

©2018 р. Н.Б. Сокульська, В.С. Хорощак, А.Я. Християнин

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Львівський національний університет імені Івана Франка**РІВНІСТЬ КАРЛЕМАНА ДЛЯ МУЛЬТИПЛІКАТИВНО ПЕРІОДИЧНОЇ
МЕРОМОРФНОЇ ФУНКЦІЇ В ПРОКОЛЕНОМУ ЗАМИКАННІ ВЕРХНЬОЇ
ПІВПЛОЩИНИ**

Доведено рівність Карлемана для мультиплікативно періодичних мероморфних функцій в проколеному замиканні верхньої півплощини.

Ключові слова: розподіл значень мероморфних функцій, мультиплікативно періодична мероморфна функція, рівність Карлемана.

Carleman formula for multiplicatively periodic meromorphic functions in the punctured closure of the upper half-plane is proved.

Key words: distribution of value of meromorphic functions, multiplicatively periodic meromorphic function, Carleman formula.

Рівність Карлемана [1] для мероморфних функцій є достатньо відомою в теорії розподілу значень мероморфних функцій і має настільки багато застосувань, що їй присвячені цілі монографії [2]. Різновиди формул такого типу для різноманітних областей отримувалися в різний час різними авторами.

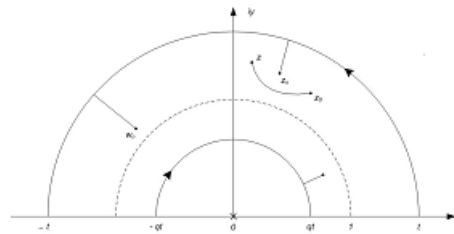
Теорія мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ була розроблена О. Раузенбергером [3]. Ж. Валірон назвав такі функції локсодромними, адже у випадку недійсного q точки, у яких така функція приймає одне і те ж значення, лежать на логарифмічних спіралях. Образи цих спіралей на сфері Рімана перетинають кожен меридіан під одним і тим же кутом і називаються локсодромними кривими (*λοξοζ* - кривий, *δρομοζ* - шлях). В лог-полярних координатах це прямі лінії. Теорія таких функцій тісно пов'язана з теорією еліптичних функцій: за допомогою локсодромних функцій спрощується побудова еліптичних. Зважаючи на можливість різноманітного застосування таких об'єктів, постало питання вивчення різних класів мультиплікативно періодичних відображень довільних однорідних просторів.

Зокрема, одна з останніх робіт в цьому напрямку присвячена вивченню властивостей мультиплікативно періодичних меро-

морфних функцій в проколеному замиканні верхньої півплощини [4].

В нашій роботі ми доводимо рівність типу Карлемана (формулу Карлемана) для таких функцій.

Нехай $\mathcal{H} = \{z : \text{Im } z > 0\}$ і $\mathcal{H}^* = \overline{\mathcal{H}} \setminus \{0\}$. Зафіксуємо $q: 0 < q < 1$. Позначимо $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \leq t\}$, $t > 0$. Зауважимо, що $\bigcup_{t>0}$

Мал. 1 Півкільце \mathcal{A}_t

Означення 1. Функція f називається мероморфною в \mathcal{H}^* , якщо вона мероморфна в замиканні кожного півкільця \mathcal{A}_t , $t > 0$.

Означення 2. Мероморфна в \mathcal{H}^* функція f називається мультиплікативно періодичною з мультиплікатором q , $0 < q < 1$, якщо для всіх $z \in \mathcal{H}^*$ виконується рівність

$$f(qz) = f(z). \quad (1)$$

Клас таких функцій позначимо через \mathcal{M}_q .

Нехай f – мультиплікативно періодична мероморфна функція в \mathcal{H}^* . Припустимо, що f не має ані нулів, ані полюсів на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нехай $z_0 \in \mathcal{H}^*$, $f(z_0) \neq 0, \infty$, і $\log f(z)$ визначений співвідношенням

$$\log f(z) = \log f(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

Наступна теорема є основним результатом даної роботи.

Теорема. Нехай $f \in \mathcal{M}_q$, $f \neq \text{const}$ і $f(z) \neq 0, \infty$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нехай $a \in \mathbb{C}$, $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$ – a -точки функції f , а $w_n = \rho_n e^{i\beta_n}$ – полюси f в $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \leq t\}$.

Тоді

$$\begin{aligned} & \int_{qr}^r \sum_{qt < r_n \leq t} \left(\frac{q^k t^{k-1}}{r_n^k} - \frac{r_n^k}{t^{k+1}} \right) \sin k\alpha_n dt = \\ & = \int_{qr}^r \sum_{qt < \rho_n \leq t} \left(\frac{q^k t^{k-1}}{\rho_n^k} - \frac{\rho_n^k}{t^{k+1}} \right) \sin k\beta_n dt \end{aligned}$$

для всіх $r > 0$ при кожному $k \in \mathbb{Z}$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо спочатку випадок $a = 0$, тобто коли a -точки є нулями функції f .

Нехай z_n – нулі функції f у півкільці \mathcal{A}_t . Застосовуючи теорему про лишки до функцій $z^k \frac{f'(z)}{f(z)}$ та $z^{-k} \frac{f'(z)}{f(z)}$ у півкільці \mathcal{A}_t , отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \mathcal{A}_t} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \\ & = 2\pi i \left(\sum_{qt < |z_n| \leq t} z_n^k - \sum_{qt < |z_n| \leq t} w_n^k \right), \quad (2) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \mathcal{A}_t} \frac{1}{z^k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \\ & = 2\pi i \left(\sum_{qt < |z_n| \leq t} \frac{1}{z_n^k} - \sum_{qt < |z_n| \leq t} \frac{1}{w_n^k} \right). \quad (3) \end{aligned}$$

Оскільки межа півкільця складається з чотирьох частин:

$$\partial \mathcal{A}_t = \Gamma_{qt}^- \cup \Gamma_t \cup [qt, t] \cup [-t, -qt],$$

де Γ_{qt}, Γ_t – півкільця з радіусами qt, t відповідно і з центрами в початку координат, то рівності (4), (5) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_t} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{-t}^{-qt} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \\ & + \int_{\Gamma_{qt}^-} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{qt}^t z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \\ & = 2\pi i \left(\sum_{qt < |z_n| \leq t} z_n^k - \sum_{qt < |z_n| \leq t} w_n^k \right), \quad (4) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_t} \frac{1}{z^k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{-t}^{-qt} \frac{1}{z^k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \\ & + \int_{\Gamma_{qt}^-} \frac{1}{z^k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{qt}^t \frac{1}{z^k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \\ & = 2\pi i \left(\sum_{qt < |z_n| \leq t} \frac{1}{z_n^k} - \sum_{qt < |z_n| \leq t} \frac{1}{w_n^k} \right). \quad (5) \end{aligned}$$

Параметризуємо криві, що є шляхами інтегрування, використовуючи рівність (1) та властивість $f'(qz) = \frac{1}{q} f'(z)$, що виконується для функцій з класу \mathcal{M}_q , з рівностей (4), (5) отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi i t^{k+1} e^{i(k+1)\varphi} \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})} d\varphi - \\ & - \int_0^\pi i t^{k+1} q^k e^{i(k+1)\varphi} \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})} d\varphi + \\ & + \int_{qt}^t z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{-t}^{-qt} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \end{aligned}$$

$$= 2\pi i \left(\sum_{qt < |z_n| \leq t} z_n^k - \sum_{qt < |w_n| \leq t} w_n^k \right), \quad (6)$$

та

$$\begin{aligned} & i \int_0^\pi \frac{1}{t^{k-1} e^{i(k-1)\varphi}} \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})} d\varphi - \\ & - i \int_0^\pi \frac{1}{q^k t^{k-1} e^{i(k-1)\varphi}} \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})} d\varphi + \\ & + \int_{qt}^t \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^k} + \int_{-t}^{-qt} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{z^k} = \\ & = 2\pi i \left(\sum_{qt < |z_n| \leq t} \frac{1}{z_n^k} - \sum_{qt < |w_n| \leq t} \frac{1}{w_n^k} \right) \end{aligned}$$

відповідно.

Поділивши (6) на t^{k+1} та проінтегрувавши по t від qr до r , матимемо

$$\begin{aligned} & 2\pi i \int_{qr}^r \left[\sum_{qt < |z_n| \leq t} z_n^k - \sum_{qt < |w_n| \leq t} w_n^k \right] \frac{dt}{t^{k+1}} = \\ & = \int_{qr}^r \left[\int_{qt}^t z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}} + \\ & + \int_{qr}^r \left[\int_{-t}^{-qt} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}} + \\ & + i(1-q^k) \int_{qr}^r \left[\int_0^\pi \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \right] dt. \end{aligned}$$

Змінюючи порядок інтегрування за теоремою Фубіні, з останньої рівності отримуємо

$$\begin{aligned} & 2\pi i \int_{qr}^r \left[\sum_{qt < |z_n| \leq t} z_n^k - \sum_{qt < |w_n| \leq t} w_n^k \right] \frac{dt}{t^{k+1}} = \\ & = \int_{qr}^r \left[\int_{qt}^t z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}} + \end{aligned}$$

$$+ \int_{qr}^r \left[\int_{-t}^{-qt} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}} +$$

$$+ i(1-q^k) \int_0^\pi e^{i(k+1)\varphi} \left[\int_{qr}^r \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})} dt \right] d\varphi. \quad (7)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{qr}^r \left[\int_{qt}^t z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}}, \\ I_2 &= \int_{qr}^r \left[\int_{-t}^{-qt} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] \frac{dt}{t^{k+1}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Застосовуючи означення (1) та позначення (8) до (7), отримуємо

$$\begin{aligned} & 2\pi i \int_{qr}^r \left[\sum_{qt < |z_n| \leq t} z_n^k - \sum_{qt < |w_n| \leq t} w_n^k \right] \frac{dt}{t^{k+1}} = \\ & = i(1-q^k) \int_0^\pi [\log f(re^{i\varphi}) - \log f(qre^{i\varphi})] e^{ik\varphi} d\varphi \\ & \quad + I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогічними міркуваннями, застосованими до інтегралу $\int_{\partial A_t} \frac{1}{z^k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, показуємо, що виконується рівність

$$\begin{aligned} & 2\pi i q^k \int_{qr}^r \left[\sum_{qt < |z_n| \leq t} \frac{1}{z_n^k} - \sum_{qt < |w_n| \leq t} \frac{1}{w_n^k} \right] t^{k-1} dt = \\ & = i(q^k-1) \int_0^\pi [\log f(re^{i\varphi}) - \log f(qre^{i\varphi})] e^{-ik\varphi} d\varphi + \\ & \quad + q^k I_3 + q^k I_4, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{де } I_3 = \int_{qr}^r \left[\int_{qt}^t \frac{1}{z^k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] t^{k-1} dt,$$

$$I_4 = \int_{qr}^r \left[\int_{-t}^{-qt} \frac{1}{z^k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] t^{k-1} dt.$$

Додаючи співвідношення (9) та (10), отримуємо

$$\begin{aligned} & 2\pi i \int_{qr}^r \left[\sum_{qt < |z_n| \leq t} z_n^k - \sum_{qt < |w_n| \leq t} w_n^k \right] \frac{dt}{t^{k+1}} + \\ & + 2\pi q^k i \int_{qr}^r \left[\sum_{qt < |z_n| \leq t} \frac{1}{z_n^k} - \sum_{qt < |w_n| \leq t} \frac{1}{w_n^k} \right] t^{k-1} dt = \\ & = 2(q^k - 1) \int_0^\pi [\log f(re^{i\varphi}) - \log f(qre^{i\varphi})] \sin k\varphi d\varphi + \\ & + I_1 + I_2 + q^k I_3 + q^k I_4. \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки $\log |f(re^{i\varphi})| - \log |f(qre^{i\varphi})| = 0$, то, взявши дійсні частини рівності (11), матимемо

$$\begin{aligned} & 2\pi \operatorname{Re} \left[i \int_{qr}^r \sum_{qt < |z_n| \leq t} z_n^k \frac{dt}{t^{k+1}} \right] - \\ & - 2\pi \operatorname{Re} \left[i \int_{qr}^r \sum_{qt < |w_n| \leq t} w_n^k \frac{dt}{t^{k+1}} \right] + \\ & + 2\pi \operatorname{Re} \left[iq^k \int_{qr}^r \sum_{qt < |z_n| \leq t} \frac{1}{z_n^k} t^{k-1} dt \right] - \\ & - 2\pi \operatorname{Re} \left[iq^k \int_{qr}^r \sum_{qt < |w_n| \leq t} \frac{1}{w_n^k} t^{k-1} dt \right] = \\ & = \operatorname{Re} (I_1 + I_2 + q^k I_3 + q^k I_4). \end{aligned} \quad (12)$$

Інтегруючи частинами у інтегралах I_1, I_2, I_3, I_4 та беручи дійсні частини, отримуємо наступні рівності

$$\operatorname{Re} I_1 = \int_{qr}^r \frac{1}{t^{k+1}} (t^k \log |f(t)| - (qt)^k \log |f(qt)|) dt -$$

$$\begin{aligned} & -k \int_{qr}^r \frac{1}{t^{k+1}} \int_{qt}^t z^{k-1} \log |f(z)| dz dt = \\ & = (1 - q^k) \int_{qr}^r \log |f(t)| \frac{dt}{t} + \\ & + \int_{qr}^r \left(\int_{qt}^t z^{k-1} \log |f(z)| dz \right) d \left(\frac{1}{t^k} \right). \end{aligned}$$

В другому інтегралі останнього співвідношення застосуємо інтегрування частинами ще раз

$$\begin{aligned} & (1 - q^k) \int_{qr}^r \log |f(t)| \frac{dt}{t} + \\ & + \frac{1}{r^k} \int_{qr}^r t^{k-1} \log |f(t)| dt - \\ & - \frac{1}{(qr)^k} \int_{q^2r}^{qr} t^{k-1} \log |f(t)| dt - \\ & - \int_{qr}^r \frac{1}{t} [\log |f(t)| - q^k \log |f(qt)|] dt = \\ & = \frac{1}{r^k} \int_{qr}^r t^{k-1} \log |f(t)| dt - \\ & - \frac{1}{(qr)^k} \int_{q^2r}^{qr} t^{k-1} \log |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Зробивши підстановку $r = q\tau$ в першому інтегралі, отримуємо $\operatorname{Re} I_1 = 0$. Аналогічним чином доводиться, що $\operatorname{Re} I_2 = 0$.

Знайдемо дійсну частину третього інтеграла,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_3 = & \int_{qr}^r t^{k-1} \left(k \int_{qt}^t \frac{1}{z^{k+1}} \log |f(z)| dz \right) dt + \\ & + \int_{qr}^r t^{k-1} \left[\frac{1}{t^k} \log |f(t)| - \frac{1}{(qt)^k} \log |f(qt)| \right] dt \end{aligned}$$

Розкривши дужки, отримаємо, як і в попередньому випадку, два інтеграли. Проінтегрувавши частинами в першому та об'єднавши доданки в другому, отримаємо рівність

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{q^k}\right) \int_{qr}^r \log |f(t)| \frac{dt}{t} + \\ & + r^k \int_{qr}^r \frac{1}{t^{k+1}} \log |f(t)| dt - \\ & - (rq)^k \int_{q^2r}^{qr} \frac{1}{t^{k+1}} \log |f(t)| dt - \\ & - \int_{qr}^r \left(t^k \frac{\log |f(t)|}{t^{k+1}} - q \frac{\log |f(qt)|}{(qt)^{k+1}} \right) dt = \\ & = \left(1 - \frac{1}{q^k}\right) \int_{qr}^r \log |f(t)| \frac{dt}{t} - \\ & - \left(1 - \frac{1}{q^k}\right) \int_{qr}^r \log |f(t)| \frac{dt}{t} + \\ & + r^k \int_{qr}^r \log |f(t)| \frac{dt}{t^{k+1}} - (qr)^k \int_{q^2r}^{qr} \log |f(t)| \frac{dt}{t^{k+1}} = 0. \end{aligned}$$

Зробивши, як і раніше, підстановку $r = q\tau$ в першому інтегралі, отримаємо $\operatorname{Re} I_3 = 0$. Схожим чином доводиться, що $\operatorname{Re} I_4 = 0$.

Зі співвідношення (12) отримуємо

$$\begin{aligned} & 2\pi \operatorname{Re} \left[i \int_{qr}^r \sum_{qt < |z_n| \leq t} z_n^k \frac{dt}{t^{k+1}} \right] - \\ & - 2\pi \operatorname{Re} \left[i \int_{qr}^r \sum_{qt < |w_n| \leq t} w_n^k \frac{dt}{t^{k+1}} \right] + \\ & + 2\pi \operatorname{Re} \left[iq^k \int_{qr}^r \sum_{qt < |z_n| \leq t} \frac{1}{z_n^k} t^{k-1} dt \right] - \end{aligned}$$

$$- 2\pi \operatorname{Re} \left[iq^k \int_{qr}^r \sum_{qt < |w_n| \leq t} \frac{1}{w_n^k} t^{k-1} dt \right] = 0. \quad (13)$$

З урахуванням позначень $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$ та $w_n = \rho_n e^{i\beta_n}$, результатом обчислення дійсної частини рівності (13) буде

$$\begin{aligned} & \int_{qr}^r \sum_{qt < r_n \leq t} \left(\frac{q^k t^{k-1}}{r_n^k} - \frac{r_n^k}{t^{k+1}} \right) \sin k\alpha_n dt - \\ & - \int_{qr}^r \sum_{qt < \rho_n \leq t} \left(\frac{q^k t^{k-1}}{\rho_n^k} - \frac{\rho_n^k}{t^{k+1}} \right) \sin k\beta_n dt = 0. \end{aligned}$$

Це доводить теорему у випадку $a = 0$. Загальний випадок отримується застосуванням доведеного до функції $f(z) - a$. \square

Як наслідок, у випадку голоморфної функції f отримуємо наступний результат.

Наслідок. *Нехай функція f є голоморфною і мультиплікативно періодичною з мультиплікатором q , $0 < q < 1$, у \mathcal{H}^* , $f \neq \text{const}$ і $f(z) \neq 0, \infty$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нехай, крім того, точки $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$ є a -точками функції f , $a \in \mathbb{C}$. Тоді для всіх $r > 0$ та кожного $k \in \mathbb{Z}$, справедливе співвідношення*

$$\int_{qr}^r \sum_{qt < r_n \leq t} \left(\frac{q^k t^{k-1}}{r_n^k} - \frac{r_n^k}{t^{k+1}} \right) \sin k\alpha_n dt = 0.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. (1970). Распределение значений мероморфных функций. Москва: Наука
2. Айзенберг Л. А. (1990). Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука.
3. Rausenberger O. (1884). Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variablen. Leipzig: Druck und Verlag von B.G.Teubner.
4. Khoroshchak V. S., Sokulska N. B. (2014) Multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane. Matematychni Studii, 42 (2), 143–148.