}$ – гаусдорфовий і вичерпний простір, а значить нормальний [9]. Тому $\mathbb{M}$ – цілком регулярний простір. Отже, за теоремою 6 функція $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{M}$ є квазінеперервною.

Теорема 8. *Нехай X_1 – берівський простір, $X_2, \dots, X_{n+1}$ – берівські простори зі зліченною псевдобазою і першою аксіомою зліченності і $f : X_1 \times \dots \times X_{n+1} \rightarrow \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення. Тоді f квазінеперервне.*

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n . Для $n = 1$ твердження теореми випливає з теореми 7, адже довільна нарізно неперервна функція є KC -функцією. Припустимо, що твердження теореми вірне для добутку n просторів і доведемо, що воно виконується і для $n + 1$ множників. Покладемо $X = X_1 \times \dots \times X_n$ і $Y = X_{n+1}$. Зауважимо, що за теоремою 3 простір X є берівським. Для довільного $y_0 \in Y$ розглянемо відображення $f_{y_0} : X \rightarrow \mathbb{M}$. За індуктивним припущенням воно є квазінеперервним. Але для довільного $x_0 \in X$ відображення $f^{x_0} : Y \rightarrow \mathbb{M}$ є неперервним, отже f – це KC -функція. Таким чином, згідно з теоремою 7 функція $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{M}$ є квазінеперервною.

6. Сукупна неперервність нарізно неперервних функцій багатьох змінних зі значеннями в площині Сідра.

Для встановлення основного результату даної роботи нам буде потрібний спрощений варіант одного результату з [4, 5].

Теорема 9. *Нехай X – топологічний простір зі зліченною псевдобазою, Y – зв'язний берівський простір і $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{M}$ – KC -функція. Тоді*

(i) *якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X ;*

(ii) *якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в X .*

Теорема 10. *Нехай X_1 – берівський простір зі зліченною псевдобазою, $X_2, \dots, X_n$ – берівські простори зі зліченною псевдобазою, що задовольняють першу аксіому зліченності, X_{n+1} – зв'язний берівський простір, $f : X_1 \times \dots \times X_{n+1} \rightarrow \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення, $X = X_1 \times \dots \times X_n$ і $Y = X_{n+1}$. Тоді*

(i) *якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X ;*

(ii) *якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f) = \{x \in$*

$X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ *залишкова в X .*

Доведення. За теоремою 8 для кожного $y \in Y$ відображення $f_y : X \rightarrow \mathbb{M}$ буде квазінеперервним. Крім того, за умовою для кожного $x \in X$ відображення $f^x : Y \rightarrow \mathbb{M}$ є неперервним. Тому $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{M}$ – це KC -функція. Зауважимо, що за теоремою 4 добуток $X = X_1 \times \dots \times X_n$ є простором з не більш ніж зліченною псевдобазою. Залишилось скористатись теоремою 9.

Висловлюю щирі вдячність Маслюченку Володимирі Кириловичу за допомогу та постійну увагу при написанні цієї статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Маслюченко В., Мироник О. Сукупна неперервність відображень зі значеннями у різних узагальненнях метризовних просторів // Всеукр. наук. конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (20 - 26 лютого 2012 р.). Тези доповідей. – Ів.-Франківськ: Прик. нац. ун-т, 2012. – С. 5-6.
2. Ceder J. Some generalizations of metric spaces // Pacif. J. Math. – 1961. – **11**. – P. 105-126.
3. Мироник О.Д. Про нарізно неперервні відображення зі значеннями в площині Сідра // Бук. мат. журн. – 2013. – **1**, №3-4. – С. 100-105.
4. Маслюченко В.К., Мироник О.Д. Про неперервність KC -функцій зі значеннями в площині Сідра // Карпатські математичні публікації. (у друці)
5. Маслюченко В., Мироник О. KC -функції зі значеннями у площині Сідра // Всеукр. наук. конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (24 лютого - 2 березня 2014 р.). Тези доповідей. – Ів.-Франківськ: Прик. нац. ун-т, 2014. – С. 73-76.
6. Маслюченко В.К. Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, №4. – С. 39-45.
7. Маслюченко В.К. Нарізно неперервні відображення і простори Кете. Дис. ... доктора фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 345с.
8. Маслюченко В.К. Про нарізні і сукупні модифікації неперервності // Мат. студії. – 2006. – **25**, №2. – С. 213-218.
9. Borges C. On stratifiable spaces // Pacif. J. Math. – 1966. – **17**, N1. – P. 1-16.