

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО Й ТЕЛЕГРАФНОГО РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Досліджується функція Гріна задачі Коші для псевдодиференціального рівняння (ПДР) з негладким символом і фрактального рівняння порядку $\alpha \in (1, 2)$, яка використовується для встановлення коректності цієї задачі в просторах Діні.

Ключові слова: функція Гріна, псевдодиференціальне рівняння, простори Діні.

The Green's function of the Cauchy problem is investigated for a pseudo-differential equation with a non-smooth symbol and a fractal equation of order $\alpha \in (1, 2)$. This function is used to establish the correctness of the abovementioned problem in Dini spaces.

Keywords: The Green's function, pseudo-differential equation, Dini spaces.

Вступ

Задачі для різних рівнянь з дробовими похідними були предметом досліджень багатьох вітчизняних і зарубіжних математиків, починаючи від Л. Ейлера, Ж. Ліувілля, Б. Рімана, Ж. Адамара тощо.

Цим рівнянням і параболічним псевдодиференціальним рівнянням присвячені праці С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена і А.Н. Кочубея [4], Н.О. Вірченко і В.Я. Рибака [3], В.В. Городецького і В.А. Літовченка [2], дисертації Я.М. Дріня і А.О. Лопушанського [6] та інших.

У статтях автора [7] запропоновано новий підхід до вивчення функції Гріна і фундаментального розв'язку параболічного рівняння з дробовими похідними. Як продовження дослідження, тут вивчається функція Гріна задачі Коші для ПДР та телеграфного рівняння з дробовою похідною, яке описує процес коливання сили струму і напруги в електричному контурі.

§1. Функція Гріна задачі Коші для псевдодиференціального рівняння

У області $\Pi = (0, \infty) \times E_n$ розглянемо задачу Коші

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}_t^\alpha u = \\ & = F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} \left[\left(-a(\sigma) + \sum_{k_0 \gamma + \nu < \alpha \gamma} a_{k_0 \nu}(\sigma) u_t^{(k_0)} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\left. \times F_{x \rightarrow \sigma} u(t, x) \right] + f(t, x), \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(t, x) = \varphi_k(x), \quad (2)$$

$$k = \overline{0, m-1}, m \in \mathbb{N}.$$

Тут $F_{x \rightarrow \sigma}, F_{\sigma \rightarrow x}^{-1}$ – оператори Фур'є, \mathfrak{D}_t^α – похідна Капуто,

$$F_{x \rightarrow \sigma} u(t, x) = \int_{E_n} e^{i\sigma x} u(t, x) dx \equiv \tilde{u}(t, \sigma), \quad (3)$$

$$\mathfrak{D}_t^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{u_t^{(j)}(0, x)}{\Gamma(j - \alpha + 1)} t^{j-\alpha}, \quad (4)$$

($m - 1 < \alpha < m$), $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ – дробова похідна Рімана-Ліувілля.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t \frac{u(\tau, x) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha-n+1}}, \quad (5)$$

$$n = [\alpha] + 1.$$

Поряд з перетворенням Фур'є (3) введено перетворення Лапласа

$$L_t u(t, x) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t, x) dt = \tilde{u}(p, x). \quad (6)$$

Якщо $\alpha \in (0, 1)$ і до задачі (1), (2) застосувати оператор LF, то для функції

$w(p, 0) = \text{LF}u(t, x)$ отримаємо співвідношення [3, с. 25]

$$p^\alpha w = -a(\sigma)w + \sum_{k_0\gamma + \nu < \alpha\gamma} a_{k_0\nu}(\sigma)p^{k_0}w + p^{\alpha-1}\tilde{\varphi}(\sigma) + \tilde{f}(p, \sigma).$$

Звідки знаходимо

$$w(p, \sigma) = \frac{\sum_{k_0\gamma + \nu < \alpha\gamma} a_{k_0\nu}(\sigma)p^{k_0}}{p^\alpha + a_\gamma(\sigma)} w(p, \sigma) + \frac{p^{\alpha-1}\tilde{\varphi}(\sigma)}{p^\alpha + a(\sigma)} + \frac{\tilde{f}(p, \sigma)}{p^\alpha + a(\sigma)}. \quad (7)$$

Розглянемо згортку сумовних функцій $f(t, x)$ і $g(t, x)$

$$(f \times g)(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} f(t - \tau, x - y)g(\tau, y)dy \quad (8)$$

і скористаємось теоремою про перетворення Фур'є–Лапласа згортки:

$$\text{LF}(f \times g) = \text{LF}f \cdot \text{LF}g(t, x). \quad (9)$$

Застосовуючи до обох частин формули (7) оператор $(\text{LF})^{-1}$ і для співмножників у цій формулі використаємо останнє співвідношення (9), беручи до уваги, що $u(t, x) = (\text{LF})^{-1}w$, будемо мати

$$u(t, x) = \sum_{k_0\gamma + \nu < \alpha\gamma} \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_{k_0\gamma}(t - \tau, x - \xi) \times u(\tau, \xi)d\xi + \mathcal{F}(t, x). \quad (10)$$

Тут позначено

$$G_{k_0\gamma}(t, x) = \text{L}^{-1}\text{F}^{-1} \left(\frac{a_{k_0\nu}(\sigma)p^{k_0}}{p^\alpha + a(\sigma)} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}i} \times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} dp \int_{E_n} e^{i\sigma x} \frac{a_{k_0\nu}(\sigma)p^{k_0}}{p^\alpha + a(\sigma)} d\sigma, \quad (11)$$

$$\mathcal{F}(t, x) = \int_{E_n} G_1(t, x - \xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_2(t - \tau, x - \xi)f(\tau, \xi)d\xi, \quad (12)$$

$$G_1(t, x) = \text{L}^{-1}\text{F}^{-1} \left\{ \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + a(\sigma)} \right\},$$

$$G_2(t, x) = \text{L}_p^{-1}\text{F}_\sigma^{-1} (p^\alpha + a(\sigma))^{-1}. \quad (13)$$

Отже, для розв'язку $u(t, x)$ ми отримали інтегральне рівняння (10). Оцінимо його ядро і функції G_1, G_2 . Скористаємось зображенням

$$G_2(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} dp \times \int_0^\infty e^{-p^\alpha\tau} d\tau \int_{E_n} e^{i\sigma x - a(\sigma)\tau} d\sigma = \text{L}^{-1} \left(\int_0^\infty e^{-p^\alpha\tau} G_0(\tau, x) d\tau \right). \quad (14)$$

Виконаємо в інтегралах заміни $pt = z, \sigma = \tau^{-\frac{1}{\gamma\xi}}, \tau = t^\alpha\beta$. Якщо $a(\sigma) = \sum_{|k| \leq \gamma=2b} c_k \sigma^k -$

многочлен, який відповідає правій частині параболічного рівняння $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum_{|k| \leq \gamma=2b} c_k \mathfrak{D}^k u$,

то отримуємо

$$\mathfrak{D}_x^k G_2(t, x) = \frac{1}{2\pi i} t^{-\alpha \frac{n+|k|}{2b} - 1 + \alpha} \times \int_{\text{Re}z=u} e^z dz \int_0^\infty e^{-z^\alpha\beta} \mathfrak{D}_x^k G_0(\alpha\beta, x) d\beta. \quad (15)$$

Для $G_2(t, x)$ в [7] виведено експоненціальну оцінку

$$|\mathfrak{D}_x^k G_2(t, x)| \leq c_k t^{-\alpha \frac{n+|k|}{2b} - 1 + \alpha} \times e^{-\left(|x|t^{-\frac{\alpha}{2b}}\right)^q} \Psi_{n+|k|-\gamma}(\hat{x}), \quad (16)$$

$\Psi_m(x) = 1, m < 0; \Psi_0(x) = \ln|x| + 1, \Psi_m(x) = |x|^{-m}, n > 0; \hat{x} = xt^{-\frac{\alpha}{2b}}, \Psi_m(x) \equiv 1$, якщо $|x| \geq 1$.

Нехай $a(\sigma) \in C^N(E_n/0), \text{Re}a(\sigma) \geq a_0|\sigma|^\gamma$, причому

$$|\mathfrak{D}^k a(\sigma)| \leq c_N |\sigma\sigma|^\gamma, \sigma \neq 0, \gamma > 0. \quad (17)$$

Якщо в інтегралі $G_0(t, x)$ із (14) $a(\sigma)$ однорідна, то внаслідок заміни $\sigma = t^{-\frac{1}{\gamma}}\xi$ маємо

$$\mathfrak{D}_x^k G_0(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} t^{-\frac{n+|k|}{\gamma}} \times \int_{E_n} e^{i\hat{x}\xi} (i\xi)^k e^{-a(\xi)} d\xi. \quad (18)$$

Останній інтеграл оцінюється за лемою 1 [5, с. 915], а саме, якщо в (17) $N \geq 2n + |k| + [\gamma]$, то

$$|\mathfrak{D}^k G_0(t, x)| \leq c_k t^{-\frac{n+|k|}{\gamma}} (1 + |\tilde{x}|)^{-(n+|k|+\gamma)},$$

або

$$|\mathfrak{D}_x^k G_0(t, x)| \leq c_k t \left(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x| \right)^{-(n+|k|+\sigma)} \leq c_k \left(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x| \right)^{-(n+|k|)}; \quad (19)$$

для $|k| \leq N - 2n - [\gamma]$, $\tilde{x} = t^{-\frac{1}{\gamma}}x$, $\hat{x} = t^{-\frac{\alpha}{\gamma}}x$.

У інтегралі по змінній z формули (15) перейдемо до інтегрування по контуру $C_a = \{z, z = a + iv e^{i \operatorname{sign} v \varphi_0}, |v|_\infty\}$, що виходить з точки $a + i0$ і утворює з прямою $\operatorname{Re} z = a$ кути φ_0 при $v \geq 0$ і $(-\varphi_0)$ при $v \leq 0$, $|\varphi_0| < \varepsilon$. На такому контурі $|e^z| = e^{a-|v| \sin \varphi_0}$ для $\alpha \in (0, 1)$ $\operatorname{Re} z^\alpha \geq (a \cos \varphi_0)^\alpha = b_0 > 0$ [7, с. 105].

Тому маємо

$$|\mathfrak{D}_x^k G_2(t, x)| \leq c_k t^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{a-v \sin \varphi_0} \times \int_0^\infty e^{-b_0 \beta} |\mathfrak{D}_x^k G_0(t^\alpha \beta, x)| d\beta. \quad (20)$$

Очевидно, що інтеграл по змінній v збіжний. Інтеграл по β позначимо через H_k і оцінимо за допомогою останньої нерівності в (19). Будемо мати

$$H_k \leq c_k \int_0^\infty e^{-b_0 \beta} \left[(t^\alpha \beta)^{\frac{1}{\gamma}} + |x| \right]^{-(n+|k|)} d\beta = t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} \int_0^\infty e^{-b_0 \beta} \left[\beta^{\frac{1}{\gamma}} + |\hat{x}| \right]^{-(n+|k|)} d\beta.$$

Якщо $n + |k| < \gamma$, то для $x \in E_n$

$$\times \int_0^\infty e^{-b_0 \beta} |\mathfrak{D}_x^k G_0(t^\alpha \beta, x)| d\beta. \quad (21)$$

У випадку $n + |k| \geq \gamma$ введемо нову змінну $\beta = |\hat{x}|^\gamma \xi^\gamma$. В результаті отримаємо

$$H_k \leq c_k t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} \int_0^\infty e^{-b_0 |\hat{x} \xi|^\gamma} (1 + \xi)^{-(n+|k|)} \times \xi^{\gamma-1} d\xi |\hat{x}|^{(n+|k|-\gamma)}.$$

Останній інтеграл в межах $(0, 1)$ оцінюється B -функцією $B(1, \gamma)$, а в межах $(1, \infty)$ так: якщо $n + |k| = \gamma$, то

$$\int_0^\infty e^{-b_0 |\hat{x} \xi|^\gamma} (1 + \xi)^{-\gamma} \xi^{\gamma-1} d\xi \leq \int_{|\hat{x}|}^\infty e^{-b_0 \beta^\gamma} \beta^{-1} d\beta \leq c_0 (|\ln |\hat{x}|| + 1). \quad (22)$$

Якщо $n + |k| > \gamma$, будемо мати

$$H_k \leq c t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} |\hat{x}|^{-(n+|k|-\gamma)} \int_1^\infty \xi^{-(n+|k|-\gamma)-1} = c_k t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} |\hat{x}|^{-(n+|k|-\gamma)}. \quad (23)$$

Зауважимо, що з допомогою другої нерівності в (19) також отримуємо оцінку

$$H_k \leq c \int_0^\infty e^{-b_0 \beta} t^\alpha \beta \left[(t^\alpha \beta)^{\frac{1}{\gamma}} + |x| \right]^{-(n+|k|+\gamma)} d\beta \leq c t^\alpha |x|^{-(n+|k|+\gamma)} \int_0^\infty e^{-b_0 \beta} \beta d\beta = c t^\alpha |x|^{-(n+|k|+\gamma)}, \quad (24)$$

яка уточнює порядок спадання $\mathfrak{D}^k G_2(t, x)$ при $|x| \rightarrow \infty$. З нерівностей для H_k дістаємо оцінку похідних

$$|\mathfrak{D}_x^k G_2(t, x)| \leq c_k t^{-1+\alpha-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} \Psi_{n+|k|-\lceil \gamma \rceil}(\hat{x}), \quad (25)$$

а для $\mathfrak{D}^k G_1(t, x)$ маємо нерівності

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_x^k G_1(t, x)| &= t^{1-\alpha} |\mathfrak{D}^k G_2(t, x)| \leq \\ &\leq c_k t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)} \Psi_{n+|k|-\lfloor \gamma \rfloor}(\hat{x}). \end{aligned} \quad (26)$$

Функції $G_{k_0 v}(t, x)$ із (11) запишемо аналогічно як $\mathfrak{D}^k G_2(t, x)$ за формулою (15)

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^k G_{k_0 v}(t, x) &= \int_{c_a} e^z z^{k_0} dz \int_0^\infty e^{-z^\alpha \beta} d\beta \times \\ &\times \int e^{i\hat{x}\xi - a(\sigma)} a_{k_0 v} \xi^v (i\xi)^k d\xi t^{-\frac{n+|k|+\gamma-\varepsilon_{k_0 v}}{\gamma}}, \\ \varepsilon_{k_0 v} &= \alpha\gamma + k_0\gamma - v > 0. \end{aligned}$$

Користуючись міркуваннями, за допомогою яких оцінювались похідні $\mathfrak{D}^k G_2(t, x)$, отримаємо

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_x^k G_{k_0 v}(t, x)| &\leq c_k t^{-\frac{n+|k|+\gamma-\varepsilon_{k_0 v}}{\gamma}} \times \\ &\times (1 + |\hat{x}|)^{-(n+|k|+\gamma+v)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Внаслідок цієї нерівності ядро $K(t, x) \equiv \sum_{k_0\gamma+v < \alpha\gamma} G_{k_0 v}(t, x)$ інтегрального рівняння (10) допускає оцінку

$$|K(t, x)| \leq c \left(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x| \right)^{-(n+\gamma-\varepsilon_0)}, \quad (28)$$

де $\varepsilon_0 = \min_{v, k_0}(\alpha\gamma - k_0\gamma - v)$, $\varepsilon_{k_0 v} > 0$, $k_0 < \alpha$, $v < \gamma$. Тому інтегральне рівняння (10) з квазісингулярним ядром [5], [7]. Його розв'язок можна знайти за допомогою резольвенти

$$\begin{aligned} u(t, x) &= F(t, x) + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} R(t-\tau, x-\xi) F(\tau, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (29)$$

Враховуючи зображення $F(t, x)$ за формулою (12) при підстановці в (29) заміною порядку інтегрування приходимо до співвідношення

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{E_n} Z_1(t, x-\xi) \varphi(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t d\tau \int Z_2(t-\tau, x-\xi) f(\tau, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (30)$$

де

$$\begin{aligned} Z_i(t, x) &= G_i(t, x) + \int_0^t d\tau \int G_i(t-\tau, x-\xi) \times \\ &\times R(t, \xi) d\xi, \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (31)$$

Теорема 1 (про функцію Гріна). Якщо в рівнянні (1) $a(\sigma)$ однорідна функція степеня γ і належить класу $C^{(N)}$ при $\sigma \neq 0$, похідні задовольняють нерівність (17) $\alpha \in (0, 1)$, $k_0 < \alpha$, то компоненти функції Гріна визначаються формулами (31) і для похідних правильні нерівності

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_x^k Z_2(t, x)| &\leq \\ &\leq c_k \begin{cases} t^{-\frac{\alpha}{\gamma}(n+|k|)}, & n + |k| < \gamma, \\ t^{-1} (\ln |\hat{x}| + 1), & n + |k| = \gamma, \\ t^{-1} |x|^{-(n+|k|-\gamma)}, & n + |k| > \gamma, \\ t^{2\alpha-1} |x|^{-(n+|k|+\gamma)}, & |x| \geq t^{-\frac{\alpha}{\gamma}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

Похідні $\mathfrak{D}_x^k Z_1(t, x)$ справджують нерівності (32), тільки їх праві частини домножаються на $t^{1-\alpha}$. Якщо $\varphi, f \in C^{(\omega)}$, то

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_x^\gamma u(t, x)| &\leq \\ &\leq c \left(t^{-\alpha} \omega_\varphi(t^{\frac{\alpha}{\gamma}}) |\varphi|_{\omega_\varphi} + |f|_{\omega_f} F(t^{\frac{\alpha}{\gamma}}) \right). \end{aligned} \quad (33)$$

§2. Задача Коші для телеграфного рівняння

Згідно закону Ома в електричних проводах сила струму і напруга задовольняють телеграфне рівняння [1, с. 31]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = CLu''_{tt} + (CR + LG)u_t + GRu, \quad (34)$$

де (C, L, G, R) – відомі фізичні величини. Цьому рівнянню відповідає псевдодиференціальне рівняння з дробовою похідною Капуто порядку $\alpha \in (1, 2)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_t^\alpha u &= F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} [-|\sigma|^2 v + a_1 v'_t + a_0 v] + f(t, x), \\ v(t, \sigma) &= Fu(t, x). \end{aligned} \quad (35)$$

Задамо початкові умови

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) &= \varphi_1(x), \\ \lim_{t \rightarrow 0} u'_t(t, x) &= \varphi_2(x). \end{aligned} \quad (36)$$

Якщо до рівняння (35) Застосувати оператор Лапласа і позначити $w(t, \sigma) \equiv \text{LF}u(t, x)$, то задачі Коші (35), (36) відповідає неоднорідне рівняння [3, с. 14, 39]

$$(p^\alpha + |\sigma|^2)w = (a_1p + a_0)w + (p^{\alpha-1} - a_1)\tilde{\varphi}_1 + p^{\alpha-2}\tilde{\varphi}_2(\sigma) + \tilde{f}. \quad (37)$$

Звідси, як в попередньому пункті, знаходимо, що функція $u(t, x)$ повинна бути розв'язком інтегрального рівняння

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_{10}(t - \tau, x - \xi)u(\tau, \xi)d\xi + F(t, x), \quad (38)$$

де

$$G_{10}(t, x) = L_p^{-1}F_\sigma^{-1} \left(\frac{a_1p + a_0}{p^\alpha + |\sigma|^2} \right) = \frac{t^{-2+\alpha-\frac{\alpha n}{2}}}{(2\pi)^{-n+1}i} \int_{C_a} e^z \int_{E_n} e^{i\xi\hat{x}} \frac{a_1z + a_0t}{z + |\xi|^2} d\xi dz,$$

$$\hat{x} = t^{-\frac{\alpha}{2}}x, p = zt^{-1}, \sigma = \xi t^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Якщо $n = 1$, то

$$F_\sigma^{-1}(p^\alpha + \sigma^2)^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x} (p^\alpha + \sigma^2)^{-1} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}|x|}}{2p^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Також маємо зображення при $n \geq 1$ зображення ($z \rightarrow p, \xi \rightarrow \sigma$):

$$F^{-1}(p^\alpha + |\sigma|^2)^{-1} = \int_0^\infty \frac{e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}\beta}}{p^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^n} \times \int_{E_n} e^{i\sigma\hat{x} - |\sigma|^2\beta p^{-\frac{\alpha}{2}}} d\sigma d\beta. \quad (39)$$

За допомогою теореми Коші для аналітичних функцій вираховуємо інтеграл

$$I_j(\hat{x}, \beta, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma_j\hat{x}_j - \sigma_j^2\beta p^{-\frac{\alpha}{2}}} d\sigma_j =$$

$$= \sqrt{\pi} \beta^{-\frac{1}{2}} p^{\frac{\alpha}{4}} e^{-p^{\frac{\alpha}{2}} \frac{x_j^2}{4\beta}}.$$

Тому знаходимо

$$F^{-1}(p^\alpha + |\sigma|^2)^{-1} = c_n p^{\frac{\alpha}{4}} \int_0^\infty \beta^{-\frac{n}{2}} e^{-p^{\frac{\alpha}{2}} \left(\beta + \frac{|\hat{x}|^2}{4\beta} \right)} d\beta.$$

Користуючись нерівністю (18) із [7, с. 104], $\beta + \frac{|\hat{x}|^2}{4\beta} \geq |\hat{x}|$ для $\alpha \in (1, 2)$ $\text{Re}p^{\frac{\alpha}{4}} \geq b_0$, $p \in C_a$ отримуємо

$$|F_\sigma^{-1}(p^\alpha + |\sigma|^2)^{-1}| \leq c_n e^{-\frac{1}{2}\text{Re}p^{\frac{\alpha}{2}}|\hat{x}|} \left\{ \begin{array}{l} 1, n = 1, \\ |\ln|\hat{x}|| + 1, n = 2, \\ |\hat{x}| - (n - 2), n > 2. \end{array} \right\} = \Psi_{n-2}|\hat{x}| e^{-\frac{1}{2}\text{Re}p^{\frac{\alpha}{2}}|\hat{x}|}.$$

Виконуючи інтегрування по контуру C_a в інтегралі Лапласа для $G_{10}(t, x)$, приходимо до нерівності

$$|G_{10}(t, x)| \leq ct^{-2+\alpha-\frac{\alpha n}{2}} \times \Psi_{n-2}|\hat{x}| e^{-c_1(|\hat{x}|t^{-\frac{\alpha}{2}})^2}. \quad (40)$$

Для похідних $\mathfrak{D}_x^k G_{10}(t, x)$ правильна нерівність (40) із заміною в оцінці n на $n + |k|$. Ядро $G_{10}(t, x)$ сумовне, причому $\int_0^t d\tau \int |G_{10}(\tau, \xi)| d\xi \leq ct^{\alpha-1}$. З нерівності (40) для випадку $n > 2$ впливає оцінка

$$|G_{10}(t, x)| \leq ct^{-\alpha_1} |x|^{-(n-\alpha_2)} e^{-c|\hat{x}|^2}, \quad (41)$$

де $\alpha_1 = 2 - \frac{\alpha}{2}\mu$, $\alpha_2 = 2 - \mu$, $0 < \mu < 2$, $\alpha\mu > 2$, $\alpha \in (1, 2)$, $0 < \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > 0$. Тому рівняння (38) з квазірегулярним ядром і існує резольвента

$$R(t, x) = G_{01}(t, x) +$$

$$+ \sum_{v=1}^{\infty} \int_0^t d\tau \int G_{01}(t-\tau, x-\xi) K_v(\tau, \xi) d\xi, \quad (42)$$

де $K_v(t, x)$ повторні ядра для $G_{10}(t, x)$, яка задовольняє нерівність (40).

Неоднорідність $F(t, x)$ в рівнянні (38) є сумою інтегралів

$$F(t, x) = \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{E}_n} G_j(t, x - \xi) \varphi_j(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{E}_n} G_\alpha(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (43)$$

де $G_j(t, x)$, як видно з рівняння (37), мають вигляд

$$G_j(t, x) = L_p^{-1} F_\sigma^{-1} \left[\frac{p^{\alpha-j+\delta_j}}{p^\alpha + |\sigma|^2} \right], \quad (j = 1, 2, \alpha),$$

$\delta_1 = -a_1, \delta_2 = 0, \delta_\alpha = 0$.

Внаслідок заміни $p = t^{-1}z, \sigma = \xi t^{-\frac{\alpha}{2}}$ отримуємо

$$G_j(t, x) = c_n t^{-1+\alpha-(\alpha-j)-\frac{n\alpha}{2}} \times \int_{\text{Re}z=a} e^z dz \int_{\mathbb{E}_n} e^{i\hat{x}\xi} \frac{z^{\alpha-j} + \delta_j t^{\alpha-j}}{z^\alpha + \xi^\alpha} d\xi.$$

Оцінюючи за формулою (39) інтеграл по змінній ξ , аналогічно як для $G_{10}(t, x)$, будемо мати

$$|\mathfrak{D}_x^k G_j(t, x)| \leq c_k t^{-1+j-\alpha\frac{n+|k|}{2}} \times \Psi_{n+k-2}(\tilde{x}) e^{-c|\hat{x}|^q} (1 + \delta_j t^{\alpha-j}), \quad (44)$$

тобто при $n > 2$ і $|x| < t^{\frac{\alpha}{2}}$

$$|\mathfrak{D}_x^k G_j(t, x)| \leq c_k t^{-1-\alpha+j} |x|^{-(n+|k|-2)} e^{-c|\hat{x}|^q}. \quad (45)$$

Ці нерівності забезпечують сумовність похідних $\mathfrak{D}_x^k F(t, x)$, $|k| \leq 2$, якщо $\varphi_1 \in C^{(1)}(\mathbb{E}_n)$, $\varphi_2 \in C(\mathbb{E}_n)$ і $f \in C^{(\omega)}[(0, \tau) \times \mathbb{E}_n]$.

Дійсно, з допомогою нерівності (44) знаходимо для молодших похідних потенціалів

$$|\mathfrak{D}_x^k G_j \times \varphi_j| \leq c |\varphi_j|_c t^{-1+j-\frac{|k|}{2}\alpha}, \quad (j = 1, 2, |k| \leq 1).$$

Але $\mathfrak{D}_x^2 G_1 \times \varphi_1$ за цією нерівністю несумовна на $[0, \tau]$, бо $\alpha > 1$. Тому скористаємось зображенням і умовою $\varphi \in C^{(1)}$

$$\mathfrak{D}_x^2 G_1 \times \varphi_1 = \int_{\mathbb{E}_n} \mathfrak{D}_x^2 G(t, x - \xi) \varphi_1(\xi) d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{E}_n} \mathfrak{D}_x G_1(t, x - \xi) \varphi'(\xi) d\xi.$$

Оцінюючи інтеграл за нерівністю (44), отримуємо

$$|\mathfrak{D}^2 G_1 \times \varphi_1| \leq c |\varphi_1|_{c^{(1)}} \int_{\mathbb{E}_n} |x - \xi|^{-(n-1)} \times e^{-c|x-\xi|^q} d\xi t^{-\frac{\alpha}{2}} = c |\varphi_1|_1 t^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\mathbb{E}_n} |z|^{-(n-1)} \times e^{-c|z|^q} dz t^{-\alpha} = c t^{-\frac{\alpha}{2}} |\varphi_1|_1.$$

Якщо $j = \alpha$ і $\Phi(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)}{\tau} d\tau < \infty, F(t) =$

$\int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau$, то

$$|\mathfrak{D}_x^2 G_\alpha \times f| = \left| \int_0^t d\tau \int \mathfrak{D}^2 G_\alpha(t - \tau, x - \xi) \times [f(\tau, \xi) - f(\tau, x)] d\tau \right| \leq c |f|_\omega \int_0^t \frac{d\tau}{t - \tau} \times \int_{|x-\xi| \leq (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\omega(|x - \xi|)}{|x - \xi|^n} d\xi + c |f|_\omega \int_0^t \frac{d\tau}{t - \tau} \times \int_{|x-\xi| > (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\omega(|x - \xi|)}{|x - \xi|^n} e^{-c|x-\xi|^q} d\xi \equiv H_1 + H_2,$$

де $|f|_\omega = \sup_{\Pi} |f(t, x)| + \sup_{\Pi} \frac{|\Delta f(t, x)|}{\omega(|\Delta x|)}$.

В інтегралах H_1 і H_2 перейдемо до сферичних координат

$$H_1 \leq \int_0^t \frac{d\tau}{t - \tau} \int_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\rho = \Phi(t^{\frac{\alpha}{2}}) = \int_0^{t^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{F(\tau)}{\tau} d\tau.$$

За властивістю модуля неперервності $\omega(t)t^{-1} < 2\omega(\tau)\tau^{-1}$

$$H_2 \leq 2 \int_0^t \frac{\omega((t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}})}{(t - \tau)^{1+\frac{\alpha}{2}}} d\tau \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^q} d\rho =$$

$$= 2 \int_0^{t^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau = 2F(t^{\frac{\alpha}{2}}).$$

З нерівностей для потенціалів з ядрами G_j випливає оцінка

$$|\mathfrak{D}_x^k F(t, x)| \leq \quad (46)$$

$$\leq c \begin{cases} |\varphi_1|_c + |\varphi_2|_c + |f|_c, & k = 0, \\ |\varphi_1|_c t^{-\frac{\alpha}{2}} + |\varphi_2|_c t^{1-\frac{\alpha}{2}} + |f|_c, & k = 1, \\ |\varphi_1|_c t^{-\frac{\alpha}{2}} + |\varphi_2|_c t^{1-\alpha 2} + |f|_\omega, & |k| = 2. \end{cases}$$

Очевидно, що $\mathfrak{D}_x^k F(t, x)$ мають інтегровану особливість при $t = 0$, $\alpha < 2$. Розв'язок інтегрального рівняння (38) за допомогою резольвенти (42) визначається формулою

$$u(t, x) = F(t, x) + \int_0^t d\tau \times$$

$$\times \int_{E_n} R(t - \tau, x - \xi) F(\tau, \xi) d\xi. \quad (47)$$

Якщо в цю формулу підставити $F(t, x)$ із (43) і врахувати, що в згортках $G_j \times \varphi_j = \int_{E_n} G_j(t, x - \xi) \varphi_j(\xi) d\xi$ ядра $G_j(t, x)$ залежать від різниці $(x - \xi)$, то після заміни порядку інтегрування отримаємо зображення розв'язку

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^2 \int_{E_n} Z_i(t, x - \xi) \varphi_j(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z_\xi(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (48)$$

де вжито позначення для $i = 1, 2, \alpha$

$$Z_i(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_i(t - \tau, x - \xi) R(\tau, \xi) d\xi + G_i(t, x). \quad (49)$$

Наслідком приведених міркувань є така теорема.

Теорема 2 (про коректність). *Якщо в рівнянні (35) порядок похідної $\alpha \in (1, 2)$,*

то в задачі (35), (36) компоненти функції Гріна визначаються формулами (49) і для їх похідних правильні оцінки (44). Розв'язок задачі Коші (35), (36) з початковими функціями $\varphi_1 \in C^{(1)}(E_n)$, $\varphi_2 \in C(E_n)$ і $f \in C^{(\omega)}[(0, \tau) \times E_n]$ зображається формулою (48) і для нього справджуються нерівності (46).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тихонов, А.Н., Самарский, А.А. (1953). Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат.
2. Городецький, В.В., Літовченко, В.А. (1992). Задача Коші для псевдодиференціального рівняння у просторі узагальнених функцій типу S' : Доп. АН України, 10, 6-9.
3. Вірченко, Н.О., Рибак, В.Я. (2007). Основи дробового інтегро-диференціювання : Навч. посібник. Київ.
4. Eidelman, S.D., Ivasyshen, S.D., Koshubei, A.N. (2004). Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type: Operator Theory: Adv. and Appl, 152, 390.
5. Кочубей, А.Н. (1988). Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы: Изв. АН СССР. Сер. матем., 52 (5), 909-932.
6. Лопушанський, А.О. (2018). Лінійні та нелінійні операторно-диференціальні рівняння на комплексних інтерполяційних шкалах: Автореф. докт. дисерт, Львів.
7. Матійчук, М.І. (2016). Про зв'язок між фундаментальними розв'язками параболічних рівнянь і рівнянь з дробовими похідними: Буковинський математичний журнал. Чернів. нац. ун-т, 4(3-4), 101-114.
8. Матійчук, М.І. (2018). Про функцію Гріна псевдодиференціального рівняння з дробовою похідною: Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 22-25 травня 2018 р.). Матеріали конференції.