

Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, м. Чернівці

## КРАЙОВА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Для лінійного параболічного рівняння досліджено задачу Діріхле з імпульсною дією за часовою змінною. Коефіцієнти рівняння мають степеневі особливості довільного порядку за часовою і просторовими змінними на деякій множині точок. Знайдено умови існування і єдиності розв'язку поставленої задачі в гільдерових просторах із степеневою вагою.

Ключові слова: крайова задача, імпульсна дія, параболічне рівняння, розв'язок задачі, інтерполяційні нерівності, оцінка розв'язку.

The Dirichlet problem with a pulse effect on a time variable for a linear parabolic equation is investigated. The coefficients of the equation have power characteristics of arbitrary order in time and space variables on a certain set of points. Conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem in Hölder spaces with power weight are found.

Keywords: the boundary value problem, pulse effect, parabolic equation, solution of the problem, interpolation inequalities, estimation of the solution.

В сучасних прикладних і теоретичних дослідженнях часто зустрічаються задачі з різними особливостями та виродженнями. Задачі для рівнянь з частинними похідними, коефіцієнти яких мають особливості, виникають в квантовій механіці, фізиці, техніці, теорії ядерних ланцюгових реакцій тощо.

Всебічне вивчення розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією наведено в монографіях [1,2,3]. Вивченню якісних властивостей розв'язків крайових задач для рівнянь з виродженням присвячено монографії [6,7]. Класичним розв'язкам крайових задач з імпульсною дією для параболічних рівнянь, коефіцієнти яких мають степеневі особливості за просторовими змінними, присвячені праці [8,9]. Дослідженню нелокальних багатоточкових за часом крайових задач та задач з інтегральними умовами для параболічних рівнянь зі степеневим виродженням у коефіцієнтах рівняння присвячено праці [10,11].

У цій статті розглядається задача Діріхле для лінійного параболічного рівняння другого порядку із степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння за будь-якими змінними на деякій множині точок та імпульсними умовами за часовою змін-

ною у визначені моменти часу. У гільдерових просторах зі степеневою вагою одержано існування, єдиність та встановлено оцінки розв'язку поставленої задачі.

Нехай область  $D$  є обмеженою з простору  $R^n$  з межею  $\partial D$ ,  $\dim D = n$ ,  $\Omega$  – деяка обмежена область  $\bar{\Omega} \subset D$ ,  $\dim \Omega \leq n - 1$ . Розглянемо задачу знаходження функції  $u(x, t)$  в області  $Q = [t_0, t_{N+1}] \times D$ , яка при  $t \neq t_\lambda$ ,  $\lambda \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $t \neq \eta$ ,  $\eta \neq t_\lambda$   $x \in D \setminus \bar{\Omega}$  задовольняє рівняння

$$(Lu)(t, x) = \left[ \partial_t - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n A_i(t, x) \partial_{x_i} + A_0(t, x) \right] u(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

умови за змінною  $t$

$$u(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad (2)$$

$$u(t_\lambda + 0, x) - u(t_\lambda - 0, x) = b_\lambda(x)u(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(x) \quad (3)$$

і крайову умову

$$\lim_{x \rightarrow z \in \partial D} [u(t, x) - g(t, x)] = 0 \quad (4)$$

де  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_{N+1}$ ,  $t_0 < \eta < t_{N+1}$ .

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) і крайової умови (4) у точці  $P(t, x) = Q \setminus Q_{(0)}$  будуть характеризувати функції  $s_1(\beta_i^{(1)}, t)$ ,  $s_2(\beta_i^{(2)}, x)$ :  $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = |t - \eta|^{\beta_i^{(1)}}$  при  $|t - \eta| \leq 1$ ,  $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = 1$  при  $|t - \eta| \geq 1$ ;  $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = \rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$  при  $\rho(x) \leq 1$ ,  $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = 1$  при  $\rho(x) \geq 1$ ,  $\rho(x) = \inf_{z \in \Omega} |x - z|$ ,  $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$ ,  $\nu \in \{1, 2\}$ ,  $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)}, \dots, \beta_n^{(\nu)})$ ,  $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$ ,  $Q_{(0)} = \{(t, x) | t = \eta, x \in D\} \cup \{(t, x) | t \in [t_0, t_{N+1}], x \in \Omega\}$ .

Позначимо через  $Q^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times D$ ,  $\Gamma^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$   $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , числа  $l$ ,  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$ ,  $\gamma^{(1)}$ ,  $\gamma^{(2)}$ ,  $\mu_j^{(1)}$ ,  $\mu_j^{(2)}$  – дійсні числа,  $q^{(\nu)} \geq 0$ ,  $\gamma^{(\nu)} \geq 0$ ,  $l \geq 0$ ,  $\mu_j^{(\nu)} \geq 0$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $[l]$  – ціла частина числа  $l$ ,  $\{l\} = l - [l]$ ,  $P(t, x)$ ,  $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$ ,  $P_2(t^{(2)}, x^{(1)})$ ,  $R_i(t^{(2)}, x^{(2)})$  – довільні точки із  $Q^{(k)}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_i^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ ,  $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ .

Означимо простори в яких вивчається задача (1) – (4). Позначимо через  $H^l(\gamma; \beta; q; Q)$  – множину функцій  $u$ , які мають неперервні похідні в  $Q^{(k)} \setminus Q_{(0)}$  при  $t \neq t_\lambda$  вигляду  $\partial_t^s \partial_x^r$ ,  $2s + |r| \leq [l]$ , для яких скінченна норма

$$\|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_0 = \sup_k \left\{ \sup_{\overline{Q}^{(k)}} |u| \right\} \equiv \|u; Q\|_0,$$

$$\|u; \gamma; \beta; q; Q\|_l =$$

$$= \sup_k \left\{ \sum_{2s+|r| \leq [l]} \|u; \gamma; \beta; q; Q^{(k)}\|_{2s+|r|} + \langle u; \gamma; \beta; q; Q^{(k)} \rangle_l \right\} \equiv$$

$$\equiv \sup_k \left\{ \sum_{2s+|r| \leq [l]} \sup_{P \in \overline{Q}^{(k)}} [s_1(q^{(1)} + (2s + |r|)\gamma^{(1)}, t) \times s_2(q^{(2)} + 2s\gamma^{(2)}, x) |\partial_t^s \partial_x^r u(P)| \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{i=1}^n s_1(-r_i \beta_i^{(1)}, t) s_2(r_i(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}), x) \right\} +$$

$$+ \sup_k \sum_{2s+|r|= [l]} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \sup_{(P_2 R_\nu) \subset \overline{Q}^{(k)}} [s_1(q^{(1)} + [l]\gamma^{(1)}, t^{(2)}) s_2(q^{(2)} + 2s\gamma^{(2)}, \tilde{x}) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \prod_{i=1}^n s_1(-r_i \beta_i^{(1)}, t^{(2)}) s_2(r_i(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}), \tilde{x}) \times \right.$$

$$\left. \times |\partial_t^s \partial_x^r u(P_2) - \partial_t^s \partial_x^r u(R_\nu)| |x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}|^{-\{l\}} \times \right.$$

$$\left. \times s_1(\{l\} \beta_\nu^{(1)}, t^{(2)}) s_2(\{l\}(\gamma^{(2)} - \beta_\nu^{(2)}), \tilde{x}) \right] +$$

$$+ \sup_{(P_1 P_2) \subset \overline{Q}^{(k)}} [s_1(q^{(1)} + l\gamma^{(1)}, \tilde{t}) \times$$

$$\times s_2(q^{(2)} + (2s + \{l\})\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n s_1(-r_i \beta_i^{(1)}, \tilde{t}) s_2(r_i(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}), x^{(1)}) \times$$

$$\left. \times |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2}\}} |\partial_t^s \partial_x^r u(P_1) - \partial_t^s \partial_x^r u(P_2)| \right\},$$

де  $|r| = r_1 + \dots + r_n$ ,  $s_1(q, \tilde{t}) = \min(s_1(q, t^{(1)}), s_1(q, t^{(2)}))$ ,  $s_2(q, \tilde{x}) = \min(s_2(q, x^{(1)}), s_2(q, x^{(2)}))$ .

Задачу (1) – (4) досліджуємо за таких умов:

а) для довільного вектора  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\forall (t, x) \in Q \setminus Q_{(0)}$  виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i=1}^n s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_1(\beta_j^{(1)}, t) \times$$

$$\times s_2(\beta_i^{(2)}, x) s_2(\beta_j^{(2)}, x) A_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2,$$

$\pi_1, \pi_2$  – фіксовані додатні сталі та

$$s_1(\mu_i^{(1)}, t) s_2(\mu_i^{(2)}, x) A_i \in H^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q),$$

$$s_1(\mu_0^{(1)}, t) s_2(\mu_0^{(2)}, x) A_0 \in H^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q),$$

$$A_0 \geq -a, \quad a > 0, \quad s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_1(\beta_j^{(1)}, t) \times$$

$$s_2(\beta_i^{(2)}, x) s_2(\beta_j^{(2)}, x) A_{ij} \in H^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q),$$

$$\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D.$$

б)  $f \in H^\alpha(\gamma; \beta; \mu_0; Q)$ ,  $\varphi_0 \in H^{2+\alpha}(\tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; D)$ ,  $\tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$ ,  $\tilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$ ,

$\varphi_\lambda \in H^{2+\alpha}(\tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; Q \cap (t = t_\lambda))$ ,  $b_\lambda \in C^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_\lambda))$ ,  $g \in H^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q^{(\lambda)})$ ,

$g(t_\lambda + 0, x) - g(t_\lambda - 0, x) = b_\lambda(t_\lambda, x) g(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(t_\lambda - 0, x)$  для  $x \in \Gamma \cap (t = t_\lambda)$ ,

$\gamma^{(\nu)} = \max\{\max_i(1 + \beta_i^{(\nu)}), \max_i(\gamma^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)})$ ,

$\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\}$ ,  $\nu \in \{1, 2\}$

Правильна така теорема.

**Теорема 1.** Нехай для задачі (1)–(4) виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв’язок задачі (1)–(4) із простору  $H^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$  і справджується нерівність

$$\begin{aligned} \|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq c \left\{ \sum_{k=1}^N \prod_{\lambda=k}^N (1 + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0 \times \right. \\ \times (\|\varphi_{k-1}; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_{k-1})\|_{2+\alpha} + \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k-1)}\|_\alpha + \\ + \|g; \gamma; \beta; 0; Q^{(k-1)}\|_{2+\alpha}) + \\ + \|\varphi_N; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_N)\|_{2+\alpha} + \\ \left. + \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\|_\alpha + \|g; \gamma; \beta; 0; Q^{(N)}\|_{2+\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для дослідження задачі (1)–(4) встановимо коректну розв’язність множини крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини отриманих розв’язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв’язком задачі (1)–(4).

**Оцінка розв’язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами**

Нехай  $Q_m^{(k)} = Q^{(k)} \cap \{(t, x) \in Q^{(k)} \mid s_1(1, t) \geq m_1^{-1}, s_2(1, x) \geq m_2^{-1}\}$ ,  $m = (m_1, m_2)$ ,  $m_1 > 1$ ,  $m_2 > 1$  – послідовності областей, які при  $m_1 \rightarrow \infty$ ,  $m_2 \rightarrow \infty$  збігаються до  $Q^{(k)}$ . Розглянемо в області  $Q$  задачу знаходження функцій  $u_m(t, x)$ , які при  $t \neq t_\lambda$  задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} (L_1 u_m)(t, x) \equiv \left( \partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) \partial_{x_i} + a_0(t, x) \right) u_m = f_m(t, x), \end{aligned} \quad (6)$$

умови за змінною  $t$

$$u_m(t_0 + 0, x) = \varphi_m^{(0)}(x), \quad (7)$$

$$u_m(t_\lambda + 0, x) - u_m(t_\lambda - 0, x) =$$

$$= b_\lambda(t_\lambda, x) u_m(t_\lambda - 0, x) + \varphi_m^{(\lambda)}(t_\lambda, x) \quad (8)$$

і крайову умову

$$\lim_{x \rightarrow z \in \partial D} [u_m(t, x) - g_m(t, x)] = 0 \quad (9)$$

Тут коефіцієнти  $a_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $a_0$ , а також функції  $f_m$ ,  $\varphi_m^{(0)}$ ,  $\varphi_m^{(\lambda)}$ ,  $g_m$  в областях  $Q_m^{(k)}$  співпадають з  $A_{ij}$ ,  $A_i$ ,  $A_0$ ,  $f$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_\lambda$ ,  $g$ , відповідно, а в областях  $Q \setminus Q_m^{(k)}$  є неперервним продовженням коефіцієнтів  $A_{ij}$ ,  $A_i$ ,  $A_0$ , і функцій  $f$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_\lambda$ ,  $g$ , із областей  $Q_m^{(k)}$  в області  $Q \setminus Q_m^{(k)}$  із збереженням гладкості і норми [12, стор. 82].

Для розв’язання задачі (6)–(9) правильною є така теорема.

**Теорема 2.** Нехай в області  $Q$  виконані умови а), б) і  $u_m(t, x)$  – класичний розв’язок задачі (6)–(9). Тоді для  $u_m(t, x)$  правильною є така оцінка

$$\begin{aligned} |u_m(t, x)| \leq \sum_{k=1}^N \left( \prod_{\lambda=k}^N (1 + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0) \times \right. \\ \times (\|\varphi_m^{(k-1)}; Q^{(k-1)} \cap (t = t_{k-1})\|_0 + \\ + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(k-1)}\|_0 + \|g_m; Q^{(k-1)}\|_0) + \\ + \|\varphi_m^{(N)}; Q \cap (t = t_N)\|_0 + \\ \left. + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(N)}\|_0 + \|g_m; Q^{(N)}\|_0 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

**Доведення.** Нехай

$\max_{\bar{Q}^{(k)}} u_m(t, x) = u_m(M_1)$ . Якщо  $M_1 \in Q^{(k)}$ , то в точці  $M_1$  виконується співвідношення

$$\partial_t u_m(M_1) \geq 0, \quad \partial_{x_i} u_m(M_1) = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(M_1) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_m(M_1) \leq 0 \quad (11)$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням (11) і рівняння (6) у точці  $M_1$  справджується нерівність

$$u_m(M_1) \leq \sup_{\bar{Q}^{(k)}} (f a_0^{-1}). \quad (12)$$

Нехай  $\min_{\bar{Q}^{(k)}} u_m(t, x) = u_m(M_2)$ . Якщо  $M_2 \in Q^{(k)}$ , то в точці  $M_2$  виконується співвідношення

$$\partial_t u_m(M_2) \leq 0, \quad \partial_{x_i} u_m(M_2) = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(M_2) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_m(M_2) \geq 0 \quad (13)$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням співвідношення (13) і рівняння (6) у точці  $M_2$  маємо

$$u_m(M_2) \geq \inf_{\bar{Q}^{(k)}} (f a_0^{-1}). \quad (14)$$

Якщо  $M_1 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$  або  $M_2 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$  та з умови (9) маємо

$$|u_m(M_1)| \leq \|g_m; Q^{(k)}\|. \quad (15)$$

У випадку, коли  $M_1 \in \bar{D}$  або  $M_2 \in \bar{D}$ , з умови (7) одержимо

$$|u_m| \leq \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \quad (16)$$

Враховуючи нерівності (12), (14) – (16), при  $k = 0$  одержимо

$$\|u_m; Q^{(0)}\| \leq \|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|g_m; Q^{(0)}\|_0 + \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \quad (17)$$

Знайдемо оцінку розв'язку  $u_m(t, x)$  в області  $Q^{(1)}$ . Повторюючи вищенаведені міркування і враховуючи умову (3), при  $\lambda = 1$  матимемо

$$\begin{aligned} \|u_m; Q^{(1)}\|_0 &\leq (1 + \|b_1; Q \cap (t = t_1)\|_0) \times \\ &\times \|u_m; Q^{(0)}\| + \|\varphi_m^{(1)}; Q \cap (t = t_1)\|_0 + \\ &+ \|f_m a_0^{-1}; Q^{(1)}\|_0 + \|g_m; Q^{(1)}\|_0 \leq \\ &\leq (1 + \|b_1\|) (\|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|g_m; Q^{(0)}\|_0 + \\ &+ \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0) + \|\varphi_m^{(1)}; Q \cap (t = t_1)\|_0 + \\ &+ \|f_m a_0^{-1}; Q^{(1)}\|_0 + \|g_m; Q^{(1)}\|_0. \end{aligned}$$

Продовжуючи аналогічні припущення, при  $\lambda = 2$  в області  $Q^{(2)}$  одержуємо нерівність

$$\begin{aligned} \|u_m; Q^{(2)}\|_0 &\leq (1 + \|b_2; Q \cap (t = t_2)\|_0) \times \\ &\times \|u_m; Q^{(1)}\| + \|\varphi_m^{(2)}; Q \cap (t = t_2)\|_0 + \\ &+ \|f_m a_0^{-1}; Q^{(2)}\|_0 + \|g_m; Q^{(2)}\|_0 = \\ &= (1 + \|b_2; Q \cap (t = t_2)\|_0) \times \\ &\times (1 + \|b_1; Q \cap (t = t_1)\|_0) \times (\|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \\ &+ \|g_m; Q^{(0)}\|_0 + \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (1 + \|b_2; Q \cap (t = t_2)\|_0) \times (\|\varphi_m^{(1)}; Q \cap (t = t_1)\|_0 + \\ &+ \|f_m a_0^{-1}; Q^{(1)}\|_0 + \|g_m; Q^{(1)}\|_0) + \\ &+ \|\varphi_m^{(2)}; Q \cap (t = t_2)\|_0 + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(2)}\|_0 + \\ &+ \|g_m; Q^{(2)}\|_0. \end{aligned}$$

Продовжуючи оцінювати розв'язок, при  $\lambda = \{3, \dots, N\}$  отримаємо нерівність (10).

Знайдемо оцінки похідних від розв'язків  $u_m(t, x)$ . У просторі  $C^l(Q)$  введемо норму  $\|u_m; \gamma; \beta; q; Q\|_l$ , еквівалентну при фіксованих  $m_1, m_2$  гельдеровій нормі, яка виражається так само, як і  $\|u; \gamma; \beta; q; Q\|_l$ , тільки замість функцій  $s_1(q^{(1)}, t)$ ,  $s_2(q^{(2)}, x)$  покладемо відповідно  $d_1(q^{(1)}, t)$ ,  $d_2(q^{(2)}, x)$ , де

$$d_1(q^{(1)}, t) = \begin{cases} \max(s_1(q^{(1)}, t), m_1^{-q^{(1)}}), & q^{(1)} \geq 0; \\ \min(s_1(q^{(1)}, t), m_1^{-q^{(1)}}), & q^{(1)} < 0 \end{cases}$$

$$d_2(q^{(2)}, x) = \begin{cases} \max(s_2(q^{(2)}, x), m_2^{-q^{(2)}}), & q^{(2)} \geq 0; \\ \min(s_2(q^{(2)}, x), m_2^{-q^{(2)}}), & q^{(2)} < 0. \end{cases}$$

Справедлива така теорема.

**Теорема 3.** *Якщо виконані умови а), б), то для задачі (6) – (9) правильна оцінка*

$$\begin{aligned} &\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq \\ &\leq c \left\{ \sum_{k=1}^N \left\{ \prod_{\lambda=k}^N (1 + \|b_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q \cap (t=t_\lambda))}) \times \right. \right. \\ &\times (\|\varphi_{k-1}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; Q \cap (t = t_{k-1})\|_{2+\alpha} + \\ &+ \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k-1)}\|_\alpha + \|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha}) \left. \right\} + \\ &+ \|\varphi_N; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_N)\|_{2+\alpha} + \\ &+ \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\|_\alpha + \\ &+ \|g; \gamma; \beta; 0; Q^{(N)}\|_{1+\alpha} \left. \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

**Доведення.** В задачі (6) – (9) в областях  $Q^{(k)}$  зробимо заміну

$$u_m(t, x) = g_m(t, x) + v_m(t, x). \quad (19)$$

Підставляючи (19) у (6) – (9), одержимо

$$(L_1 v_m)(t, x) = F_m(t, x), (t, x) \in Q^{(k)}, \quad (20)$$

$$v_m(t_k + 0, x) = \Phi_m^{(k)}(t_k, x), \quad (21)$$

$$(t, x) \in Q \cap (t = t_k),$$

$$v_m|_{\Gamma^{(k)}} = 0, \quad (22)$$

де  $F_m(t, x) = f_m(t, x) - (L_1 g_m)(t, x)$ ,  $\Phi_m^{(0)}(t_0, x) = \varphi_m^{(0)}(x) - g_m(t_0 + 0, x)$  при  $x \in D$ ,

$$\Phi_m^{(k)}(t_k, x) = \varphi_m^{(k)}(t_k, x) - g(t_k + 0, x) + (1 + b_0)g(t_k - 0, x), \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \Gamma^{(k)} = [t_k, t_{k+1}] \times \partial D.$$

Розв'язок крайової задачі (20) – (22) в областях  $Q^{(k)}$  існує і єдиний у просторі  $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$  [6, стор.364]. Знайдемо його оцінку. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [12], маємо

$$\|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \leq (1 + \varepsilon^\alpha) \times$$

$$\times \langle v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \rangle_{2+\alpha} + C(\varepsilon) \|v_m; Q^{(k)}\|_0,$$

де  $\varepsilon$  – довільне дійсне число,  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Тому досить оцінити півнорму  $\langle v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \rangle_{2+\alpha}$ .

Із означення півнорми випливає існування в  $Q^{(k)}$  точок  $P_1, P_2, R_i$ , для яких правильною є одна із нерівностей

$$\frac{1}{2} \|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \leq E_\mu, \quad \mu \in \{1, 2\},$$

де

$$E_1 \equiv \sum_{2s+|r|=2} \left\{ \sum_{\nu=1}^n d_1(2\gamma^{(1)}, t^{(2)}) \times \right.$$

$$\times d_2(2s\gamma^{(2)}, \tilde{x}) \prod_{i=1}^n d_1(-r_i \beta_i^{(1)}, t^{(2)}) \times$$

$$\times d_2(r_i(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}), \tilde{x}) \times$$

$$\times |\partial_t^s \partial_x^r v_m(P_2) - \partial_t^s \partial_x^r v_m(R_\nu)| |x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}|^{-\alpha} \times$$

$$\times d_1(\alpha \beta_\nu^{(1)}, t^{(2)}) d_2(\alpha(\gamma^{(2)} - \beta_\nu^{(2)}), \tilde{x}),$$

$$E_2 \equiv \sum_{2s+|r|=2} d_1((2+\alpha)\gamma^{(1)}, \tilde{t}) \times$$

$$\times d_2((2s+\alpha)\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \prod_{i=1}^n d_1(-r_i \beta_i^{(1)}, \tilde{t}) \times$$

$$\times d_2(r_i(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}), x^{(1)}) |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times |\partial_t^s \partial_x^r u(P_1) - \partial_t^s \partial_x^r u(P_2)|, \quad 2s + |r| = 2.$$

$$\text{Якщо } |x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}| \geq \frac{\varepsilon n^{-1}}{4} d_1(\gamma^{(1)}, \tilde{t}) \times$$

$d_2(\gamma^{(2)} - \beta_\nu^{(2)}, \tilde{x}) \equiv T_1$ ,  $\varepsilon_1$  – довільне дійсне число із  $(0, 1)$ , то

$$E_1 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha} \|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_2. \quad (23)$$

Якщо  $|t^{(1)} - t^{(2)}| \geq \frac{\varepsilon_1^2}{16} d_1(2\gamma^{(1)}, \tilde{t}) \times d_2(2\gamma^{(2)}, \tilde{x}) \equiv T_2$ , то

$$E_2 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha} \|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_2. \quad (24)$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (23), (24), знаходимо

$$E_\mu \leq \varepsilon^\alpha \|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon) \|v_m; Q^{(k)}\|_0. \quad (25)$$

Нехай  $|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}| \leq T_1$  і  $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq T_2$ . Будемо вважати  $|x_\nu^{(1)} - \xi_\nu| \geq 4T_1$ ,  $\xi \in \partial D$  і  $d_2(\gamma^{(2)}, \tilde{x}) = \min(d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}), d_2(\gamma^{(2)}, x^{(2)})) \equiv d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)})$ ,  $d_1(\gamma^{(2)}, \tilde{t}) = \min(d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)}), d_1(\gamma^{(1)}, t^{(2)})) = d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)})$ ,  $P_1(t^{(1)}, x^{(1)}) \in Q^{(k)}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ .

В області  $Q^{(k)}$  запишемо задачу (20) – (22) у вигляді

$$[\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1) \partial_{x_i} \partial_{x_j}] v_m =$$

$$= \sum_{ij=1}^n [a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)] \partial_{x_i} \partial_{x_j} v_m -$$

$$- \sum_{i=1}^n a_i(P) \partial_{x_i} v_m - a_0(P) v_m +$$

$$+ F_m(t, x) \equiv F_m^{(1)}(t, x, v_m^{(k)}) + F_m(t, x), \quad (26)$$

$$v_m(t_k + 0, x) = \Phi_m^{(k)}(t_k, x), \quad (27)$$

$$v_m|_{\Gamma^{(k)}} = 0. \quad (28)$$

Нехай  $\Pi_\tau^{(k)}$  – область із  $Q^{(k)}$ ,  $\Pi_\tau^{(k)} = \{(t, x) \in Q^{(k)}, |x_\nu - x_\nu^{(1)}| \leq \tau T_1, \nu \in \{1, \dots, n\}, |t - t^{(1)}| \leq \tau^2 T_2\}$ . В задачі (26) – (28) зробимо заміну  $v_m(t, x) = w_m(t, y)$ ,  $x_\nu = d_1(\beta_\nu^{(1)}, t^{(1)})$

$d_2(\beta_\nu^{(2)}, x^{(1)}) y_\nu$ . Одержимо

$$(L_2 w_m)(t, y) \equiv \left[ \partial_t - \right.$$

$$-\sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)}, x^{(1)}) \times$$

$$\times \partial_{y_i} \partial_{y_j} \Big] w_m = F_m^{(1)}(t, \tilde{y}; w_m) + F_m(t, \tilde{y}) \quad (29)$$

$$w_m(t_k + 0, \tilde{y}) = \Phi_m^{(k)}(t_k, \tilde{y}), \quad (30)$$

$$w_m|_{\Gamma^{(k)}} = 0, \quad (31)$$

де  $\tilde{y} = (d_1(-\beta_1^{(1)}, t^{(1)})d_2(-\beta_1^{(2)}, x^{(1)})x_1, \dots, d_1(-\beta_n^{(1)}, t^{(1)})d_2(-\beta_n^{(2)}, x^{(1)})x_n)$ .

Позначимо через  $y_\nu^{(1)} = d_1(-\beta_\nu^{(1)}, t^{(1)})d_2(-\beta_\nu^{(2)}, x^{(1)})x_\nu^{(1)}$ ,  $V_\tau^{(k)} = \{(t, y), |t - t^{(1)}| \leq \tau^2 T_2, |y_\nu - y_\nu^{(1)}| \leq \frac{\tau}{n} \sqrt{T_2}\}$  і візьмемо тричі диференційовану функцію  $\psi(t, y)$ , яка задовольняє умови

$$\psi(t, y) = \begin{cases} 1, & (t, y) \in V_{1/2}^{(k)}, 0 \leq \eta(t, y) \leq 1; \\ 0, & (t, y) \notin V_{3/4}^{(k)}, |\partial_t^s \partial_y^r \eta| \leq \\ & \leq c_{rs} d_1(-(2s + |r|)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) \times \\ & \times d_2(-(2s + |r|)\gamma^{(2)}, x^{(1)}). \end{cases}$$

Позначимо функцію  $Z_m(t, y) = w_m(t, y)\psi(t, y)$ , яка буде розв'язком крайової задачі

$$(L_2 Z_m)(t, y) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)}, x^{(1)}) \times$$

$$\times [\partial_{y_i} w_m \partial_{y_j} \psi + \partial_{y_j} w_m \partial_{y_i} \psi + w_m \partial_{y_i} \partial_{y_j} \psi] -$$

$$- w_m \partial_t \psi + \psi [F_m^{(1)}(t, \tilde{y}, w_m) + F_m(t, \tilde{y})] \equiv$$

$$\equiv F_m^{(2)}(t, \tilde{y}, w_m) + \psi F_m(t, \tilde{y}), \quad (32)$$

$$Z_m(t_k + 0, x) = \Phi_m^{(k)}(t_k, \tilde{y})\psi(t_k, y), \quad (33)$$

$$Z_m|_{\Gamma^{(k)}} = 0. \quad (34)$$

Враховуючи теорему 5.3 із [6, стор. 364], для розв'язку задачі (32) – (34) і довільних точок  $(M_1, M_2) \subset V_{1/2}^{(k)}$  виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2) |\partial_t^s \partial_x^r w_m(M_1) - \partial_t^s \partial_x^r w_m(M_2)| \leq$$

$$\leq c \left( \|F_m^{(2)} + \psi F_m\|_{C^\alpha(V_{3/4})} + \right.$$

$$\left. + \|\psi \Phi_m^{(k)}\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4} \cap (t=t_k))} \right), \quad (35)$$

$2s + |r| = 2$ ,  $d(M_1, M_2)$  – параболічна відстань між точками  $M_1$  і  $M_2$ .

Враховуючи властивості функції  $\psi(t, y)$ , знаходимо

$$\|F_m^{(2)} + \psi F_m\|_{C^\alpha(V_{3/4}^{(k)})} \leq c d_1(-(2 + \alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times d_2(-(2 + \alpha)\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \times (\|w_m; V_{3/4}^{(k)}\|_0 +$$

$$+ \|w_m; \gamma; 0; 0; V_{3/4}^{(k)}\|_2 + \|F_m^{(1)}; \gamma; 0; 2\gamma; V_{3/4}^{(k)}\|_\alpha +$$

$$+ \|F_m; \gamma; 0; 2\gamma; V_{3/4}^{(k)}\|_\alpha), \quad (36)$$

$$\|\psi \Phi_m^{(k)}\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4} \cap (t=t_k))} \leq$$

$$\leq c d_1(-(2 + \alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) d_2(-(2 + \alpha)\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \times$$

$$\times \|\Phi_m^{(k)}; \gamma; 0; V_{3/4}^{(k)}\|_{2+\alpha} \quad (37)$$

Із визначення простору

$H^l(\gamma; \beta; q; Q)$  випливає виконання нерівностей

$$c_1 \|w_m; \gamma; 0; 0; V_{3/4}^{(k)}\|_l \leq \|v_m; \gamma; \beta; 0; \Pi_{3/4}^{(k)}\|_l \leq$$

$$\leq c_2 \|w_m; \gamma; 0; 0; V_{3/4}^{(k)}\|_l.$$

Підставляючи (36), (37) у (35) і повертаючись до змінних  $(t, x)$ , одержимо нерівність

$$E_\mu \leq c_1 (\|F_m^{(1)}; \gamma; \beta; 2\gamma; \Pi_{3/4}^{(k)}\|_\alpha +$$

$$+ \|\Phi_m^{(k)}; \gamma; \beta; 0; \Pi_{3/4}^{(k)} \cap (t = t_k)\|_{2+\alpha} +$$

$$+ \|v_m; \Pi_{3/4}^{(k)}\|_0 + \|v_m; \gamma; \beta; 0; \Pi_{3/4}^{(k)}\|_\alpha +$$

$$+ \|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; \Pi_{3/4}^{(k)}\|_\alpha). \quad (38)$$

За допомогою інтерполяційних нерівностей і оцінок норми кожного з доданків виразів  $F_m^{(1)}$ ,  $\Phi_m^{(k)}$  маємо

$$E_\mu \leq (\varepsilon^\alpha (n + 2) + \varepsilon_1 C n^2) \times$$

$$\times \|v_m; \gamma; \beta; 0; \Pi_{3/4}^{(k)}\|_{2+\alpha} + c_2 (\|v_m; \Pi_{3/4}^{(k)}\|_0 +$$

$$+ c_3 (\|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; \Pi_{3/4}^{(k)}\|_\alpha +$$

$$+ \|\Phi_m^{(k)}; \gamma; \beta; 0; \Pi_{3/4}^{(k)} \cap (t = t_k)\|_{2+\alpha}) \quad (39)$$

Використовуючи нерівності (25), (39) і вибираючи  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon$  досить малими, одержимо оцінку

$$\|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \leq$$

$$\leq c \left( \|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; Q^{(k)}\|_\alpha + \|\Phi_m^{(k)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \cap (t = t_k)\|_{2+\alpha} \right). \quad (40)$$

Враховуючи значення виразу  $F_m(t, x)$  і  $\Phi_m^{(k)}(t_k, x)$ , при  $k = 1, 2, \dots, N$  маємо

$$\begin{aligned} \|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; Q^{(k)}\|_\alpha &\leq c(\|f_m; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k)}\|_\alpha + \\ &+ \|g_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha}), \\ \|\Phi_m^{(0)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \cap (t = t_0)\|_{2+\alpha} &\leq \\ \leq \|\varphi_m^{(0)}; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} + \|g_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(0)}\|_{2+\alpha}, \\ \|\Phi_m^{(k)}; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_k)\|_{2+\alpha} &\leq \\ \leq c(1 + \|b_k; Q \cap (t = t_k)\|_0 \times \\ \times \|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k-1)}\|_{2+\alpha} + \\ + \|\varphi_m^{(k)}; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_k)\|_{2+\alpha} + \\ + \|g_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha}). \end{aligned} \quad (41)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \|f_m; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k)}\|_\alpha &\leq c\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k)}\|_\alpha, \\ \|g_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{1+\alpha} &\leq c\|g; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{1+\alpha}, \\ \|\varphi_m^{(k)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \cap (t = t_k)\|_{2+\alpha} &\leq \\ \leq c\|\varphi_k; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \cap (t = t_k)\|_{2+\alpha}, \end{aligned}$$

то, враховуючи заміну (19), оцінку (10) і нерівності (40), (41) при  $k = 0, 1, \dots, N$  одержимо оцінку (18).

**Доведення теореми 1.** Права частина нерівності (18) не залежить від  $m$ . Крім того, послідовності  $\{u_m^{(0)}\} \equiv \{u_m\}$ ,  $\{u_m^{(1)}\} \equiv \{d_1(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t)d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, x)\partial_{x_i}u_m\}$ ,  $\{u_m^{(2)}\} \equiv \{d_1(2\gamma^{(1)}, t)d_2(2\gamma^{(2)}, x)\partial_t u_m\}$ ,  $\{u_m^{(3)}\} = \{d_1(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t)d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, x)d_1(\gamma^{(1)} - \beta_j^{(1)}, t)d_2(\gamma^{(2)} - \beta_j^{(2)}, x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m\}$  рівномірно обмежені і рівноступенно неперервні в областях  $Q^{(k)}$ . За теоремою Арчела існують підпослідовності  $\{u_{m(j)}^{(\mu)}\}$ , рівномірно збіжні в  $Q^{(k)}$  до  $\{u_0^{(\mu)}\}$  при  $m(j) \rightarrow \infty$ ,  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Переходячи до границі при  $m(j) \rightarrow \infty$  в задачі (6) – (9), одержимо, що  $u(t, x) = u_0^{(0)}$

– єдиний розв’язок задачі (1) – (4),  $u \in H^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$ .

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Samoilenko, A.M., Perestyuk, N.A. (1995). Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific.
2. Samoilenko, A.M., Perestyuk N.A. (1987). Differential equations with impulse influences. K.: High school.
3. Perestyuk, N.A., Plotnikov, V.A., Samoilenko, A.M., Skripnik N.V. (2007). Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. K.: Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine. (in Ukrainian)
4. Asanova, A.T. (2013). On a nonlocal boundary-value problem for system of impulsive hyperbolic equations: Ukrainian Mathematical Journal, 65 (3), 315–328. (in Ukrainian)
5. Bainov, D.D., Minchev, E., Myshkis, A. (1997). Periodic Boundary value problems for impulsive hyperbolic systems: Gommun. Appl. Anal., 1 (4), 1 – 14.
6. Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N. (1968). Linear and quasilinear equations of parabolic type. Transl. Math. Monogr., Vol. 23. - Providence, RI: AMS. xi+648 p.
7. Bitsadze, A. V. (1981). Some classes of equations in partial derivatives. Moscow: Science. (in Ukrainian)
8. I. D. Pukalskyi (2017). Boundary - value problems for parabolic equations with impulsive condition and degenerations: Journal of Mathematical Sciences. Vol. 223, N 1, 60–71.
9. Isaryuk, I.M., Pukalskyi, I.D. (2016). The boundary value problems with impulse conditions for parabolic equations with degenerations: Math. methods and physical-mechanical fields, 59 (3), 55–67. (in Ukrainian)
10. Isaryuk, Inna M., Pukalskyi, Ivan D. (2015). The boundary value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 207 (1), 26–38.
11. Pukalskyi, I.D., Isaryuk, I.M. (2015). Nonlocal parabolic boundary value problems with singularities: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 208 (3), 327–343.
12. Friedman, A. (1964). Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs: Prentice Hall.