УДК 517.547.3

©2018 р. І.Б. Шепарович

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

ПРО НУЛІ ГОЛОМОРФНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ, ВИЗНАЧЕНИХ МАЖОРАНТОЮ ДОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

Методом коефіцієнтів Фур'є отримано необхідні і достатні умови, за яких довільна послідовність комплексних чисел (λ_ν) є послідовністю нулів для деяких класів голоморфних в одиничному крузі функцій, визначених мажорантою довільного зростання.

Ключові слова: одиничний круг, послідовність нулів, голоморфна функція, коефіцієнти Фур'є.

By a Fourier coefficients method we established necessary and sufficient conditions, under which the arbitrary sequence of complex numbers (λ_ν) is a sequence zeros for some classes of holomorphic in a unit disk functions, determined by an arbitrary growth majorant.

Keywords: unit disk, zeros sequence , holomorphic function, Fourier coefficients.

1. Вступ. Нехай $\eta : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ – неперервна, зростаюча і необмежена функція, $U(0;R) = \{z : |z| < R\}$. У 1968 році Л.Рубел і Б.Тейлор (див. [1], а також [2]) отримали опис послідовностей нулів для класу цілих функцій f, що задовольняють умову

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : |f(z)| \leqslant \exp(A\eta(B|z|)),$$

(A і B тут і далі - деякі додатні сталі), назвавши його класом цілих функцій скінченного η - типу. Зокрема, вони довели таке твердження.

Теорема Р.- Т. *Для того щоб (λ_ν) - послідовність відмінних від нуля комплексних чисел з єдиною точкою скупчення на ∞, була послідовністю нулів цілої функції скінченного η - типу, необхідно і досить, щоб виконувалися умови*

$$(\forall r > 0) : N(r) \leqslant A\eta(Br),$$

$$(\forall r_1 > 0)(\forall r_2 > 0)(\forall k \in \mathbb{N}) :$$

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right| \leqslant \frac{A\eta(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\eta(Br_2)}{r_2^k},$$

де

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}dt; \quad n(t) = \sum_{|\lambda_\nu|\leqslant t} 1.$$

Задача. *Отримати аналогічний критерій для голоморфних в одиничному крузі $U(0;1)$ функцій скінченного η - типу, тобто для функцій, які задовольняють умову*

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall z \in U(0;1)) :$$

$$|f(z)| \leqslant \exp\left(A\eta\left(\frac{B}{1-|z|}\right)\right) \qquad (1)$$

На це запитання намагалося відповісти багато дослідників (див., наприклад, [3 - 5]). Але отримати критерій без додаткових обмежень на мажоруючу функцію η не вдалося. Так в [3] та [5] в ролі мажоранти розглядається функцій η, яка задовольняє умову: $(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+)(\forall t \in (0;1)) : \frac{1}{(1-t)^\alpha}\eta(\frac{A}{1-t}) \leqslant \eta(\frac{B}{1-t})$. Стаття [4] стосується випадку скінченного порядку функції f

Метою даної статті є отримання загального результату без додаткових умов на зростання функції η і якомога близького до критеріального для подальшого його застосування в теорії інтерполяції, до проблеми базисності та інше.

2. Основні результати. Нехай f – функція, голоморфна в крузі $U(0;1)$, яка має нескінченну множину нулів, $f(0) = 1$, (λ_ν) - послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\lim_{\nu\to\infty}|\lambda_\nu| = 1$,

$$c_k(r;f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| e^{-ik\varphi} d\varphi$$

– коефіцієнти Фур'є функції f. Якщо (λ_ν) є послідовністю нулів функції f, то (див. [1], [2])

$$c_k(r;f) = \frac{1}{2}\alpha_k r^k +$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{\lambda_\nu}\right)^k - \left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r}\right)^k\right),$$

$$c_{-k}(r;f) = \overline{c_k(r;f)}, \quad c_0(r;f) = N(r),$$

$$N(r) = \sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r} \ln\frac{r}{|\lambda_\nu|},$$

де α_k знаходиться з розвинення

$$\log f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k.$$

Через A_i і B_i, позначаємо додатні сталі. Доведемо такі основні твердження

Теорема 1. *Якщо (λ_ν) є послідовністю нулів голоморфної в одиничному крузі функції з класу (1), то*

$$(\forall r\in(0;1)): N(r) \leqslant A_1\eta\left(\frac{B_1}{1-r}\right) \qquad (2)$$

і для всіх $k\in\mathbb{N}, r_1\in(0;1), r_2\in(r_1;1), \sigma\in(1;1/r_2)$

$$\left|\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right| \leq \frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right) +$$

$$+\frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\sigma}\right\}\eta\left(\frac{B_2}{1-\sigma r_2}\right) \qquad (3)$$

або

$$\left|\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right| \leqslant \frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right) +$$

$$+\frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\frac{1+r_2}{2r_2}}\right\}\eta\left(\frac{2B_2}{1-r_2}\right). \qquad (3')$$

Теорема 2. *Якщо виконується умова (2) і (3), то існує голоморфна в одиничному крузі $U(0;1)$ функція, яка задовольняє умову*

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|f(re^{i\varphi})\right|\right|^2 d\varphi\right)^{1/2} \leq$$

$$\leqslant A_3\eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\left(1+\frac{6\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln\sigma}}\right) \qquad (4)$$

для всіх $r\in(0;1)$, $\sigma\in(1;1/r)$.

Зауваження 1. *Умову (4) в теоремі 2 можна замінити умовою*

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|f(re^{i\varphi})\right|\right|^2 d\varphi\right)^{1/2} \leq$$

$$\leqslant \frac{A_3'}{\sqrt{1-r}}\eta\left(\frac{B_3'}{1-r}\right). \qquad (4')$$

Теорема 3. *Якщо виконуються умови (2) і (3), то існує голоморфна в одиничному крузі $U(0;1)$ функція η, яка задовольняє умову*

$$(\exists A>0)(\exists B>0)(\forall z\in D):$$

$$|f(z)| \leqslant \exp\left(\frac{A}{(1-|z|)^{3/2}}\eta\left(\frac{B}{1-|z|}\right)\right). \quad (5)$$

3. Допоміжні твердження. Для доведення теорем використаємо такі допоміжні твердження.

Лема 1. *Якщо виконується (1), то*

$$(\forall r\in[0;1))(\forall k\in\mathbb{Z}):$$

$$|c_k(r;f)| \leqslant A\eta\left(\frac{B}{1-r}\right).$$

Доведення. Справді, згідно з рівністю Ієнсена,

$$N(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi,$$

звідки отримуємо (2). До того ж,

$$\log\left|f(re^{i\varphi})\right| = \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| - \log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|},$$

$$\left|\log\left|f(re^{i\varphi})\right|\right| = \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| + \log^+\frac{1}{\left|f(re^{i\varphi})\right|}.$$

Тому

$$\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi \leqslant A\,\eta\left(\frac{B}{1-r}\right),$$

$$|c_k(r;f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi \leqslant 2A\eta\left(\frac{B}{1-r}\right).$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Для кожного $r>0$ і будь-якого $\sigma\in(1;1/r)$ виконується*

$$n(r)\leqslant\frac{1}{\ln\sigma}N(\sigma r). \qquad (6)$$

Доведення. Це випливає з таких міркувань $N(\sigma r)\geq\int\limits_r^{\sigma r}\frac{n(t)}{t}dt\geq n(r)\ln\sigma$.

Лема 3. *Якщо послідовність (λ_ν) задовольняє умови (2) і (3), то для неї існує така послідовність коефіцієнтів Фур'є $(c_k(r))$, що для всіх $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\sigma\in(1;1/r)$, $r\in(0;1)$*

$$|c_k(r)|\leqslant A_3\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\sigma}\right\}\eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right) \quad (7)$$

або

$$|c_k(r)|\leqslant A_3\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\frac{1+r}{2r}}\right\}\eta\left(\frac{B_3'}{1-r}\right).$$

Доведення. Введемо позначення: $S(r;k)=\frac{1}{k}\sum\limits_{|\lambda_\nu|\leqslant r}\frac{1}{\lambda_\nu^k}$, $S'(r;k)=\frac{1}{k}\sum\limits_{|\lambda_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r}\right)^k$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що існує $r_0\in(0;1)$ таке, що функція η є сталою на проміжку $(0;r_0)$. Далі використаємо неспадну властивість функції η, оскільки

$$\forall k\in\mathbb{N}:\lim_{r\to1-}\frac{\eta\left(\frac{1}{1-r}\right)}{r^k}=+\infty,$$

то для кожного $k\in\mathbb{N}$ існує $r_k\in(0;1)$, що для деякої сталої $B>0$ і для кожного $r\in(r_0;1)$ виконується

$$\frac{\eta\left(\frac{B}{1-r_k}\right)}{r_k^k}\leqslant\frac{2\eta\left(\frac{B}{1-r}\right)}{r^k}. \qquad (8)$$

Виберемо послідовність $\alpha_k=-S(r_k;k)=-\frac{1}{k}\sum\limits_{|\lambda_\nu|\leqslant r_k}\frac{1}{\lambda_\nu^k}$. Тоді послідовність коефіцієнтів Фур'є $c_k(r)$ задамо у вигляді

$$c_k(r)=\frac{r^k}{2}\left(S(r;k)+\alpha_k\right)-\frac{1}{2}S'(r;k)=$$

$$=\frac{r^k}{2k}\sum_{r_k<|\lambda_\nu|\leqslant r}\frac{1}{\lambda_\nu^k}-\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r}\right)^k, \qquad (9)$$

$$c_0(r)=N(r),$$

$$c_{-k}(r)=\overline{c_k(r)},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Оцінимо $|c_k(r)|$. Оскільки $|S'(r;k)|\leqslant\frac{1}{k}n(r)$, то звідси та умов (2), (3), (6), (8) отримуємо

$$|c_k(r)|\leqslant\frac{r^k}{2}|S(r;k)-S(r_k;k)|+\frac{1}{2}|S'(r;k)|\leq$$

$$\leqslant\frac{r^kA_2}{2r_k^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_k}\right)+\frac{A_2}{2}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\sigma}\right\}\times$$

$$\times\eta\left(\frac{B_2}{1-\sigma r}\right)+\frac{A_1}{2k\ln\sigma}\eta\left(\frac{B_1}{1-\sigma r}\right)\leqslant$$

$$\leqslant A_3\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\sigma}\right\}\eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right).$$

Останній вираз рівний $A_3\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\frac{1+r}{2r}}\right\}\eta\left(\frac{B_3'}{1-r}\right)$, якщо $\sigma=\frac{1+r}{2r}$.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Для послідовності $c_k(r)$ вигляду (9), побудованої в лемі 3 виконується*

$$|c_k(r)|\leqslant\frac{1}{\sigma^k}|c_k(\sigma r)|+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{\sigma^{2k}}\right)\frac{1}{\ln\sigma}N(\sigma r) \qquad (10)$$

для всіх $k\geq1$, $r\in(0;1)$, $\sigma\in(1;1/r)$.

Доведення. Справді, (див. [6], с. 180), отримуємо

$$c_k(r)-\frac{1}{\sigma^k}c_k(\sigma r)=$$

$$-\frac{1}{2k}\sum_{r<|\lambda_\nu|\leqslant\sigma r}\left(\left(\frac{r}{\lambda_\nu}\right)^k-\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{\sigma^2 r}\right)^k\right)-$$

$$-\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r}\right)^k\left(1-\frac{1}{\sigma^{2k}}\right),$$

звідки за лемою 2 випливає

$$|c_k(r)|\leqslant\frac{1}{\sigma^k}|c_k(\sigma r)|+$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{r<|\lambda_\nu|\leqslant\sigma r}\left(\left|\frac{r}{\lambda_\nu}\right|^k+\left|\frac{\lambda_\nu}{\sigma^2 r}\right|^k\right)+$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r}\left(1-\frac{1}{\sigma^{2k}}\right)\left|\frac{\lambda_\nu}{r}\right|^k\leq$$

$$\leqslant\frac{1}{\sigma^k}|c_k(\sigma r)|+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{\sigma^{2k}}\right)n(\sigma r)\leq$$

$$\leqslant\frac{1}{\sigma^k}|c_k(\sigma r)|+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{\sigma^{2k}}\right)\frac{1}{\ln\sigma}N(\sigma r).$$

Лему 4 доведено.

Лема 5. Якщо послідовність $c_k(r)$ вигляду (9) задовольняє (7), то

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant A_3\eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{2}{\sqrt{\sigma^2-1}}+\frac{4\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln\sigma}}\right)\qquad(11)$$

для всіх $k\geq 1$, $r\in(0;1)$, $\sigma\in(1;1/r)$.

Доведення (див. [6]). Використаємо нерівності (7) та (10). Маємо

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(c_0^2(r)+\sum_{0<|k|\leqslant\left[\frac{1}{\ln\sigma}\right]}|c_k(r)|^2+\right.$$

$$\left.\sum_{|k|\geq\left[\frac{1}{\ln\sigma}\right]+1}|c_k(r)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(A_1^2\eta^2\left(\frac{B_1}{1-r}\right)+\frac{2A_3^2}{\ln^2\sigma}\times\right.$$

$$\times\eta^2\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\sum_{0<|k|\leq\left[\frac{1}{\ln\sigma}\right]}\frac{1}{k^2}+2A_3^2\eta^2\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\times$$

$$\left.\times\sum_{|k|\geq\left[\frac{1}{\ln\sigma}\right]+1}\left(\frac{1}{\sigma^k}+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{\sigma^{2k}}\right)\frac{1}{\ln\sigma}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leqslant A_3\eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\times$$

$$\times\left(1+4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sigma^{2k}}++\frac{4}{\ln^2\sigma}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{1}{\sigma^{2k}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leqslant A_3\eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{4}{\sigma^2-1}+\frac{4}{\ln^2\sigma}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{1}{\sigma^{2k}}\right)^2\right)^{1/2}\leq$$

$$\leqslant A_3\eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{\sigma^2-1}}+\frac{4}{\ln\sigma}\varphi^{1/2}(\sigma^{-2})\right)\leqslant$$

$$\leqslant A_3\eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{\sigma^2-1}}+\frac{4\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln\sigma}}\right)\leq$$

$$\leqslant A_3\eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\left(1+\frac{6\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln\sigma}}\right),$$

де $\varphi(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(1-x^m)^2}{m^2}=2\int_x^1\frac{\ln(1+t)}{t}dt,\ x\in(0;1).$

Лема 5 доведена.

Зауваження 2. *Якщо вибрати* $\sigma=\frac{1+r}{2r}$, *то враховуючи, що* $\ln\frac{1+r}{2r}=\ln\left(1+\frac{1-r}{2r}\right)\geq\frac{1-r}{2}$, *отримаємо таку оцінку*

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant A_3\eta\left(\frac{2B_3}{1-r}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{4}{\sqrt{1-r}}+\frac{4\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln\frac{1+r}{2r}}}\right)\leq$$

$$\leqslant\frac{A_3'}{\sqrt{1-r}}\eta\left(\frac{B_3'}{1-r}\right).\qquad(12)$$

4. Доведення основних тверджень.

Доведення теореми 1. Якщо виконуються умови теореми 1, то

$$\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}=\frac{1}{r_2^k}\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k}+\frac{1}{2}\alpha_k r_2^k\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\frac{1}{\lambda_\nu^k}+\frac{1}{2}\alpha_k\right)=$$

$$= \frac{1}{r_2^k}\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\left(\frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k}-\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r_2}\right)^k\right)+\frac{1}{2}\alpha_k r_2^k\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\frac{1}{\lambda_\nu^k}+\frac{1}{2}\alpha_k\right)+\frac{1}{2kr_2^{2k}}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\overline{\lambda_\nu}^k=$$

$$= \frac{1}{r_2^k}\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\left(\frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k}-\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r_2}\right)^k\right)+\frac{1}{2}\alpha_k r_2^k\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{r_1^k}\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\left(\frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k}-\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r_1}\right)^k\right)+\frac{1}{2}\alpha_k r_1^k\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2kr_2^{2k}}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\overline{\lambda_\nu}^k-$$

$$-\frac{1}{2kr_1^{2k}}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\overline{\lambda_\nu}^k=\frac{1}{r_2^k}c_k(r_2;f)-\frac{1}{r_1^k}c_k(r_1;f)+$$

$$+\frac{1}{2kr_2^{2k}}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\overline{\lambda_\nu}^k-\frac{1}{2kr_1^{2k}}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\overline{\lambda_\nu}^k=$$

$$=\frac{1}{r_2^k}c_k(r_2;f)-\frac{1}{r_1^k}c_k(r_1;f)+\frac{1}{2kr_2^{2k}}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\overline{\lambda_\nu}^k+$$

$$+\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{r_2^{2k}}-\frac{1}{r_1^{2k}}\right)\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\overline{\lambda_\nu}^k=$$

$$=\frac{1}{r_2^k}c_k(r_2;f)-\frac{1}{r_1^k}c_k(r_1;f)+\frac{1}{2kr_2^{2k}}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\overline{\lambda_\nu}^k-$$

$$-\frac{1}{2kr_1^k}\left(1-\frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}}\right)\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\frac{\overline{\lambda_\nu}^k}{r_1^k}.$$

Тому

$$\left|\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right|\leqslant\frac{1}{r_2^k}\left|c_k(r_2;f)\right|+\frac{1}{r_1^k}\left|c_k(r_1;f)\right|+$$

$$+\frac{1}{2kr_2^k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}1+\frac{1}{2kr_1^k}\left(1-\frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}}\right)\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r_2^k}\left|c_k(r_2;f)\right|+\frac{1}{r_1^k}\left|c_k(r_1;f)\right|+$$

$$+\frac{1}{2kr_2^k}\left(n(r_2)-n(r_1)\right)+\frac{1}{2kr_1^k}\left(1-\frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}}\right)n(r_1).$$

Але $\beta:=\frac{r_1}{r_2}\geq r_1$, $1-\frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}}=(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+...+\beta^{2k-1})\leqslant(1-\beta)2k\leqslant(1-r_1)2k$. Тому, за лемами 1 і 2 отримуємо

$$\left|\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right|\leqslant\frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right)+$$

$$+\frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\sigma}\right\}\eta\left(\frac{B_2}{1-\sigma r_2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right)+\frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\frac{1+r_2}{2r_2}}\right\}\eta\left(\frac{2B_2}{1-r_2}\right),$$

якщо вибрати $\sigma=\frac{r_2+1}{2r_2}$.

Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2. З леми 5 та теореми Ріса-Фішера (див. [2], с.27) випливає існування єдиної функції $f\in L_2[-\pi;\pi]$ такої, що $f(0)=1$ і $c_k(r)$ вигляду (9) є її коефіцієнтами Фур'є. В теоремі 5.1 (див.[1, с.84], а також [2, с. 28]) побудована така функція f_ρ, голоморфна в крузі $\{z:|z|<\rho\}$, для якої $c_k(r)$ є її коефіцієнтами Фур'є і (λ_ν) є її послідовністю нулів. Будуючи голоморфне продовження функції f_ρ в круг $D=\{z:|z|<1\}$, отримуємо функцію f, для якої $c_k(r)$ є коефіцієнтами Фур'є. Тобто для довільного $k\in\mathbb{Z}$

$$c_k(r)=c_k(r;f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\varphi})|e^{-ik\varphi}d\varphi.$$

Тоді з допомогою рівності Парсеваля згідно лем 3 - 5 та нерівності (12) отримуємо

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\ln|f(re^{i\theta})||^2d\theta\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leqslant A_3\, eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\left(1+\frac{6\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln\sigma}}\right)\leq\frac{A_3'}{\sqrt{1-r}}\eta\left(\frac{B_3'}{1-r}\right),$$

що й потрібно було довести.

Теорема 2 доведена.

Доведення теореми 3. З нерівності Шварца та нерівності (12) маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\ln|f(re^{i\varphi})||d\varphi\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\ln|f(re^{i\varphi})||^2d\varphi\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leqslant\frac{A_3'}{(1-r)^{1/2}}\eta\left(\frac{B_3'}{1-r}\right).$$

Далі із співвідношень (див. [3, с.24 - 27, 54])

$$T(r;f)=m(r;f)+N(r;f);$$

$$m(r;f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi;$$

$$N(r;f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi+\ln|f(0)|;$$

$$\ln M_f(r)\leqslant\frac{R+r}{R-r}T(R;f),\quad 0<r<R,$$

для $R=\frac{r+1}{2}$ отримуємо (див. дов. леми 1)

$$\ln M_f(r)\leqslant\frac{1}{1-r}T\left(\frac{r+1}{2};f\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_4}{(1-r)^{3/2}}\eta\left(\frac{B_4}{1-r}\right),$$

що й потрібно було довести.

5. Висновки. Отож, в даній статті отримані необхідні (теорема 1) та достатні умови (теореми 2, 3) на нулі деяких класів (1), (4), (5) голоморфних в одиничному крузі функцій, що визначаються довільною додатною, зростаючою, необмеженою мажорантою η. Серед них і голоморфні в $U(0;1)$ функції скінченного порядку. Але слід зазначити, що для нулів функцій з цього класу умова (3) в достатній частині є зайвою, позаяк випливає з умови (2).

Справді, якщо

$$N(r)=O\left(\frac{1}{(1-r)^{\rho}}\right),\quad r>r_0, \tag{13}$$

то двічі застосувавши інтегрування частинами до ітегралу Стільт'єса можна отримати оцінку

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right|\leqslant\frac{1}{k}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dn(t)}{t^{k+1}}=$$

$$=\frac{n(r_2)}{kr_2^k}-\frac{n(r_1)}{kr_1^k}+\left.\frac{N(t)}{t^k}\right|_{r_1}^{r_2}+\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{N(t)dt}{t^{k+1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_3}{r_1^k(1-r_1)^{\rho}}+\frac{c_3}{r_2^k(1-\sigma r_2)^{\rho}}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\sigma}\right\},$$

де $\sigma=\frac{1+r_2}{2r_2}$.

Таким чином, якщо виконується (13), то за теоремою 3 та (12) існує голоморфна в $U(0;1)$ функція f така, що $\ln|f(z)|=O\left(\frac{1}{(1-|z|)^{\rho+1/2}}\right)$, $|z|>|z_0|$. Цей результат відрізняється (на порядок 1/2) від результатів М. Цудзі, А. Нафталевича, М. Джрбашяна [8 - 10] в гірший бік, але покращує результат В. Бека [3].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Rubel, L.A., Taylor, B.A.* (1968). A Fourier series method for meromorphic end entire functions: Bull.Soc. Math. France, **96**, 53 – 91.

2. *Кондратюк, А.А.* (1988). Ряды Фурье и мероморфные функции. Львiв, У.: Вища школа.

3. *Beck, W.* (1970). Efficient quotient representations of meromorphic functions in the disc: Thesis. Urbana-Champaign, I: University of Illinois.

4. *Шамоян, Ф. А.* (1978). Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитичв круге функций с мажорантой конечного роста: Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем., **13** (5 – 6), 405–422.

5. *Шамоян, Ф. А.* (1983). О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы: Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем., **18** (1), 15 – 27.

6. *Miles, J., Shea, D.* (1976). On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value: Duke. Math. J., **43**, 171 – 186.

7. *Гольдберг, А.А., Островский, И.В.* (1970) Распределение значений мероморфных функций. Москва, Р.: Наука.

8. *Tsuji, M.* (1956). Canonical product of a meromorphic in a unit circle: J. Math. Soc. Jap., **8**(1), 7 – 21.

9. *Нафталевич, А. А.* (1961). Об интерполировании функций мероморфных в единичном круге: Лит. матем. сб., **1**(1-2), 159 – 180.

10. *Джрбашян, М.* (1948). О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций: Сообщ. Инст. мат. и мех АН Арм. ССР. Сер. матем., **2**, 3 – 40.

11. *Хейман, У.* (1980). Мероморфные функции. Москва, Р.: Мир.